

Příklady pro týden 1 (k řešení mezi 5.10. – 19.10., matematika, nevyžaduje programování)

Prostudujte si kapitolu č. 1 z [1].

Věnujte pozornost fyzikálnímu významu gradientu ∇f , divergence $\nabla \cdot \mathbf{F}$ a rotace $\nabla \times \mathbf{F}$, viz kapitola č. 1.2 v [1]. Pozn.: V anglické literatuře se operace rotace někdy uvádí jako „curl“.

Věnujte pozornost zápisu vektorových diferenciálních operací pomocí ∇ (nazývaného „del“ či „nabla“) operátoru.

Prostudujte si matematické identity uvedené v dokumentu “Mathematical identities.pdf” na webových stránkách předmětu. Uvědomte si, že identity typu (16), (17), (22) platí univerzálně bez ohledu na použitou souřadnou soustavu.

Příklad 1 (2 body)

Výhradně s použitím identit (16) a (22) z dokumentu “Mathematical identities.pdf” ukažte, že platí

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_0}{R^n} \right) = \frac{2-n}{R^{n+1}}; \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \quad (1)$$

a

$$\nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{R} \right) = 0; \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \quad (2)$$

V žádném místě odvození nepoužívejte skutečné souřadnice, vše vyřešte pouze nad rádius vektory.

Pozn.: Operátor $\nabla \cdot \nabla ()$, slovně divergence gradientu, je ve fyzice natolik používaný, že má i vlastní symbol ∇^2 nebo Δ a říká se mu Laplaceův operátor nebo Laplacián.

Pozn.: Matematické identity (1) a (2) mají v elektromagnetismu enormní význam. Vztah (1) pro $n = 2$ vede na Gaussovu větu elektrostatiky. Vztah (2) vede na řešení Laplaceovy rovnice v elektrostatice.

Příklad 2 (1 bod)

Vysvětlete geometricky, proč (1) vede na nulovou divergenci pro $n = 2$.

Nápověda: Představte si, že vektorové pole $\frac{\mathbf{R}_0}{R^n}$ představuje rychlost vody vyvěrající z počátku souřadné soustavy $\mathbf{r}' = 0$. Nakreslete si, jak pole vypadá. Uvažte, kolik vody proteče koulí o poloměru R (střed v počátku) za jednotku času. Pro $n = 2$ má průtok vody speciální závislost na R .

Pozn.: Stejně jako rychlostní pole vody uvedené výše se chová i elektrické pole v okolí bodového náboje v počátku.

Pozn. Povšimněte si, že divergence vektorového pole určuje míru zředování či zhušťování siločar.

[1] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Prentice Hall, 3rd ed., 1999