Prioritní fronta a příklad použití v úloze hledání nejkratších cest

Jan Faigl

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

Přednáška 11

B0B36PRP – Procedurální programování

Přehled témat

- Část 1 – Prioritní fronta (Halda)

- Část 2 – Příklad využití prioritní fronty v úloze hledání nejkratší cesty v grafu

- Část 3 – Zadání 10. domácího úkolu (HW10)

Část I

Část 1 – Prioritní fronta (Halda)

Obsah

Popis

Prioritní fronta spojovým seznamem

Prioritní fronta polem

Halda

Prioritní fronta

- Fronta
  - První vložený prvek je první odebraný prvek

    FIFO
- Prioritní fronta
  - Některé prvky jsou při vyjmutí z fronty preferovány

    Některé vložené objekty je potřeba obsloužit naléhavěji, např. fronta pacientů u lékaře.
  - Operace **pop()** odebírá z fronty prvek s nejvyšší prioritou

    Vrchol fronty je prvek s nejvyšší prioritou.

    Alternativně též prvek s nejnižší hodnotou
- Rozhraní prioritní fronty může být identické jako u běžné fronty, avšak specifikace upřesňuje chování dílčích metod

Prioritní fronta – specifikace rozhraní

- Prioritní frontu můžeme implementovat různě složitě a také s různými výpočetními nároky, např.
  - Polem nebo spojovým seznamem s modifikací funkcí **push()** nebo **pop()** a **peek()**

    Základní implementace fronty viz předchozí přednáška.
    - Například tak, že ve funkci **pop()** a **peek()** projdeme všechny dosud vložené prvky a najdeme prvek nejprioritnější
  - S využitím pokročilé datové struktury pro efektivní vyhledání prioritního prvku (halda)
- Prioritní prvek může být ten s nejmenší hodnotou, pak
  - Metody **pop()** a **peek()** vrací nejmenší prvek dosud vložený do fronty
  - Hodnoty prvků potřebujeme porovnávat, proto potřebujeme funkci pro porovnávání prvků

    Obecně můžeme realizovat například ukazatelem na funkci

Obsah

Prioritní fronta – příklad rozhraní

- V implementaci spojového seznamu upravíme funkce `peek()` a `pop()`

  Využijeme přímo kód `lec10/queue_linked_list.h`*,a* `lec10/queue_linked_list.c`

- Prvek fronty `queue_entry_t` rozšíříme o položku určující prioritu

  Alternativně můžeme specifikovat funkce porovnání datavých položek

```
typedef struct entry {
   void *value;

   // Nová položka
   int priority;

   struct entry *next;
} queue_entry_t;

typedef struct {
   queue_entry_t *head;
   queue_entry_t *end;
} queue_t;
```

- Rozhraní funkcí je identické frontě až na specifikaci priority při vložení prvku do fronty

```
void queue_init(queue_t **queue);
void queue_delete(queue_t **queue);
void queue_free(queue_t *queue);

int queue_push(void *value, int priority,
    queue_t *queue);

void* queue_pop(queue_t *queue);
_Bool queue_is_empty(const queue_t *queue);
void* queue_peek(const queue_t *queue);
```

`lec11/priority_queue.h`

Prioritní fronta spojovým seznamem 1/4

- Ve funkci push() přidáme pouze nastavení priority

```
int queue_push(void *value, int priority, queue_t *queue)
{
   ...
   if (new_entry) { // fill the new_entry
      new_entry->value = value;
      new_entry->priority = priority;
   ...
```

lec11/priority_queue.c

Prioritní fronta spojovým seznamem 2/4

- peek() lineárně prochází seznam a vybere prvek s nejnižší prioritou

```c
void* queue_peek(const queue_t *queue)
{
   void *ret = NULL;
   if (queue && queue->head) {
      ret = queue->head->value;
      int lowestPriority = queue->head->priority;
      queue_entry_t *cur = queue->head->next;
      while (cur != NULL) {
         if (lowestPriority > cur->priority) {
            lowestPriority = cur->priority;
            ret = cur->value;
         }
         cur = cur->next;
      }
   }
   return ret;
}
```

lec11/priority_queue.c

Prioritní fronta spojovým seznamem 3/4

- Podobně `pop()` lineárně prochází seznam a vybere prvek s nejnižší prioritou, je však nutné zajistit propojení seznamu po odebírní prvku

```c
void* queue_pop(queue_t *queue)
{
   void *ret = NULL;
   if (queue->head) { // having at least one entry
      queue_entry_t* cur = queue->head->next;
      queue_entry_t* prev = queue->head;
      queue_entry_t* best = queue->head;
      queue_entry_t* bestPrev = NULL;
      while (cur) {
         if (cur->priority < best->priority) {
            best = cur; // update the entry with
            bestPrev = prev;  // the lowest priority
         }
         prev = cur;
         cur = cur->next;
      }
      ...
```

lec11/priority_queue.c

- Proto si při procházení pamatujeme předchozí prvek `bestPrev`

Prioritní fronta spojovým seznamem 4/4

- Po nalezení největšího (nejmenšího) prvku propojíme seznam

```
void* queue_pop(queue_t *queue)
{
   ...
      while (cur) { ... } // Finding the best entry

      if (bestPrev) { // linked the list after
         bestPrev->next = best->next; // best removal
      } else { // best is the head
         queue->head = queue->head->next;
      }
      ret = best->value; //retrive the value
      if (queue->end == best) { //update the list end
         queue->end = bestPrev;
      }
      free(best);  // release queue_entry_t
      if (queue->head == NULL) { // update end if last
         queue->end = NULL;      // entry has been
      }                          // popped
   }
   return ret;
}
```

lec11/priority_queue.c

Prioritní fronta spojovým seznamem – příklad použití 1/2

- Inicializaci fronty provedeme polem textových řetězců a priorit

```
queue_t *queue;
queue_init(&queue);
char *values[] = { "2nd", "4th", "1st", "5th", "3rd" };
int priorities[] = { 2, 4, 1, 5, 3 };
const int n = sizeof(priorities) / sizeof(int);
for (int i = 0; i < n; ++i) {
   int r = queue_push(values[i], priorities[i], queue);
   printf("Add %2i entry '%s' with priority '%i' to the queue\n",
     i, values[i], priorities[i]);
   if (r != QUEUE_OK) {
      fprintf(stderr, "Errro: Queue is full!\n");
      break;
   }
}
printf("\nPop the entries from the queue\n");
while(!queue_is_empty(queue)) {
   char* pv = (char*)queue_pop(queue);
   printf("%s\n", pv);
   // Do not call free(pv);
}
queue_delete(&queue);
```

lec11/demo-priority_queue.c

Prioritní fronta spojovým seznamem – příklad použití 2/2

- Hodnoty jsou neuspořádané a očekáváme jejich uspořádaný výpis při odebírání funkcí pop()

```
char *values[] = { "2nd", "4th", "1st", "5th", "3rd" };
int priorities[] = { 2, 4, 1, 5, 3 };
...
while(!queue_is_empty(queue)) {
   // Do not call free(pv);
```

