

# Prioritní fronta a příklad použití v úloze hledání nejkratších cest

Jan Faigl

Katedra počítačů  
Fakulta elektrotechnická  
České vysoké učení technické v Praze

Přednáška 11

**B0B36PRP – Procedurální programování**



# Přehled témat

- Část 1 – Prioritní fronta polem a haldou

Prioritní fronta polem

Halda

- Část 2 – Příklad využití prioritní fronty v úloze hledání nejkratší cesty v grafu

Popis úlohy

Návrh řešení

Příklad naivní implementace prioritní fronty polem

Implementace pq haldou s `push()` a `update()`

- Část 3 – Zadání 10. domácího úkolu (HW10)



# Část I

## Část 1 – Prioritní fronta (Halda)



# Obsah

Prioritní fronta polem

Halda



## Prioritní fronta polem – rozhraní

- V případě implementace prioritní fronty polem můžeme využít jedno pole pro hodnoty a druhé pole pro uložení priority daného prvku

*Implementace vychází z lec10/queue\_array.h,*

*a lec10/queue\_array.c*

```
typedef struct {
    void **queue;      // Pole ukazatelů na jednotlivé prvky
    int *priorities;  // Pole hodnot priorit jednotlivých prvků
    int count;
    int start;
    int end;
} queue_t;
```

- Další rozhraní (jména a argumenty funkcí) mohou zůstat identické jako u implementace spojovým seznamem

*Viz předchozí přednáška*

```
void queue_init(queue_t **queue);          int queue_push(void *value, int priority,
void queue_delete(queue_t **queue);      queue_t *queue);
void queue_free(queue_t *queue);         void* queue_pop(queue_t *queue);
void* queue_peek(const queue_t *queue);   void* queue_peek(const queue_t *queue);

_Bool queue_is_empty(const queue_t *queue);
```



## Prioritní fronta polem 1/3 – push()

- Funkce `push()` je až na uložení priority identická s verzí bez priorit

```
int queue_push(void *value, int priority, queue_t *queue)
{
    int ret = QUEUE_OK; // by default we assume push will be OK
    if (queue->count < MAX_QUEUE_SIZE) {
        queue->queue[queue->end] = value;

        // store priority of the new value entry
        queue->priorities[queue->end] = priority;

        queue->end = (queue->end + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;
        queue->count += 1;
    } else {
        ret = QUEUE_MEMFAIL;
    }
    return ret;
} // lec11/priority_queue-array/priority_queue-array.c
```

- Funkce `peek()` a `pop()` potřebují prvek s nejnižší (nejvyšší) prioritou

- Nalezení prvku z „čela“ fronty realizujeme funkcí `getEntry()`, kterou následně využijeme jak v `peek()`, tak v `pop()`



## Prioritní fronta polem 2/3 – `getEntry()`

- Nalezení nejmenšího (největšího) prvku provedeme lineárním prohledáním aktuálních prvků uložených ve frontě (poli)

```
static int getEntry(const queue_t *const queue)
{
    int ret = -1;
    if (queue->count > 0) {
        for (int cur = queue->start, i = 0; i < queue->count; ++i) {
            if (
                ret == -1 ||
                (queue->priorities[ret] > queue->priorities[cur])
            ) {
                ret = cur;
            }
            cur = (cur + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;
        }
    }
    return ret;
}
```

`lec11/priority_queue-array/priority_queue-array.c`



## Prioritní fronta polem 2/3 – peek() a pop()

- Funkce `peek()` využívá lokální (static) funkce `getEntry()`

```
void* queue_peek(const queue_t *queue)
{
    return queue_is_empty(queue) ? NULL : queue->queue[getEntry(queue)];
}
```

- Ve funkci `pop()` musíme zajistit zaplnění místa, pokud je vyjmut prvek z prostředka fronty (pole).

```
void* queue_pop(queue_t *queue) Případnou mezeru zaplníme prvkem ze startu
```

```
{
    void *ret = NULL;
    int bestEntry = getEntry(queue);
    if (bestEntry >= 0) { // entry has been found
        ret = queue->queue[bestEntry];
        if (bestEntry != queue->start) { //replace the bestEntry by start
            queue->queue[bestEntry] = queue->queue[queue->start];
            queue->priorities[bestEntry] = queue->priorities[queue->start];
        }
        queue->start = (queue->start + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;
        queue->count -= 1;
    }
    return ret;
}
```





## Prioritní fronta polem – příklad použití

- Použití je identické s implementací spojovým seznamem

```
make && ./demo-priority_queue-array
ccache clang -c priority_queue-array.c -O2 -o priority_queue-
array.o
ccache clang priority_queue-array.o demo-priority_queue-array.o
-o demo-priority_queue-array
Add 0 entry '2nd' with priority '2' to the queue
Add 1 entry '4th' with priority '4' to the queue
Add 2 entry '1st' with priority '1' to the queue
Add 3 entry '5th' with priority '5' to the queue
Add 4 entry '3rd' with priority '3' to the queue

Pop the entries from the queue
1st
2nd
3rd
4th
5th
```

```
lec11/priority_queue-array/priority_queue-array.h
lec11/priority_queue-array/priority_queue-array.c
lec11/priority_queue-array/demo-priority_queue-array.c
```



## Prioritní fronta spojovým seznamem nebo polem a výpočetní náročnost

- V naivní implementaci prioritní fronty jsme zohlednění priority „odložili“ až do doby, kdy potřebujeme odebrat prvek z fronty
- Při odebrání (nebo vrácení) nejmenšího prvku v nejnepříznivějším případě musíme projít všechny položky
- To může být v případě mnoha prvků **výpočetně náročné** a raději bychom chtěli „udržovat“ prvek připravený
  - Můžeme to například udělat zavedením položky **head**, ve které bude aktuálně nejnížší (nejvyšší) vložený prvek do fronty
  - Prvek **head** aktualizujeme v metodě **push()** porovnáním hodnoty aktuálně vkládaného prvku
  - Tím zefektivníme operaci **peek()**
  - V případě odebrání prvku, však musíme frontu znovu projít a najít nový prvek

Alternativně můžeme použít sofistikovanější datovou strukturu, která nám umožní efektivně udržovat hodnotu nejmenšího prvku a to jak při operaci vložení **push()** tak při operaci vyjmutí **pop()** prvku z prioritní fronty.