- V tomto případě nevoláme free() neboť vložené textové řetězce jsou textovými literály *Narozdíl od příkladu v 11. přednášce!*
- Příklad výstupu (v tomto případě preferujeme nižší hodnoty):

```
make && ./demo-priority_queue
Add  0 entry '2nd' with priority '2' to the queue
Add  1 entry '4th' with priority '4' to the queue
Add  2 entry '1st' with priority '1' to the queue
Add  3 entry '5th' with priority '5' to the queue
Add  4 entry '3rd' with priority '3' to the queue

Pop the entries from the queue
1st
2nd
3rd
4th
5th
```

lec11/priority_queue.h, lec11/priority_queue.c

lec11/demo-priority_queue.c

Obsah

Prioritní fronta polem – rozhraní

- V případě implementace prioritní fronty polem můžeme využít jedno pole pro hodnoty a druhé pole pro uložení priority daného prvku

Implementace vychází z `lec10/queue_array.h`, *a* `lec10/queue_array.c`

```
typedef struct {
   void **queue;    // Pole ukazatelů na jednotlivé prvky
   int *priorities; // Pole hodnot priorit jednotlivých prvků
   int count;
   int start;
   int end;
} queue_t;
```

- Další rozhraní (jména a argumenty funkcí) mohou zůstat identické jako u implementace spojovým seznamem

Viz snímek 8

Prioritní fronta polem 1/3

- Funkce push() je až na uložení priority identická s verzí bez priorit

```
int queue_push(void *value, int priority, queue_t *queue)
{
   if (queue->count < MAX_QUEUE_SIZE) {
      queue->queue[queue->end] = value;

      // store priority of the new value entry
      queue->priorities[queue->end] = priority;

      queue->end = (queue->end + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;
      queue->count += 1;
   } else {
      ret = QUEUE_MEMFAIL;
   }
   return ret;
}
```
lec11/priority_queue-array.c

- Funkce peek() a pop() potřebují prvek s nejnižší (nejvyšší) prioritou
  - Nalezení prvku z „čela" fronty realizujeme funkcí getEntry(), kterou následně využijeme jak v peek(), tak v pop()

Prioritní fronta polem 2/3

- Nalezení nejmenšího (největšího) prvku provedeme lineárním prohledáním aktuálních prvků uložených ve frontě (poli)

```
static int getEntry(const queue_t *queue)
{
  int ret = -1;
  if (queue->count > 0) {
    for (int cur = queue->start, i = 0; i < queue->count; ++i) {
      if (
          ret == -1 ||
          (queue->priorities[ret] > queue->priorities[cur])
        ) {
        ret = cur;
      }
      cur = (cur + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;
    }
  }
  return ret;
}
```

lec11/priority_queue-array.c

Prioritní fronta polem 2/3

- Funkce peek() využívá lokální (static) funkce getEntry()

```
void* queue_peek(const queue_t *queue)
{
   return queue_is_empty(queue) ? NULL : queue->queue[getEntry(queue)];
}
```

- Ve funkci pop() musíme zajistit zaplnění místa, pokud je odebírán prvek z prostředka fronty (pole).

Případnou mezeru zaplníme prvkem ze startu

```
void* queue_pop(queue_t *queue)
{
   void *ret = NULL;
   int bestEntry = getEntry(queue);
   if (bestEntry >= 0) { // entry has been found
      ret = queue->queue[bestEntry];
      if (bestEntry != queue->start) { //replace the bestEntry by start
         queue->queue[bestEntry] = queue->queue[queue->start];
         queue->priorities[bestEntry] = queue->priorities[queue->start];
      }
      queue->start = (queue->start + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;
      queue->count -= 1;
   }
   return ret;
}
```

Prioritní fronta polem – příklad použití

- Použití je identické s implementací spojovým seznamem

```
make && ./demo-priority_queue-array
ccache clang -c priority_queue-array.c -O2  -o priority_queue-
    array.o
ccache clang priority_queue-array.o demo-priority_queue-array.o
    -o demo-priority_queue-array
Add  0 entry '2nd' with priority '2' to the queue
Add  1 entry '4th' with priority '4' to the queue
Add  2 entry '1st' with priority '1' to the queue
Add  3 entry '5th' with priority '5' to the queue
Add  4 entry '3rd' with priority '3' to the queue

Pop the entries from the queue
1st
2nd
3rd
4th
5th
```

lec11/priority_queue-array.h, lec11/priority_queue-array.c

lec11/demo-priority_queue-array.c

Prioritní fronta spojovým seznamem nebo polem a výpočetní náročnost

- V naivní implementaci prioritní fronty jsme zohlednění priority „odložili" až do doby, kdy potřebujeme odebrat prvek z fronty
- Při odebrání (nebo vrácení) nejmenšího prvku v nejnepříznivějším případě musíme projít všechny položky
- To může být v případě mnoha prvků výpočetně náročné a raději bychom chtěli „udržovat" prvek připravený
  - Můžeme to například udělat zavedením položky **head**, ve které bude aktuálně nejnižší (nejvyšší) vložený prvek do fronty
  - Prvek **head** aktualizujeme v metodě **push()** porovnáním hodnoty aktuálně vkládaného prvku
  - Tím zefektivníme operaci **peek()**
  - V případě odebrání prvku, však musíme frontu znovu projít a najít nový prvek

Alternativně můžeme použít sofistikovanější datovou strukturu, která nám umožní efektivně udržovat hodnotu nejmenšího prvku a to jak při operaci vložení **push()** tak při operaci vyjmutí **pop()** prvku z prioritní fronty.

Obsah

Halda

- Halda je dynamická datová struktura, která má „tvar" binárního stromu a uspořádání prioritní fronty
- Každý prvek haldy obsahuje hodnotu a dva potomky, podobně jako binární strom
- **Vlastnosti haldy**
  - Hodnota každého prvku je menší než hodnota libovolného potomka
  - Každá úroveň haldy je plná, kromě poslední úrovně, která je zaplněna zleva doprava

    Binární plný strom
  - Prvky mohou být odebrány pouze přes kořenový uzel
- Vlastnost haldy zajišťuje, že kořen je vždy prvek s nejnižším/nejvyšším ohodnocením

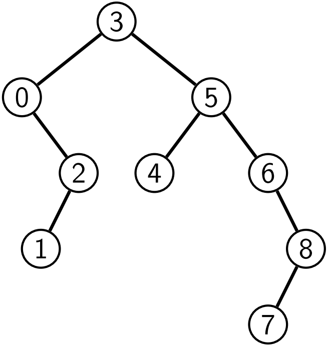
V případě binárního plného stromu je složitost procházení následníku úměrná hloubce stromu, která je v případě n prvků úměrná $\log_2(n)$. Složitost operací `push()`, `pop()`, `peek()` tak můžeme očekávat nikoliv $O(n)$, ale $O(logn)$.

Binární vyhledávací strom vs halda

Binární vyhledávací strom

- Může obsahovat prázdná místa
- Hloubka stromu se může měnit

  Přestože jsme raději, pokud je strom vyvážený. To je však implementačně náročnější než implementace haldy.



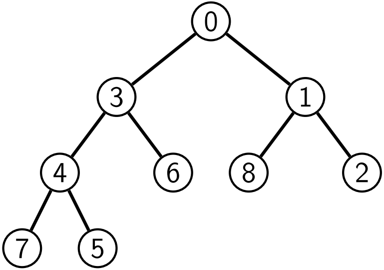
Halda

- Binární plný strom

  Hloubka stromu vždy $\lfloor \log_2(n) \rfloor$

- Kořen stromu je vždy prvek s nejnižší (nejvyšší) hodnotou
- Strom splňuje vlastnost haldy

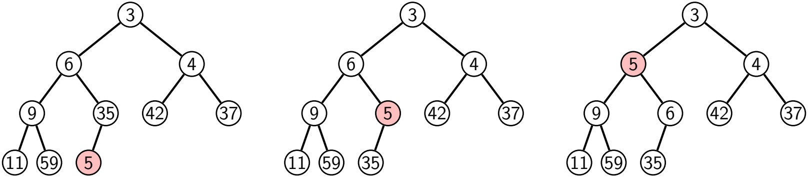
  Heap property



Halda – přidání prvku **push()**

- Po každém provedení operace **push()** musí být splněny vlastnosti haldy
- Prvek přidáme na konec haldy, tj. na první volnou pozici (vlevo) na nejnižší úrovni haldy
- Zkontrolujeme, zdali je splněna podmínka haldy, pokud ne, zaměníme prvek s nadřazeným prvkem (předkem)

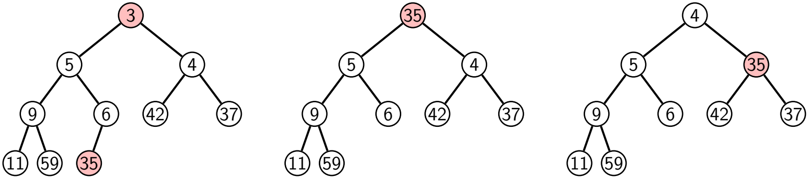
V nejnepříznivějším případě prvek „probublá" až do kořene stromu



Halda – odebrání prvku **pop()**

- Při operaci **pop()** odebereme kořen stromu
- Prázdné místo nahradíme nejpravějším listem
- Zkontrolujeme, zdali je splněna podmínka haldy, pokud ne, zaměníme prvek s potomkem a postup opakujeme

V nejnepříznivějším případě prvek „probublá" až do listu stromu



- Jak zjistit nejpravější list
  - V případě implementace spojovou strukturou (nelineární) můžeme explicitně udržovat odkaz
  - Binární plný strom můžeme efektivně reprezentovat pole, pak poslední prvek v poli je nejpravější list

Prioritní fronta haldou

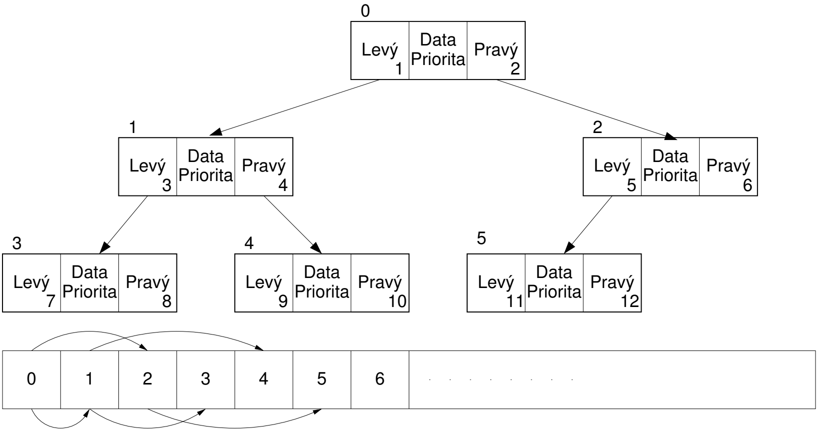
- Prvky ukládáme do haldy a při každém vložení / odebrání zajišťujeme, aby platily vlastnosti **haldy**
- Operace **peek()** má konstantní složitost a nezáleží na počtu prvků ve frontě, nejnižší prvek je vždy kořen

  Asymptotická složitost v notaci velké O je $O(1)$.
- Operace **push()** a **pop()** udržují vlastnost haldy záměnami prvku až do hloubky stromu

  Pro binární plný strom je hloubka stromu $\log_2(n)$, *kde* n *je aktuální počet prvků ve stromu, odtud složitost operace* $O(log(n))$.

Reprezentace binárního stromu polem

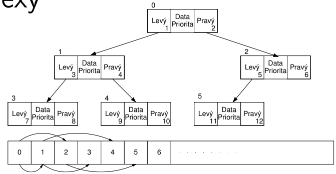
- Binární plný strom můžeme reprezentovat lineární strukturou
- V případě známého maximální počtu prvků v haldě, pak jednoduše předalokovaným polem položek



Halda jako binární plný strom reprezentovaný polem

- Pro definovaný maximální počet prvků v haldě, si předalokujeme pole o daném počtu prvků
- Binární **plný strom** má všechny vrcholy na úrovni rovné hloubce stromu co nejvíce vlevo
- Kořen stromu je první prvek s indexem 0, následníky prvku na pozici i lze v poli určit jako prvky s indexy
  - levý následník: $i_{levý} = 2i + 1$
  - pravý následník: $i_{pravý} = 2i + 2$

  Podobně lze odvodit vztah pro předchůdce



- Kořen stromu reprezentuje nejprioritnější prvek

(např. s nejmenší hodnotu nebo maximální prioritou)