# Obsah

Prioritní fronta polem

Halda



# Halda

- Halda je dynamická datová struktura, která má „tvar“ binárního stromu a uspořádání prioritní fronty
- Každý prvek haldy obsahuje hodnotu a dva potomky, podobně jako binární strom
- **Vlastnosti haldy** – „*Heap property*“
  - **Hodnota každého prvku je menší než hodnota libovolného potomka**
  - Každá úroveň binárního stromu haldy je plná, kromě poslední úrovně, která je zaplněna zleva doprava **Binární plný strom**
  - Prvky mohou být odebrány pouze přes kořenový uzel
- Vlastnost haldy zajišťuje, že **kořen je vždy prvek s nejnižším/nejvyšším ohodnocením**

V případě binárního plného stromu je složitost procházení úměrná hloubce stromu, která je v případě  $n$  prvků úměrná  $\log_2(n)$ . Složitost operací `push()`, `pop()`, `peek()` tak můžeme očekávat nikoliv  $O(n)$  (jako v případě předchozí implementace prioritní fronty polem a spojovým seznamem), ale  $O(\log n)$ .

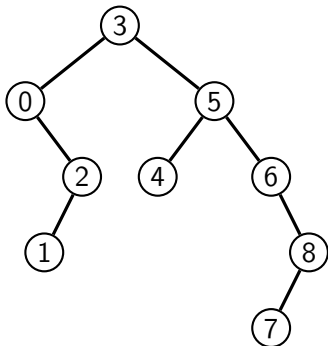


# Binární vyhledávací strom vs halda

## Binární vyhledávací strom

- Může obsahovat prázdná místa
- Hloubka stromu se může měnit

*Přestože jsme raději, pokud je strom vyvážený. To je však implementačně náročnější než implementace haldy.*



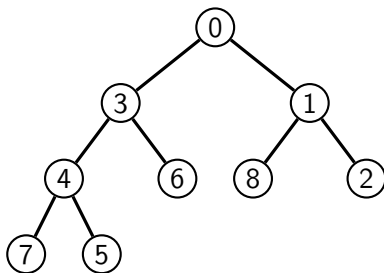
## Halda

- Binární plný strom

*Hloubka stromu vždy  $\lfloor \log_2(n) \rfloor$*

- Kořen stromu je vždy prvek s nejnižší (nejvyšší) hodnotou
- Strom splňuje vlastnost haldy

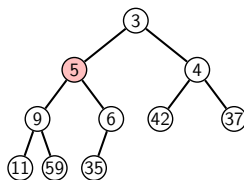
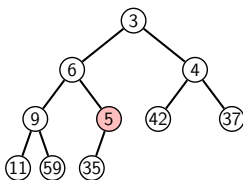
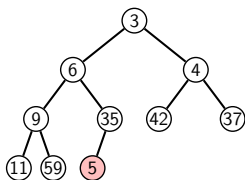
*Heap property*



## Halda – přidání prvku `push()`

- Po každém provedení operace `push()` musí být splněny vlastnosti haldy
- Prvek přidáme na konec haldy, tj. na první volnou pozici (vlevo) na nejnižší úrovni haldy
- Zkontrolujeme, zdali je splněna podmínka haldy, pokud ne, zaměníme prvek s nadřazeným prvkem (předkem)

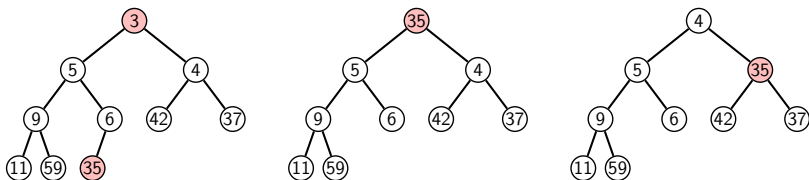
*V nejneprůzračnějším případě prvek „probublá“ až do kořene stromu*



## Halda – odebrání prvku `pop()`

- Při operaci `pop()` odebereme kořen stromu
- Prázdné místo nahradíme nejpravějším listem
- Zkontrolujeme, zdali je splněna podmínka haldy, pokud ne, zaměníme prvek s potomkem a postup opakujeme

*V nejneprůznivějším případě prvek „probublá“ až do listu stromu*



- Jak zjistit nejpravější list
  - V případě implementace spojovou strukturou (nelineární) můžeme explicitně udržovat odkaz
  - **Binární plný strom můžeme efektivně reprezentovat polem** – pak nejpravější list je poslední prvek v poli



## Prioritní fronta haldou

- Prvky ukládáme do haldy a při každém vložení / odebrání zajišťujeme, aby platily vlastnosti **haldy**
- Operace **peek()** má konstantní složitost a nezáleží na počtu prvků ve frontě, nejnižší prvek je vždy kořen

*Asymptotická složitost v notaci velké  $O$  je  $O(1)$ .*

- Operace **push()** a **pop()** udržují vlastnost haldy záměnami prvku až do hloubky stromu

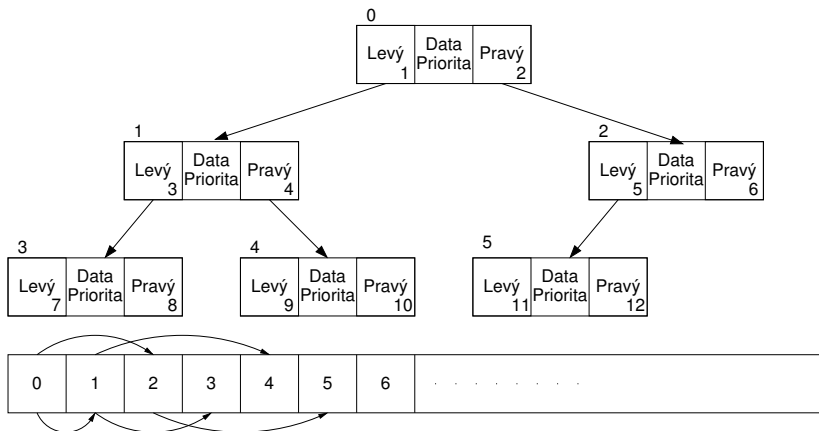
*Pro binární plný strom je hloubka stromu  $\log_2(n)$ , kde  $n$  je aktuální počet prvků ve stromu, odtud složitost operace  $O(\log(n))$ .*





## Reprezentace binárního stromu polem

- Binární plný strom můžeme reprezentovat lineární strukturou
- V případě známého maximální počtu prvků v haldě, pak jednoduše předalokovaným polem položek

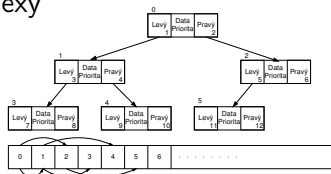


## Halda jako binární plný strom reprezentovaný polem

- Pro definovaný maximální počet prvků v haldě, si předalokujeme pole o daném počtu prvků
- Binární **plný strom** má všechny vrcholy na úrovni rovné hloubce stromu co nejvíce vlevo
- Kořen stromu je první prvek s indexem 0, následníky prvku na pozici  $i$  lze v poli určit jako prvky s indexy

- levý následník:  $i_{levý} = 2i + 1$
- pravý následník:  $i_{pravý} = 2i + 2$

*Podobně lze odvodit vztah pro předchůdce*



- Kořen stromu reprezentuje nejprioritnější prvek  
(např. s nejmenší hodnotou nebo maximální prioritou)



## Operace vkládání a odebírání prvků

- I v případě reprezentace polem pracují operace vkládání a odebírání identicky
  - Funkce `push()` přidá prvek jako další prvek v poli a následně propaguje prvek směrem nahoru až **je splněna vlastnost haldy**
  - Při odebrání prvku funkcí `pop()` je poslední prvek v poli umístěn na začátek pole (tj. kořen stromu) a propagován směrem dolů až **je splněna vlastnost haldy**
- Dochází pouze k vzájemnému zaměňování hodnot na pozicích v poli (haldě)
  - Z indexu prvku v poli vždy můžeme určit jak levého a pravého následníka, tak i předcházející prvek (rodič) v pohledu na haldu jako binární strom.
- Hlavní výhodou reprezentace polem je přístup do předem alokovaného bloku paměti
  - Všechny prvky můžeme jednoduše projít v jedné smyčce, například při výpisu*
- Ověření zdali implementace operací `push()` a `pop()` zachovává **podmínku haldy** můžeme realizovat ověřující funkcí `is_heap()`



## Příklad implementace `pq_is_heap()`

- Pro každý prvek haldy musí platit, že jeho hodnota je menší než hodnota levého a pravého následníka

```
typedef struct {
    int size;    // the maximal number of entries
    int len;    // the current number of entries
    int *cost;  // array with costs - lowest cost is highest priority
    int *label; // array with labels (each label has cost/priority)
} pq_heap_s;

_Bool pq_is_heap(pq_heap_s *pq, int n)
{
    _Bool ret = true;
    int l = 2 * n + 1; // left successor
    int r = l + 1;     // right successor
    if (l < pq->len) {
        ret = (pq->cost[l] < pq->cost[n]) ? false : pq_is_heap(pq, l);
    }
    if (r < pq->len) {
        ret = ret // if ret is false, further test is not performed
        &&
        ( (pq->cost[r] < pq->cost[n]) ? false : pq_is_heap(pq, r) );
    }
    return ret;
}
```



## Příklad implementace push()

- Prvek přidáme na konec pole a iterativně kontrolujeme, zdali je splněna vlastnost haldy. Pokud ne, prvek zaměníme s předchůdcem.

```
#define GET_PARENT(i) ((i-1) >> 1) // parent is (i-1)/2

_Bool pq_push(pq_heap_s *pq, int label, int cost)
{
    _Bool ret = false;
    if (pq && pq->len < pq->size && label >= 0 && label < pq->size) {
        pq->cost[pq->len] = cost; //add the cost to the next free slot
        pq->label[pq->len] = label; //add label of new entry

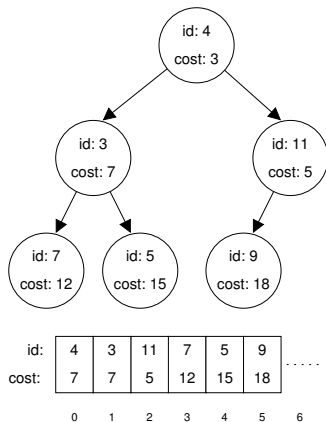
        int cur = pq->len; // index of the entry added to the heap
        int parent = GET_PARENT(cur);
        while (cur >= 1 && pq->cost[parent] > pq->cost[cur]) {
            pq_swap(pq, parent, cur); // swap parent<->cur
            cur = parent;
            parent = GET_PARENT(cur);
        }
        pq->len += 1;
        ret = true;
    }
    // assert(pq_is_heap(pq, 0)); // testing the implementation
    return ret;
}
```



## Příklad volání `pop()`

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu
- Na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Proto provedeme záměnu s následníky
  - V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

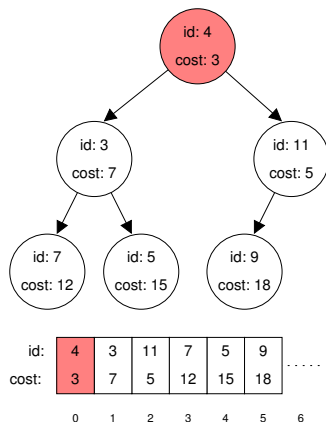
*Levý potomek prvku haldy na pozici  $i$  je  $2i + 1$ , pravý potomek je na pozici  $2i + 2$*



Příklad volání `pop()`

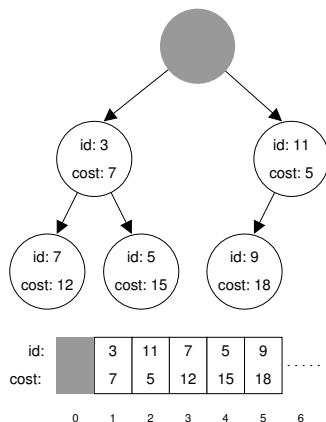
- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu
- Na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Proto provedeme záměnu s následníky
  - V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

*Levý potomek prvku haldy na pozici  $i$  je  $2i + 1$ , pravý potomek je na pozici  $2i + 2$*



## Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním pop() odebíráme kořen stromu**
- Na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Proto provedeme záměnu s následníky
  - V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu



*Levý potomek prvku haldy na pozici  $i$  je  $2i + 1$ , pravý potomek je na pozici  $2i + 2$*

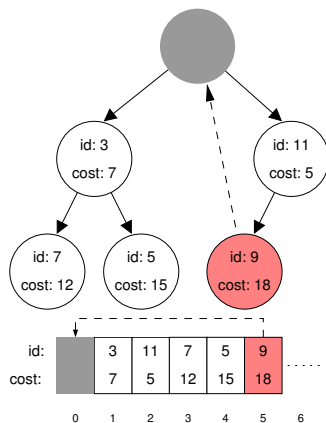




Příklad volání `pop()`

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu
- Na jeho místo umístíme poslední prvek**
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Proto provedeme záměnu s následníky
  - V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

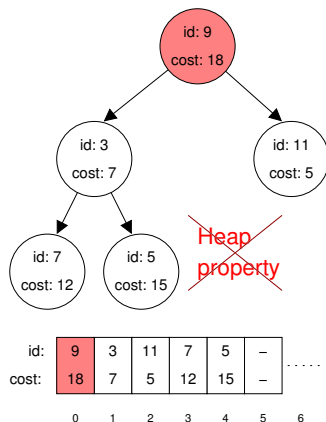
*Levý potomek prvku haldy na pozici  $i$  je  $2i + 1$ , pravý potomek je na pozici  $2i + 2$*



Příklad volání `pop()`

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu
- Na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy**
- Proto provedeme záměnu s následníky  
*V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