Operace vkládání a odebírání prvků

- I v případě reprezentace polem pracují operace vkládání a odebírání identicky
  - Funkce `push()` přidá prvek jako další prvek v poli a následně propaguje prvek směrem nahoru až je splněna vlastnost haldy
  - Při odebrání prvku funkcí `pop()` je poslední prvek v poli umístěn na začátek pole (tj. kořen stromu) a propagován směrem dolů až je splněna vlastnost haldy
- Pouze dochází k vzájemnému zaměňování hodnot na pozicích v poli

  Z indexu prvku v poli vždy můžeme určit jak levého a pravého následníka, tak i předcházející prvek (rodič) ve stromové struktuře.
- Hlavní výhodou reprezentace polem je přístup do předem alokovaného bloku paměti
- Všechny prvky můžeme jednoduše projít v jedné smyčce

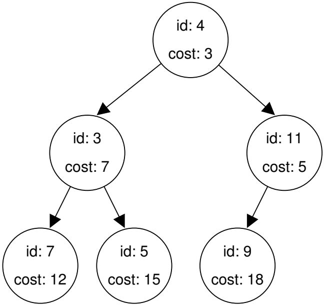
  Relativně jednouše můžeme implementovat funkci ověřující, zdali naše implementace operací `push()` a `pop()` zachovávají podmínky haldy.

Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním pop() odebíráme kořen stromu
- a na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Pro provedeme záměnu s následníky

  V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i + 1$, pravý potomek je na pozici $2i + 2$



id:	4	3	11	7	5	9	.....
cost:	7	7	5	12	15	18	
	0	1	2	3	4	5	6

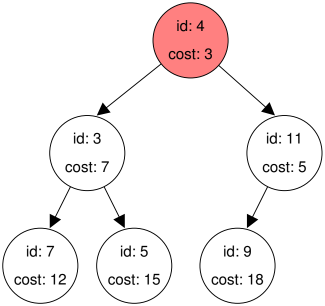
Obdobně postupujeme při push() záměny však provádíme směrem nahoru a z indexu prvku určujeme předchodce (dělením 2)

Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním pop() odebíráme kořen stromu
- a na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Pro provedeme záměnu s následníky

  V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

  Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i+1$, pravý potomek je na pozici $2i+2$



id:	4	3	11	7	5	9	.....
cost:	3	7	5	12	15	18	
	0	1	2	3	4	5	6

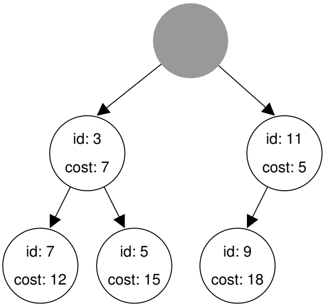
Obdobně postupujeme při push() záměny však provádíme směrem nahoru a z indexu prvku určujeme předchodce (dělením 2)

Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním pop() odebíráme kořen stromu
- a na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Pro provedeme záměnu s následníky

  V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

  Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i + 1$, pravý potomek je na pozici $2i + 2$



	0	1	2	3	4	5	6
id:		3	11	7	5	9	.....
cost:		7	5	12	15	18	

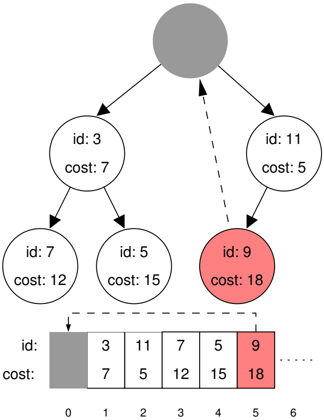
Obdobně postupujeme při push() záměny však provádíme směrem nahoru a z indexu prvku určujeme předchodce (dělením 2)

Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním pop() odebíráme kořen stromu
- a na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Pro provedeme záměnu s následníky

  V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

  Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i+1$, pravý potomek je na pozici $2i+2$

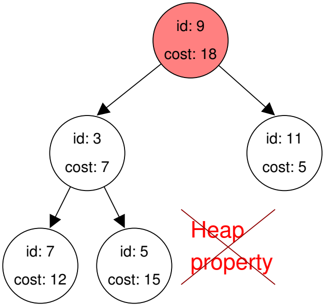


Obdobně postupujeme při push() záměny však provádíme směrem nahoru a z indexu prvku určujeme předchodce (dělením 2)

Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním pop() odebíráme kořen stromu
- a na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Pro provedeme záměnu s následníky

  V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu



id:	9	3	11	7	5	–	.....
cost:	18	7	5	12	15	–	
	0	1	2	3	4	5	6

Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i + 1$, pravý potomek je na pozici $2i + 2$

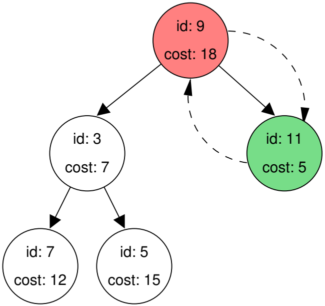
Obdobně postupujeme při push() záměny však provádíme směrem nahoru a z indexu prvku určujeme předchodce (dělením 2)

Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu
- a na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Pro provedeme záměnu s následníky

  V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

  Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i + 1$, pravý potomek je na pozici $2i + 2$



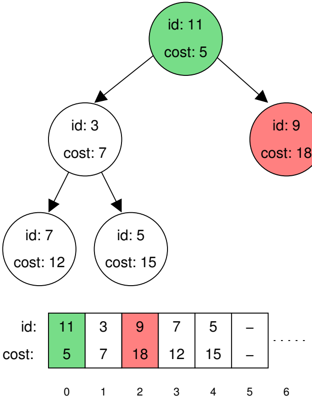
	0	1	2	3	4	5	6
id:	9	3	11	7	5	–	.....
cost:	18	7	5	12	15	–	

Obdobně postupujeme při `push()` záměny však provádíme směrem nahoru a z indexu prvku určujeme předchodce (dělením 2)

Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním pop() odebíráme kořen stromu
- a na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Pro provedeme záměnu s následníky

  V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu



Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i + 1$, pravý potomek je na pozici $2i + 2$

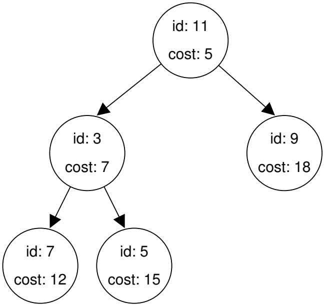
Obdobně postupujeme při push() záměny však provádíme směrem nahoru a z indexu prvku určujeme předchodce (dělením 2)

Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem
- Nejmenší prvek je kořenem stromu
- Voláním pop() odebíráme kořen stromu
- a na jeho místo umístíme poslední prvek
- Strom však nesplňuje podmínku haldy
- Pro provedeme záměnu s následníky

  V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.
- A strom opět splňuje vlastnost haldy
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu

Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i+1$, pravý potomek je na pozici $2i+2$



id:	11	3	9	7	5	–	.....
cost:	5	7	18	12	15	–	
	0	1	2	3	4	5	6

Obdobně postupujeme při push() záměny však provádíme směrem nahoru a z indexu prvku určujeme předchodce (dělením 2)

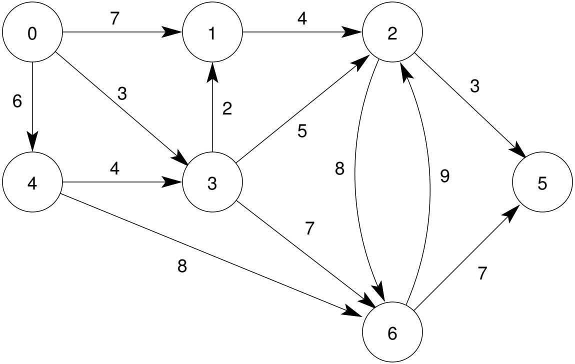
Část II

Část 2 – Příklad využití prioritní fronty v úloze hledání nejkratší cesty v grafu

Obsah

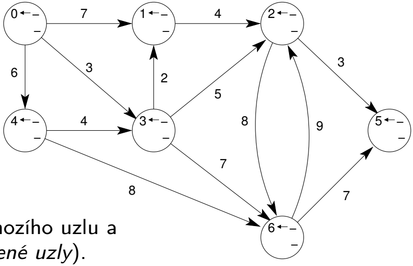
Hledání nejkratší cesty v grafu

- Uzly grafu mohou reprezentovat jednotlivá místa
- Hrany pak reprezentují cestu jak se mezi místy pohybovat
- Ohodnocení (cena) hrany pak může například odpovídat náročnosti pohybu mezi dvě sousedními uzly
- Cílem je nalézt nejkratší cestu z nějakého konkrétního uzlu (0) do všech ostatních uzlů



Dijkstrův algoritmus

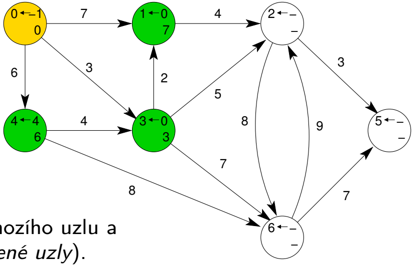
- Nechť graf má pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel
  - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu
  - dále udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů
  - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme ceny následníků
  - Následně vybereme takový uzel
    - Již do něj existuje nějaká cesta z výchozího uzlu
    - Má aktuálně nejnižší ohodnocení
  - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
    - Tj. uzel do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
    - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).



Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Tzn. nemůže existovat kratší cesta.

Dijkstrův algoritmus

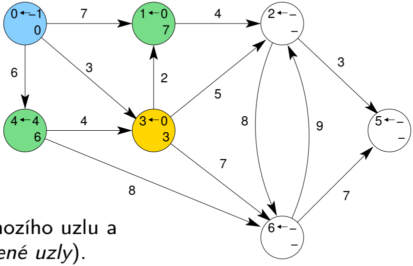
- Nechť graf má pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel
  - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu
  - dále udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů
  - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme ceny následníků
  - Následně vybereme takový uzel
    - Již do něj existuje nějaká cesta z výchozího uzlu
    - Má aktuálně nejnižší ohodnocení
  - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
    - Tj. uzel do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
    - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).



Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Tzn. nemůže existovat kratší cesta.

Dijkstrův algoritmus

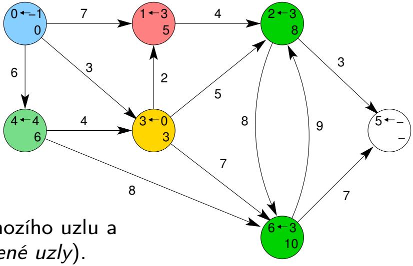
- Nechť graf má pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel
  - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu
  - dále udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů
  - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme ceny následníků
  - Následně vybereme takový uzel
    - Již do něj existuje nějaká cesta z výchozího uzlu
    - Má aktuálně nejnižší ohodnocení
  - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
    - Tj. uzel do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
    - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).



Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Tzn. nemůže existovat kratší cesta.

Dijkstrův algoritmus

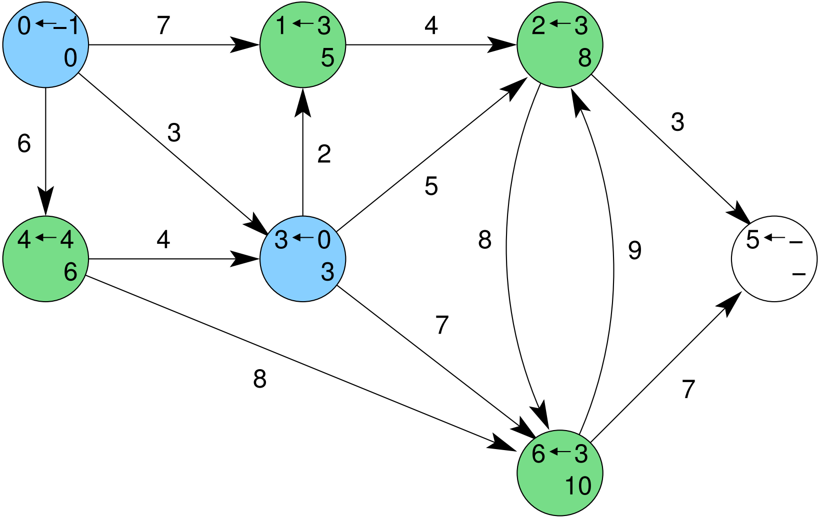
- Nechť graf má pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel
  - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu
  - dále udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů
  - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme ceny následníků
  - Následně vybereme takový uzel
    - Již do něj existuje nějaká cesta z výchozího uzlu
    - Má aktuálně nejnižší ohodnocení
  - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
    - Tj. uzel do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
    - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).



Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Tzn. nemůže existovat kratší cesta.