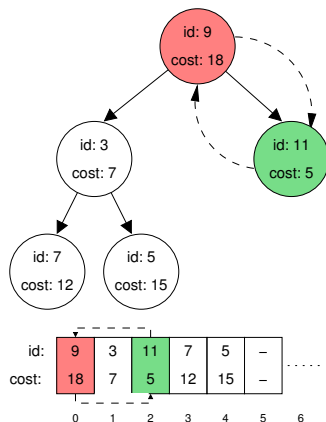
*Levý potomek prvku haldy na pozici  $i$  je  $2i + 1$ , pravý potomek je na pozici  $2i + 2$*



Příklad volání `pop()`

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu
- Na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Proto provedeme záměnu s následníky**  
*V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

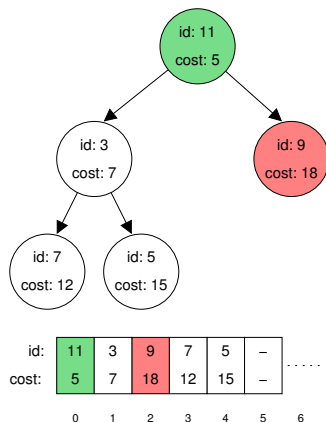
*Levý potomek prvku haldy na pozici  $i$  je  $2i + 1$ , pravý potomek je na pozici  $2i + 2$*



Příklad volání `pop()`

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu
- Na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Proto provedeme záměnu s následníky
  - V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy**
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

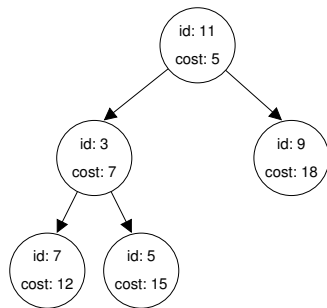
*Levý potomek prvku haldy na pozici  $i$  je  $2i + 1$ , pravý potomek je na pozici  $2i + 2$*



Příklad volání `pop()`

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu
- Na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Proto provedeme záměnu s následníky  
*V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

*Levý potomek prvku haldy na pozici  $i$  je  $2i + 1$ , pravý potomek je na pozici  $2i + 2$*



id:	11	3	9	7	5	–	.....
cost:	5	7	18	12	15	–	
	0	1	2	3	4	5	6



## Část II

### Část 2 – Příklad využití prioritní fronty v úloze hledání nejkratší cesty v grafu



# Obsah

Popis úlohy

Návrh řešení

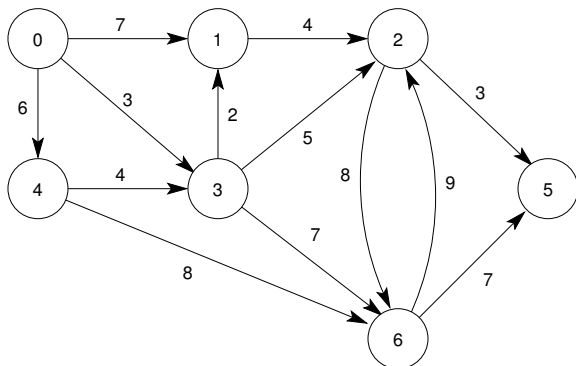
Příklad naivní implementace prioritní fronty polem

Implementace pq haldou s `push()` a `update()`



## Hledání nejkratší cesty v grafu

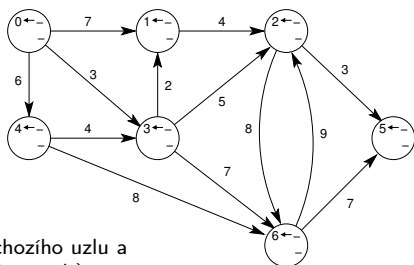
- Uzly grafu mohou reprezentovat jednotlivá místa
- Hrany pak reprezentují cestu jak se mezi místy pohybovat
- Ohodnocení (cena) hrany pak může například odpovídat náročnosti pohybu mezi dvě sousedními uzly
- Cílem je nalézt nejkratší (nejlevnější) cestu z nějakého konkrétního uzlu (0) do všech ostatních uzlů





## Dijkstrův algoritmus

- Necht' graf má pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel
  - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu
  - dále udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů
  - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme ceny následníků
  - Následně vybereme takový uzel,
    - do kterého již existuje nějaká cesta z výchozího uzlu a zároveň
    - má aktuálně nejnižší ohodnocení
  - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
    - Tj. uzel, do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
    - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).

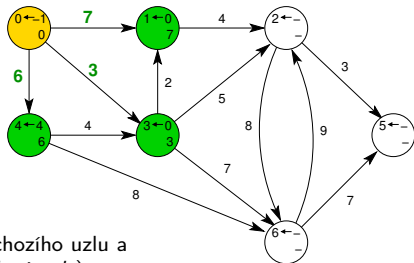


Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Proto pro uzel s aktuálně nejkratší cestou již nemůže existovat cesta kratší.



## Dijkstrův algoritmus

- Necht' graf má pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel
  - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu
  - dále udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů
  - **Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme ceny následníků**
  - Následně vybereme takový uzel,
    - do kterého již existuje nějaká cesta z výchozího uzlu a zároveň
    - má aktuálně nejnižší ohodnocení
  - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
    - Tj. uzel, do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
    - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).

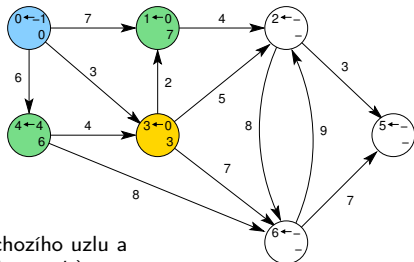


Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Proto pro uzel s aktuálně nejkratší cestou již nemůže existovat cesta kratší.



## Dijkstrův algoritmus

- Necht' graf má pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel
  - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu
  - dále udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů
  - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme ceny následníků
  - **Následně vybereme takový uzel,**
    - do kterého již existuje nějaká cesta z výchozího uzlu a zároveň
    - má aktuálně nejnižší ohodnocení
  - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
    - Tj. uzel, do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
    - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).

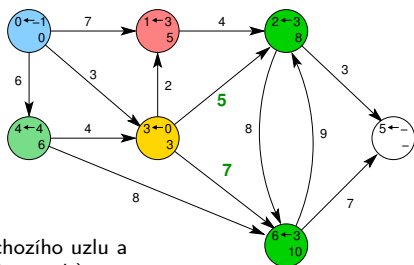


Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Proto pro uzel s aktuálně nejkratší cestou již nemůže existovat cesta kratší.



## Dijkstrův algoritmus

- Necht' graf má pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel
  - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu
  - dále udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů
  - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme ceny následníků
  - Následně vybereme takový uzel,
    - do kterého již existuje nějaká cesta z výchozího uzlu a zároveň
    - má aktuálně nejnižší ohodnocení
  - **Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.**
    - Tj. uzel, do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
    - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).

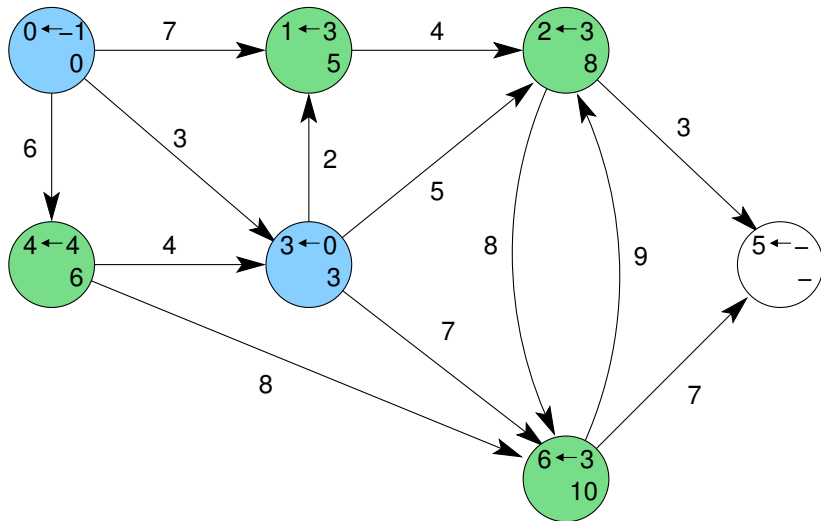


Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Proto pro uzel s aktuálně nejkratší cestou již nemůže existovat cesta kratší.



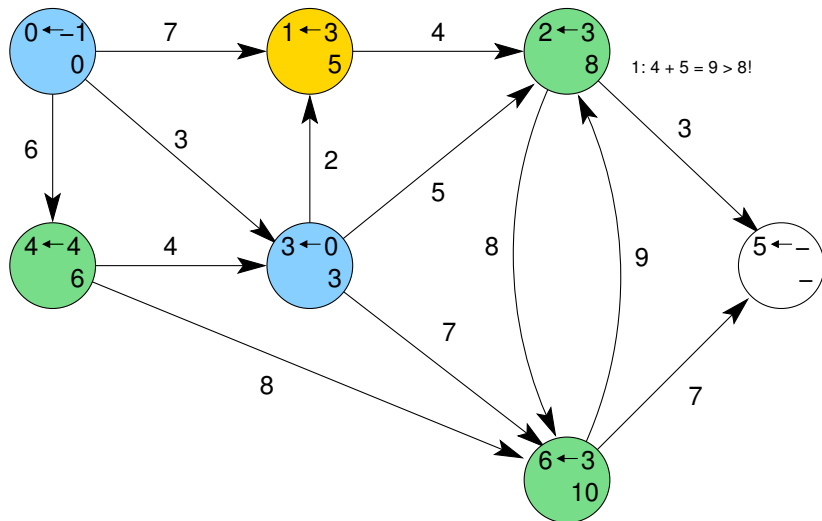
## Příklad postupu řešení (pokračování)

1: Po 2. expanzi má uzel 2 (vlevo nahoře) nejkratší cestu přes 3



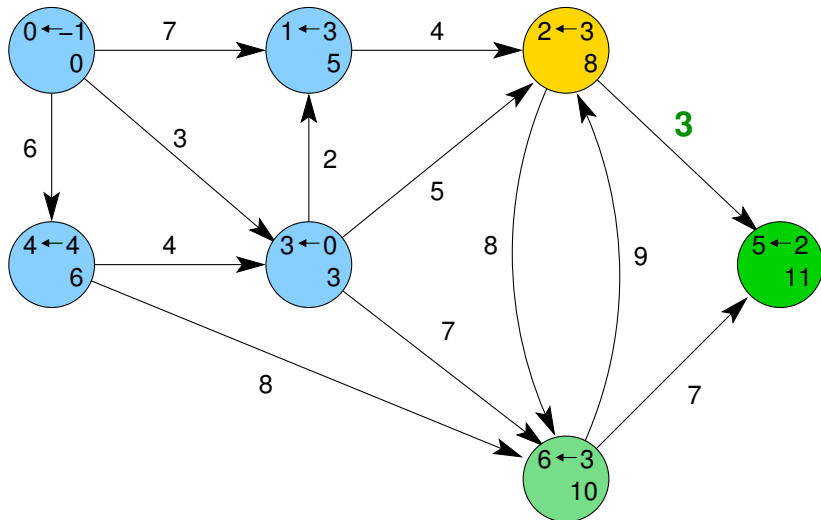
## Příklad postupu řešení (pokračování)

2: Expanze uzlu 1 nevede na kratší cestu do uzlu 2



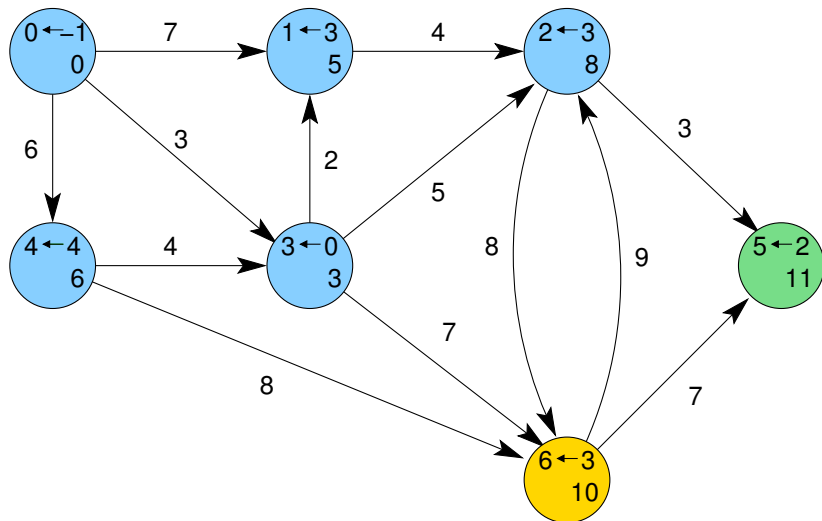
## Příklad postupu řešení (pokračování)

3: Expanzí uzlu 2 získáme cestu též do uzlu 5



## Příklad postupu řešení (pokračování)

4: Dalšími expanzemi již cesty nezlepšujeme





# Obsah

Popis úlohy

**Návrh řešení**

Příklad naivní implementace prioritní fronty polem

Implementace pq haldou s `push()` a `update()`



## Příklad řešení úlohy hledání nejkratších cest v grafu

Řešení úlohy se skládá z

### ■ **Vstupních dat** (grafu) – paměťová reprezentace a načtení hodnot

*Formát vstupního souboru*

- Vstupní graf je zadán jako seznam hran

- Dalším vstupem je výchozí uzel `from to cost` – Viz 9. přednáška

*Pro jednoduchost budeme uvažovat 1. uzel (0)*

### ■ **Výstupních dat** (nejkratší cesty) – paměťová reprezentace a uložení (zápis)

*Formát výstupního souboru*

- Všechny nejkratší cesty vypíšeme jako seznam vrcholů s cenou (délkou) nejkratší cesty a bezprostředním předchůdcem (indexem) uzlu na nejkratší cestě z výchozího uzlu (uzel 0)