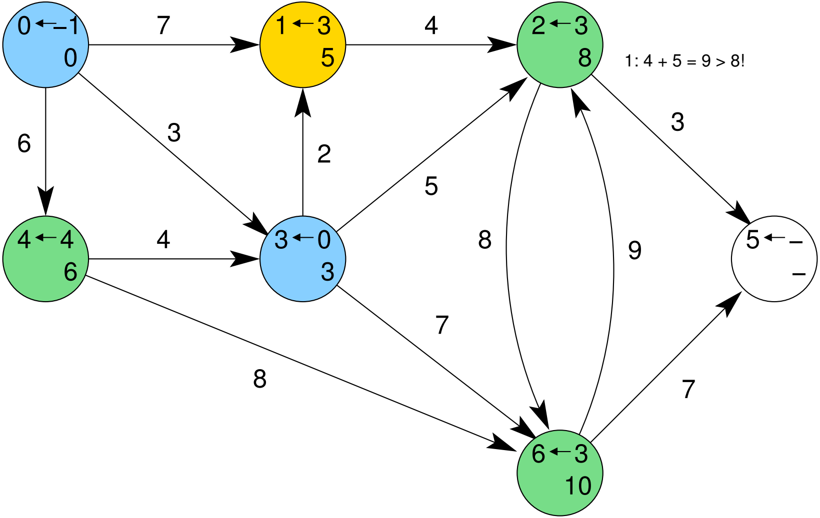
Příklad postupu řešení (pokračování)

1: Po 2. expanzi má uzel 3 již nejkratší cestu



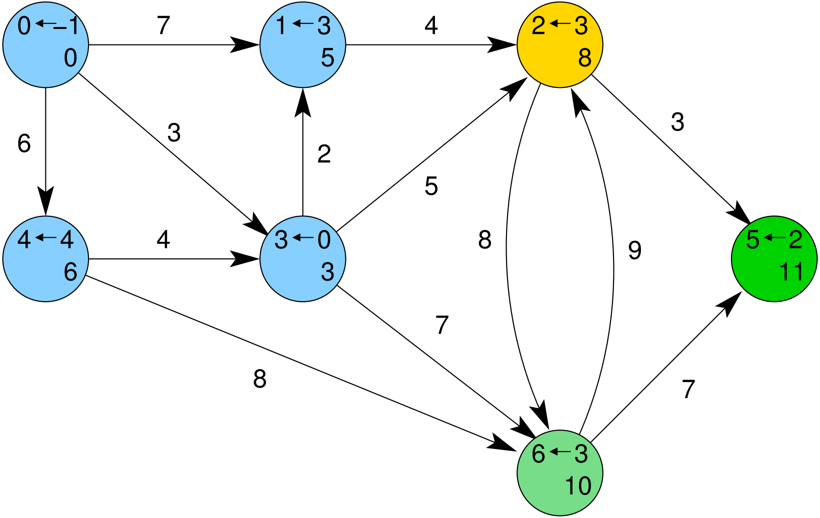
Příklad postupu řešení (pokračování)

2: Expanze uzlu 1 nevede na kratší cestu do uzlu 2



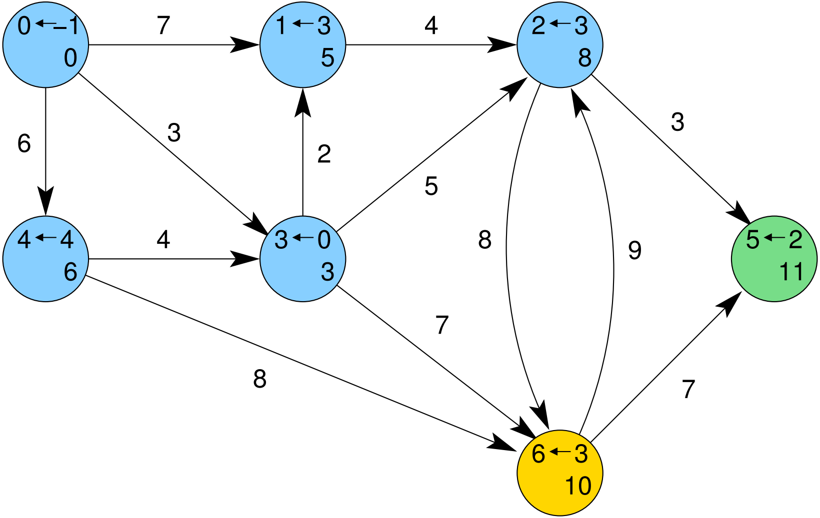
Příklad postupu řešení (pokračování)

3: Expanzí uzlu 2 získáme cestu též do uzlu 5



Příklad postupu řešení (pokračování)

4: Dalšími expanzemi již cesty nezlepšujeme



Obsah

Příklad přístupu řešení úlohy hledání nejkratších cest v grafu

Řešení úlohy se skládá z

- **Vstupních dat** (grafu) – paměťová reprezentace a načtení hodnot

  Formát vstupního souboru

  - Vstupní graf je zadán jako seznam hran

    `from to cost` – Viz 9. přednáška

  - Dalším vstupem je výchozí uzel

    Pro jednoduchost budeme uvažovat 1. uzel (0)

- **Výstupních dat** (nejkratší cesty) – paměťová reprezentace a uložení (výpis)

  Formát výstupního souboru

  - Všechny nejkratší cesty vypíšeme jako seznam vrcholů s cenou (délkou) nejkratší cesty a bezprostředním předchůdcem (indexem) uzlu na nejkratší cestě

    `label cost parent`

- **Algoritmu** hledání cest – Dijkstrův algoritmus
  - Algoritmus je relativně přímočarý v každém kroku expandujeme uzel s aktuálně nejkratší cestou z výchozího uzlu

    V každém kroku potřebujeme nejmenší prvek – použijeme prioritní frontu

Vstupní graf, reprezentace grafu a řešení

- Graf je zadán jako seznam hran v souboru, který můžeme načíst funkcí `load_graph_simple()` z `lec09/load_simple.c`
  - Graf je seznam hran

```
typedef struct {
   int from;
   int to;
   int cost;
} edge_t;
```

```
typedef struct {
   edge_t *edges;
   int num_edges;
   int capacity;
} graph_t;
```

lec09/graph.h

```
0 5 74
1 6 56
2 8 11
2 9 27
2 4 31
2 3 41
2 1 26
3 5 24
3 9 12
4 9 13
...
```

  - Navíc využijeme toho, že jsou hrany uspořádané
    - Hrany vycházející z uzlu určíme jako
    - index první hrany a počet hran

```
typedef struct {
   int edge_start;
   int num_edges;
   int parent;
   int cost;
} node_t;
```