`label cost parent`

### ■ **Algoritmu** hledání cest – Dijkstrův algoritmus

- Algoritmus je relativně přímočarý v každém kroku expandujeme uzel s aktuálně nejkratší cestou z výchozího uzlu

*V každém kroku potřebujeme aktuálně nejmenší prvek – použijeme **prioritní frontu***



## Vstupní graf, reprezentace grafu a řešení

- Graf je zadán jako seznam hran v souboru, který můžeme načíst funkcí `load_graph_simple()` z `lec09/load_simple.c`

- Graf je seznam hran

```
typedef struct {
    int from;
    int to;
    int cost;
} edge_t;
```

```
typedef struct {
    edge_t *edges;
    int num_edges;
    int capacity;
} graph_t;
lec09/graph.h
```

```
0 5 74
1 6 56
2 8 11
2 9 27
2 4 31
2 3 41
2 1 26
3 5 24
3 9 12
4 9 13
...
```

- Navíc využijeme toho, že jsou hrany uspořádané

- Hrany vycházející z uzlu určíme jako
- index první hrany `edge_start`
- a počet hran `edge_count`

```
typedef struct {
    int edge_start;
    int edge_count;
    int parent;
    int cost;
} node_t;
```

- Dále potřebujeme pro vlastní řešení u každého uzlu uložit cenu nejkratší cesty `cost` a předcházející uzel na nejkratší cestě `parent`



## Datová reprezentace

- Řešení implementujeme v modulu `dijkstra`
- Všechny potřebné datové struktury zahrneme do jediné struktury `dijkstra_t` reprezentující všechna data řešení úlohy

```
typedef struct {
    graph_t *graph;
    node_t *nodes;
    int num_nodes;
    int start_node;
} dijkstra_t;
```

- Pro alokaci použijeme `malloc()`, `allocate_graph()` a inicializujeme položky struktury na výchozí hodnoty

```
dijkstra_t *dij = (dijkstra_t*)malloc(sizeof(dijkstra_t));
dij->nodes = NULL;
dij->num_nodes = 0;
dij->start_node = -1;
dij->graph = allocate_graph();
```



## Načtení grafu a inicializace uzlů 1/2

- Hrany načteme např. `load_graph_simple()` nebo impl. HW09.

*Pro jednoduchost a lepší přehlednost zde předpokládáme bezchybné načtení*

- Dále potřebujeme zjistit počet vrcholů

*Lze implementovat přímo do načítání*

- Alokujeme paměť pro uzly a nastavíme (bezpečné) výchozí hodnoty

```
load_graph_simple(filename, dij->graph);
int m = -1;
for (int i = 0; i < dij->graph->num_edges; ++i) {
    const edge_t *const e = &(dij->graph->edges[i]);
    m = m < e->from ? e->from : m;
    m = m < e->to ? e->to : m;
} // smyčka pro určení maximálního počtu vrcholů

dij->num_nodes = m + 1; //m je index a začíná od 0 proto +1
dij->nodes = (node_t*)malloc(sizeof(node_t) * dij->num_nodes);
for (int i = 0; i < dij->num_nodes; ++i) {
    dij->nodes[i].edge_start = -1;
    dij->nodes[i].edge_count = 0;
    dij->nodes[i].parent = -1; // pokud neexistuje indikujeme -1
    // pro cenu volíme -1 ve výpise bude kratší než např. MAX_INT
    dij->nodes[i].cost = -1;
} // nastavení výchozích hodnot uzlů
```



## Inicializace uzlů 2/2

- Nastavíme indexy hran jednotlivým uzlům

```
for (int i = 0; i < dij->graph->num_edges; ++i) {
    int cur = dij->graph->edges[i].from;
    if (dij->nodes[cur].edge_start == -1) { // first edge
        // mark the first edge in the array of edges
        dij->nodes[cur].edge_start = i;
    }
    dij->nodes[cur].edge_count += 1; // increase no. of edges
}
```



## Uložení řešení do souboru

- Po nalezení všech nejkratších cest (z uzlu 0) má každý uzel nastavenou hodnotu `cost` s délkou cesty a v `parent` index bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě.

```
typedef struct {
    int edge_start;
    int edge_count;
    int parent;
    int cost;
} node_t;
```

Zápis řešení do souboru můžeme implementovat jednoduchým výpisem do souboru nebo implementací HW09.

```
_Bool dijkstra_save_path(void *dijkstra, const char *filename)
{
    _Bool ret = false;
    const dijkstra_t *const dij = (dijkstra_t*)dijkstra;
    if (dij) {
        FILE *f = fopen(filename, "w");
        if (f) {
            for (int i = 0; i <dij->num_nodes; ++i) {
                const node_t *const node = &(dij->nodes[i]);
                fprintf(f, "%i %i %i\n", i, node->cost, node->parent);
            } // end all nodes
            ret = fclose(f) == 0; // indicate eventual error in saving
        }
    }
    return ret;
}
```

lec11/dijkstra.c



# Obsah

Popis úlohy

Návrh řešení

**Příklad naivní implementace prioritní fronty polem**

Implementace pq haldou s `push()` a `update()`





## Prioritní fronta pro Dijkstrův algoritmus

- Součástí balíku `lec11/graph_search-array` je rozhraní `pq.h` pro implementaci prioritní fronty s funkcí `update()`

```
void *pq_alloc(int size);
```

```
void pq_free(void *_pq);
```

```
_Bool pq_is_empty(const void *_pq);
```

```
_Bool pq_push(void *_pq, int label, int cost);
```

```
_Bool pq_update(void *_pq, int label, int cost);
```

```
_Bool pq_pop(void *_pq, int *oLabel);
```

`lec11/graph_search-array/pq.h`

- Jedná se o relativně obecný předpis, který neklade zvláštní požadavky na vnitřní strukturu

V balíku je rozhraní implementované v modulu `pq_array-linear.c`, který obsahuje implementaci prioritní fronty polem s lineární složitostí funkcí `push()` a `pop()`

- `lec11/graph_search-array` základní funkční řešení hledání nejkratší cesty, prioritní fronta implementována polem



## Prioritní fronta (polem) s `push()` a `update()`

- Při expanzi uzlu, můžeme do prioritní fronty vkládat uzly s cenou pro každou hranu vycházející z uzlu
- Obecně může být hran výrazně více než počet uzlů

*Pro plný graf o  $n$  uzlech až  $n^2$  hran*

- Proto pro prioritní frontu implementujeme funkci `update()` a tím zaručíme, že ve frontě bude nejvýše tolik prvků, kolik je vrcholů
- V prioritní frontě tak můžeme předalokovat maximální počet položek
- Při volání `update()` však potřebujeme získat pozici daného uzlu v prioritní frontě a změnit jeho
  - Prvek v poli najdeme lineárním průchodem prvků ve frontě

*Budeme však mít lineární složitost*

- *Pozici prvku v prioritní frontě uložíme do dalšího pole a získáme tak okamžitý přístup za cenu mírně složitějšího vkládání prvků a vyšších paměťových nároků.*

*Operace `update()` bude mít výhodnou konstantní složitost.*



## Hledání nejkratších cest

- Využijeme implementaci prioritní fronty s `push()` a `update()`

```

dij->nodes[dij->start_node].cost = 0; // inicializace
void *pq = pq_alloc(dij->num_nodes); // prioritní fronta
int cur_label;
pq_push(pq, dij->start_node, 0);
while ( !pq_is_empty(pq) && pq_pop(pq, &cur_label)) {
    node_t *cur = &(dij->nodes[cur_label]); // pro snažší použití
    for (int i = 0; i < cur->edge_count; ++i) { // všechny hrany z uzlu
        edge_t *edge = &(dij->graph->edges[cur->edge_start + i]);
        node_t *to = &(dij->nodes[edge->to]);
        const int cost = cur->cost + edge->cost;
        if (to->parent == -1) {
            to->cost = cost;
            to->parent = cur_label;
            pq_push(pq, edge->to, cost); // vložení vrcholu do fronty
        } else if (cost < to->cost) { // uzel již v pq, proto
            to->cost = cost; // testujeme cost
            to->parent = cur_label; // a aktualizujeme odkaz (parent)
            pq_update(pq, edge->to, cost); // a prioritní frontu pq
        }
    } // smyčka přes všechny hrany z uzlu cur_label
} // prioritní fronta je prázdná
pq_free(pq); // uvolníme paměť

```

lec11/dijkstra.c



## Příklad použití

- Základní implementace hledání cest s prioritní frontou implementovanou polem je dostupná v `lec11/graph_search-array`
- Vytvoříme graf `g` programem `tdijkstra` např. o max 1000 vrcholech,

```
./tdijkstra -c 1000 g
```

- Program zkompilujeme a spustíme např.

```
./tgraph_search g s
```

- Programem `tdijkstra` můžeme vygenerovat referenční řešení např.

```
./tdijkstra g s.ref
```

- a naše řešení pak můžeme porovnat např.

```
diff s s.ref
```



## Lineární prioritní fronta vs efektivní implementace

- Ukázková implemetace v `lec11/graph_search-array`, je sice funkční, pro velké grafy je však výpočet pomalý
  - Například pro graf s 1 mil. vrcholů trvá načtení, nalezení všech nejkratší cest a uložení výsledku přibližně 120 sekund

```
./tdijkstra -c 1000000 g Intel Skylake@3.3GHz
/usr/bin/time ./tgraph_search g s
Load graph from g
Find all shortest paths from the node 0
Save solution to s
Free allocated memory
      120.53 real          115.92 user          0.07 sys
```

- Referenčnímu programu `tdijkstra` pouze cca 1 sekundu

*Těž k dispozici jako `tdijkstra.Linux a tdijkstra.exe`*

```
/usr/bin/time ./tdijkstra g s.ref
      1.03 real          0.94 user          0.07 sys
```

- Oba programy vracejí identické výsledky

```
md5sum s s.ref
```

```
MD5 (s) = 8cc5ec1c65c92ca38a8dadf83f56e08b
```

```
MD5 (s.ref) = 8cc5ec1c65c92ca38a8dadf83f56e08b
```

**V základní verzi řešení HW10 nesmí být hledání nejkratší cesty více než 2× pomalejší než referenční program.**



# Obsah

Popis úlohy

Návrh řešení

Příklad naivní implementace prioritní fronty polem

Implementace pq haldou s `push()` a `update()`



## Prioritní fronta haldou s `push()` a `update()`

- Prioritní frontu implementujeme haldou reprezentovanou v poli  
*Maximální počet prvků dopředu známe.*
- Halda zaručí složitost operací `push()` a `pop()`  $O(\log n)$   
*Oproti  $O(n)$  u jednoduché implementace prioritní fronty polem.*
- Je nutné udržovat vlastnost haldy. Pro kontrolu zachování „*heap property*“ implementujeme rozhraní `pq_is_heap()`

```
_Bool pq_is_heap(void *heap, int n);
```

`lec11/graph_search/pq_heap.h`

- Pro zachování složitosti operací práce s haldou potřebujeme efektivně implementovat také funkci `update()`, tj.  $O(\log n)$ .
  - Potřebujeme znát pozici daného uzlu v haldě  
*Zavedeme pomocné pole s index `heapIDX`*
  - Při hledání nejkratších cest se délka cesty pouze snižuje
  - Proto se aktualizovaný „uzel“ může v haldě pohybovat pouze směrem nahoru

*Jedná se tak o identický postup jako při přidání nového prvku funkcí `push()`. V tomto případě však prvek může startovat z prostředka stromu.*



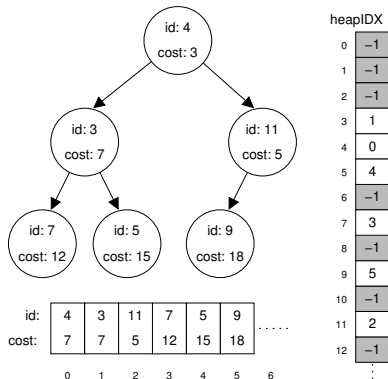
## Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

Zavoláme `update(id=7, cost=5)`

- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.
- Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.





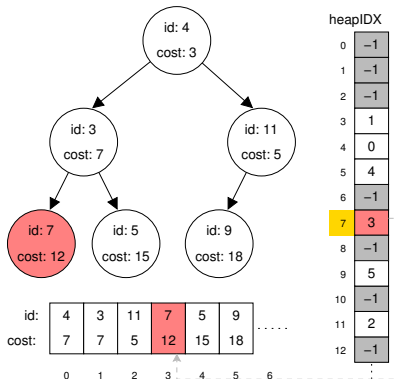
## Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

Zavoláme `update(id=7, cost=5)`

- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.
- Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



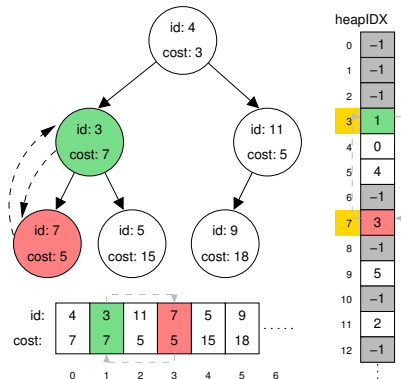
## Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