- Pro vlastní řešení potřebujeme u každého uzlu uložit cenu nejkratší cesty (`cost`) a předcházející uzel na nejkratší cestě `parent`

Datová reprezentace

- Řešení implementujeme v modulu `dijkstra`
- Všechny potřebné datové struktury implementujeme jako strukturu `dijkstra_t`

```
typedef struct {
   graph_t *graph;
   node_t *nodes;
   int num_nodes;
   int start_node;
} dijkstra_t;
```

- Pro alokaci použijeme `malloc()`, `allocate_graph()` a inicializujeme položky struktury na výchozí hodnoty

```
dijkstra_t *dij = (dijkstra_t*)malloc(sizeof(dijkstra_t));
dij->nodes = NULL;
dij->num_nodes = 0;
dij->start_node = -1;
dij->graph = allocate_graph();
```

Načtení grafu a inicializace uzlů 1/2

- Hrany načteme např. funkcí `load_graph_simple()`

  Pro jednoduchost také předpokládáme bezchybné načtení

- Dále potřebujeme zjistit počet vrcholů

  Lze implementovat přímo do načítání

- Alokujeme paměť pro uzly a nastavíme (bezpečné) výchozí hodnoty

```
load_graph_simple(filename, dij->graph);
int m = -1;
for (int i = 0; i < dij->graph->num_edges; ++i) {
   const edge_t *const e = &(dij->graph->edges[i]);
   m = m < e->from ? e->from : m;
   m = m < e->to ? e->to : m;
} // smyčka pro určení maximálního počtu vrcholů

dij->num_nodes = m + 1; //m je index a začína od 0 proto +1
dij->nodes = (node_t*)malloc(sizeof(node_t) * dij->num_nodes);
for (int i = 0; i < dij->num_nodes; ++i) {
   dij->nodes[i].edge_start = -1;
   dij->nodes[i].num_edges = 0;
   dij->nodes[i].parent = -1;  // pokud neexistuje indikujeme -1
   // pro cenu volíme -1 ve výpise bude kratší než MAX_INT
   dij->nodes[i].cost = -1;
} // nastavení výchozích hodnot uzlů
```

Inicializace uzlů 2/2

- Nastavíme indexy hran jednotlivým uzlům

```
for (int i = 0; i < dij->graph->num_edges; ++i) {
   int cur = dij->graph->edges[i].from;
   if (dij->nodes[cur].edge_start == -1) { // first edge
      // mark the first edge in the array of edges
      dij->nodes[cur].edge_start = i;
   }
   dij->nodes[cur].num_edges += 1; // increase no.  of edges
}
```

Hledání nejkratších cest

- Využijeme implementaci prioritní fronty s push() a update()

```
dij->nodes[dij->start_node].cost = 0; // inicializace
void *pq = pq_alloc(dij->num_nodes); // prioritní fronta
int cur_label;
pq_push(pq, dij->start_node, 0);
while ( !pq_is_empty(pq) && pq_pop(pq, &cur_label)) {
   node_t *cur = &(dij->nodes[cur_label]); // pro snažší použití
   for (int i = 0; i < cur->num_edges; ++i) { // všechny hrany z uzlu
      edge_t *edge = &(dij->graph->edges[cur->edge_start + i]);
      node_t *child = &(dij->nodes[edge->to]);
      const int cost = cur->cost + edge->cost;
      if (child->parent == -1) {
         child->cost = cost;
         child->parent = cur_label;
         pq_push(pq, edge->to, cost);
      } else if (cost <= child->cost) { // uzel již v pq, proto
         child->cost = cost; // testujeme cost
         child->parent = cur_label; // a případně aktualizujeme
         pq_update(pq, edge->to, cost); // odkaz (parent) a pq
      }
   } // smyčka přes všechny hrany z uzlu cur_label
} // prioritní fronta je prázdná
pq_free(pq); // uvolníme paměť
```

lec11/dijkstra.c

Zápis řešení

- Zápis řešení do soubou můžeme implementovat jednoduchým výpisem do souboru

```
_Bool dijkstra_save_path(void *dijkstra, const char *
    filename)
{
   _Bool ret = false;
   const dijkstra_t *const dij = (dijkstra_t*)dijkstra;
   if (dij) {
      FILE *f = fopen(filename, "w");
      if (f) {
         for (int i = 0; i <dij->num_nodes; ++i) {
            const node_t *const node = &(dij->nodes[i]);
            fprintf(f, "%i %i %i\n",
                  i, node->cost, node->parent);
         } // end all nodes
         ret = fclose(f) == 0;
      }
   }
   return ret;
}
```

lec11/dijkstra.c

Příklad použití

- Základní implementace uvedeného hledání cest je dostupná v `lec11/graph_search`
- Vytvoříme graf `g` programem `tdijkstra` např. o max 1000 vrcholech,

```
./tdijkstra -c 1000 g
```

- Program zkompilujeme a spustíme např.

```
./tgraph_search g s
```

- Programem `tdijkstra` můžeme vygenerovat referenční řešení např.

```
./tdijkstra g s.ref
```

- a naše řešení pak můžeme porovnat např.

```
diff s s.ref
```

Obsah

Prioritní fronta s `push()` a `update()`

- Při expanzi uzlu, můžeme do prioritní fronty vkládat uzly s cenou pro každou hranu vycházející z uzlu
- Obecně může být hran výrazně více než počet uzlů

  Pro plný graf o n uzlech až n^2 hran
- Proto pro prioritní frontu (haldu) implementujeme funkci `update()` a tím zaručíme, že ve frontě bude nejvýše tolik prvků, kolik je vrcholů
- Můžeme tak snadno implementovat prioritní frontu haldou reprezentovanou v poli

  Získáme tak složitost operací $O(logn)$
- Pro efektivní implementaci funkce `update()` však potřebujeme získat pozici daného uzlu v haldě
  - V případě hledání nejkratších cest, se délka cestu do uzlu může pouze snižovat
  - Proto se aktualizovaných „uzel" může v haldě pohybovat pouze směrem nahoru

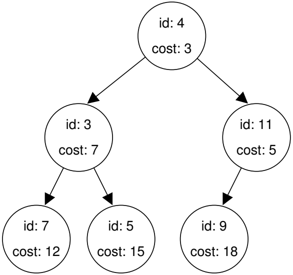
    Jedná se tak o identický postup jako při přidání nového prvku funkcí `push()`. V tomto případě však prvek může startovat z prostředka stromu.

Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

  Zavoláme `update(id=7, cost=5)`
- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.
- Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



	0	1	2	3	4	5	6
id:	4	3	11	7	5	9	.....
cost:	7	7	5	12	15	18	

heapIDX

0	–1
1	–1
2	–1
3	1
4	0
5	4
6	–1
7	3
8	–1
9	5
10	–1
11	2
12	–1
⋮	

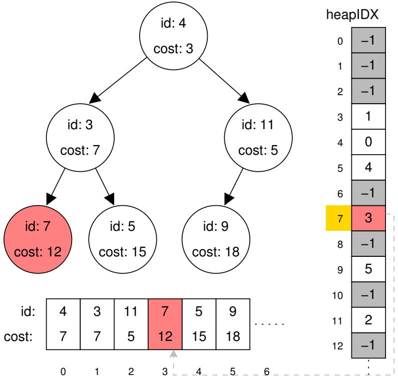
Princip totožný, jen kromě samotné haldy ještě manipulujeme s dalším strukturu—polem is indexy `heapIDX`

Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

  Zavoláme `update(id=7, cost=5)`
- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.
- Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



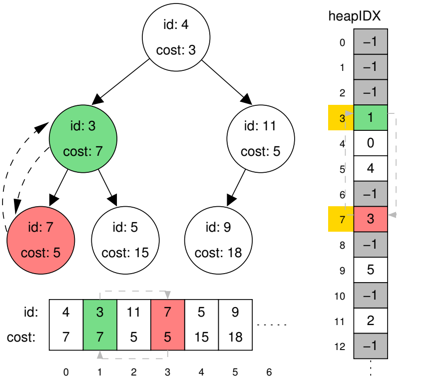
Princip totožný, jen kromě samotné haldy ještě manipulujeme s dalším strukturu—polem is indexy `heapIDX`

Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

  Zavoláme `update(id=7, cost=5)`
- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.
- Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



Princip totožný, jen kromě samotné haldy ještě manipulujeme s dalším strukturu—polem is indexy `heapIDX`

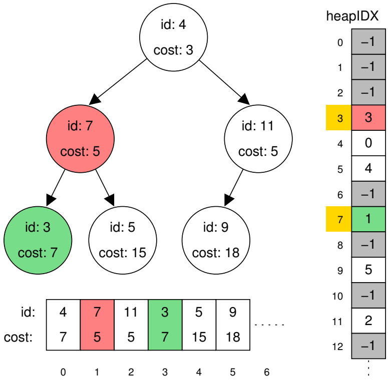
Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

  Zavoláme `update(id=7, cost=5)`

- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.
- Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



Princip totožný, jen kromě samotné haldy ještě manipulujeme s dalším strukturu—polem is indexy `heapIDX`

Obsah

Prioritní fronta pro Dijsktrův algoritmus

- Součástí balíku lec11/graph_search je rozhraní pq_heap.h pro implementaci prioritní fronty haldou s funkcí update()

```
void *pq_alloc(int size);

void pq_free(void *heap);

_Bool pq_is_empty(const void *heap);

_Bool pq_push(void *heap, int label, int cost);

_Bool pq_update(void *heap, int label, int cost);

_Bool pq_pop(void *heap, int *oLabel);
```

lec11/pq_heap.h

- Jedná o relativně obecný předpis, který neklade zvláštní požadavky na vnitřní strukturu

  V balíku je rozhraní implementované v modulu pq_array-linear, který obsahuje implementaci prioritní fronty s lineární složitostí

- Poslední domácí úkol HW10 je zaměřen na implementaci rozhraní pq_heap.h haldou, která bude mít složitost odpovidající $O(logn)$.

Lineární prioritní fronta vs efektivní implementace

- Ukázková implemetace v lec11/graph_search, je sice funkční, pro velké grafy je však výpočet pomalý
  - Například pro graf s 1 mil. vrcholů trvá načtení, nalezení všech nejkratší cest a uložení výsledku přibližně 120 sekund

Intel Skylake@3.3GHz

```
./tdijkstra -c 1000000 g
/usr/bin/time ./tgraph_search g s
Load graph from g
Find all shortest paths from the node 0
Save solution to s
Free allocated memory
      120.53 real       115.92 user         0.07 sys
```

  - Referenčnímu programu tdijkstra pouze cca 1 sekundu

Též k dispozici jako tdijkstra.Linux *a* tdijkstra.exe

```
/usr/bin/time ./tdijkstra g s.ref
        1.03 real         0.94 user         0.07 sys
```

  - Oba programy vracejí identické výsledky

```
md5sum s s.ref
MD5 (s) = 8cc5ec1c65c92ca38a8dadf83f56e08b
MD5 (s.ref) = 8cc5ec1c65c92ca38a8dadf83f56e08b
```

Základní verze řešení HW10 nesmí být více než 10× pomalejší než referenční program.

Další možnosti urychlení programu

- Kromě efektivní implemetace prioritní fronty haldou, která je zásadní, lze běh program dále urychlit efektivnějším načítáním grafu a ukládáním do řešení do souboru.

```
./tgraph_search-time g s 2>/
    dev/null
Load time ....1008ms
Solve time ...118808ms
Save time ....311ms
Total time ...120127ms
```

```
./tdijkstra -v g s.ref
Dijkstra version 2.3.3
Load time ....223ms
        Init time ....7ms
        Find time ....707ms
Solve time ...715ms
Save time ....106ms
Total time ...1044ms
```

lec11/graph_search-time.c

- Soutěž v rychlostí programu – prvních 20 nejrychlejších programů si rozdělí v součtu 50 extra bodů

Část III

Část 3 – Zadání 10. domácího úkolu (HW10)

Zadání 10. domácího úkolu HW10

-
- Termín odevzdání: 07.01.2017, 23:59:59 PST

PST – Pacific Standard Time

Shrnutí přednášky

Diskutovaná témata

- Prioritní fronta
  - Příklad implementace spojovým seznamem
    `lec11/priority_queue-linked_list`
  - Příklad implementace polem
    `lec11/priority_queue-array`
- Halda - definice, vlastnosti a základní operace
- Reprezentace binárního plného stromu polem
- Prioritní fronta s haldou
- Hledání nejkratší cesty v grafu – využití prioritní fronty (resp. haldy)

- Příště: Systémy pro správu verzí.

Diskutovaná témata

- Prioritní fronta
  - Příklad implementace spojovým seznamem

    `lec11/priority_queue-linked_list`
  - Příklad implementace polem

    `lec11/priority_queue-array`
- Halda - definice, vlastnosti a základní operace
- Reprezentace binárního plného stromu polem
- Prioritní fronta s haldou
- Hledání nejkratší cesty v grafu – využití prioritní fronty (resp. haldy)

- Příště: Systémy pro správu verzí.