Zavoláme `update(id=7, cost=5)`

- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.
- **Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.**
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



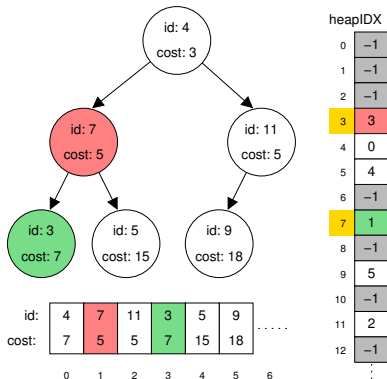
## Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

Zavoláme `update(id=7, cost=5)`

- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.
- Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



## Příklad implementace

- V `lec11/graph_search` je uveden příklad implementace hledání nejkratších cest s prioritní frontou realizovanou haldou
- Implementace funkce `update()` využívá pole `heapIDX` pro získání pozice prvku v haldě, záměrně je však splnění vlastnosti haldy realizováno vytvořením nové haldy s aktualizovanou cenou uzlu.

```

_Bool pq_update(void *_pq, int label, int cost)
{
    _Bool ret = false;
    pq_heap_s *pq = (pq_heap_s*)_pq;
    pq->cost[pq->heapIDX[label]] = cost; // update the cost, but heap property is not satisfied
    // assert(pq_is_heap(pq, 0));

    pq_heap_s *pqBackup = (pq_heap_s*)pq_alloc(pq->size); //create backup of the heap
    pqBackup->len = pq->len;
    for (int i = 0; i < pq->len; ++i) { // backup the help
        pqBackup->cost[i] = pq->cost[i]; //just cost and labels
        pqBackup->label[i] = pq->label[i];
    }
    pq->len = 0; //clear all vertices in the current heap
    for (int i = 0; i < pqBackup->len; ++i) { //create new heap from the backup
        pq_push(pq, pqBackup->label[i], pqBackup->cost[i]);
    }
    pq_free(pqBackup); // release the queue
    ret = true;
    return ret;
}

```

**Součástí řešení 10. domácí úkolu je správná implementace funkce `update()`!**



## Příklad řešení a rychlost výpočtu

- Po úpravě funkce `update()` získáme prioritní frontu se složitostí operací  $O(\log n)$  a vlastní výpočet bude relativně rychlý.
- Pro získání představy rychlosti výpočtu je v souboru `tgraph_search-time.c` volání dílčích funkcí modulu `dijkstra` s měřením reálného času (`make time`). `lec11/graph_search-time.c`  
*Alternativně lze řešit nástrojem `time` nebo pro Win platformu `lec11/bin/timeexec.exe`*
- Vytvoříme graf o 1 mil. uzlů (a cca 3 mil. hran) v soboru `/tmp/g`  
`./bin/tdijkstra -c 1000000 /tmp/g`

Verze s naivním `update()`

```
tgraph_search-time /tmp/g /tmp/s1
Load graph from /tmp/g
Load time ....1179ms
Save solution to /tmp/s1
Solve time ...965875 ms
Save time ....273 ms
Total time ...967327ms
```

Upravená funkce `update()`

```
tgraph_search-time /tmp/g /tmp/s2
Load graph from /tmp/g
Load time ....1201ms
Save solution to /tmp/s2
Solve time ...620 ms
Save time ....279 ms
Total time ...2100ms
```

- Správnost řešení lze zkontrolovat program `tdijsktra`, např.  
`./bin/tdijkstra -t /tmp/g /tmp/s`



## Další možnosti urychlení programu

- Kromě efektivní implementace prioritní fronty haldou, která je zásadní, lze běh programu dále urychlit
  - efektivnějším načítáním grafu
  - a ukládáním řešení do souboru.

*Textová vs binární verze souborů*

tgraph_search s.tgs	<b>tdijkstra</b> -v g s.ref	dijkstra-pv g s.pv
lec11/tgraph_search	Dijkstra ver. 2.3.4	HW10 Reference solution
Load time ....1252ms	Load time ....223ms	Load time ....235ms
Solve time ...625 ms	Solve time ...715ms	Solve time ...610 ms
Save time ....431 ms	Save time ....106ms	Save time ....87 ms
Total time ...2308ms	Total time ...1044ms	Total time ...932ms

- HW10 – Soutěž v rychlosti programu – prvních 20 nejrychlejších programů si rozdělí v součtu 50 extra bodů
  - Na odevzdání stačí opravit funkci `update()` případně využít binární načítání a ukládání z HW09.
  - Dalšího urychlení lze dosáhnout lepší organizací paměti a datovými strukturami

*Jediný zásadní požadavek je implementace rozhraní dle `lec11/dijkstra.h`*



# Část III

## Část 3 – Zadání 10. domácího úkolu (HW10)



## Zadání 10. domácího úkolu HW10

### Téma: Integrace načítání grafu a prioritní fronta v úloze hledání nejkratších cest

Povinné zadání: **3b**; Volitelné zadání: **5b**; Bonusové zadání: **Soutěž o body**

- **Motivace:** Větší programový celek, využití existujícího kódu a efektivním implementace programu
- **Cíl:** Osvojit si integraci existujících kódu do funkčního celku složeného z více souborů.
- **Zadání:** <https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b0b36prp/hw/hw10>
  - Funkce `update()` pro efektivní použití prioritní fronty implementované haldou v úloze hledání nejkratší cest v grafu.
  - **Volitelné zadání** rozšiřuje úlohu o využití binárního načítání/ukládání, tj. znovupoužití řešení HW 09.
  - **Bonusové zadání** spočívá v efektivnosti implementace tak, aby byl výsledný kód co možná nejrychlejší; kategorie textové a binární soubory. **100 nejrychlejších implementací si rozdělí 100 bodů.**
- **Termín odevzdání:** **07.01.2017, 23:59:59 PST**





# Shrnutí přednášky



# Diskutovaná témata

- Prioritní fronta
  - Příklad implementace spojovým seznamem  
`lec11/priority_queue-linked_list`
  - Příklad implementace polem  
`lec11/priority_queue-array`
- Halda - definice, vlastnosti a základní operace
- Reprezentace binárního plného stromu polem
- Prioritní fronta s haldou
- Hledání nejkratší cesty v grafu – využití prioritní fronty (resp. haldy)
- Příště: Systémy pro správu verzí.



# Diskutovaná témata

- Prioritní fronta
  - Příklad implementace spojovým seznamem  
`lec11/priority_queue-linked_list`
  - Příklad implementace polem  
`lec11/priority_queue-array`
- Halda - definice, vlastnosti a základní operace
- Reprezentace binárního plného stromu polem
- Prioritní fronta s haldou
- Hledání nejkratší cesty v grafu – využití prioritní fronty (resp. haldy)
  
- **Příště: Systémy pro správu verzí.**

