**Příklady č. 3** (k řešení mezi 21.3. – 4.4., vyzařování, vyžaduje programování)

**Příklad 1 (3 body)**
Představte si dva velmi tenké a nekonečně dlouhé proudovodiče rovnoběžné s osou $x$ a ležící v rovině $x$-$y$. Nechť jimi generovaná proudová hustota má tvar

$$\boldsymbol{J}\left(x,y,z,\omega\right)=\mathbf{x}_0 I_0\left(\omega\right)\left[\delta\left(y-\frac{d}{2}\right)+\delta\left(y+\frac{d}{2}\right)\right]\delta\left(z\right).$$

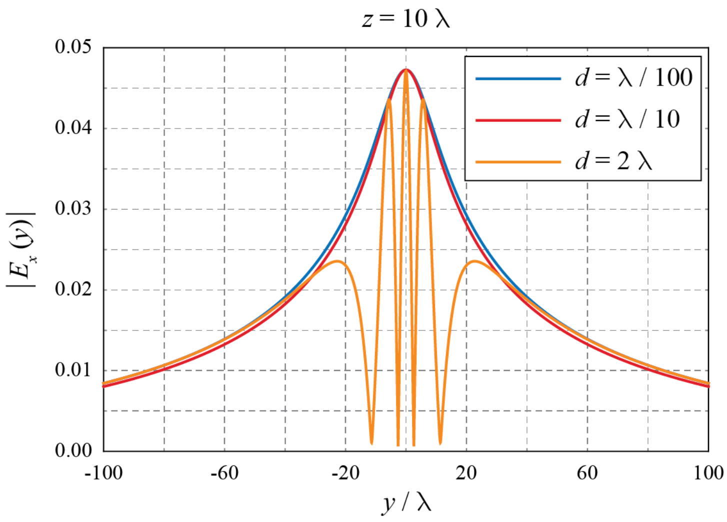
Určete obecný vztah pro elektrické pole v poloprostoru $z>0$ generované tímto proudem. Pro výpočet použijte rozklad pole do rovinných vln. Za předpokladu harmonického časového průběhu a normalizace $I_0\left(\omega\right)=-1/\left(\omega\mu\right)$ vykreslete absolutní hodnotu elektrického pole v řezu $z=10\lambda$. Vykreslení proveďte pro $d=2\lambda,\ \lambda/10,\ \lambda/100$. Pro numerické výpočty nevyužívejte pozn. 2, procvičte si numerickou implementaci Fourierovy transformace pomocí FFT algoritmu.

Představte si, že byste výsledné pole z Obr. 1 měřili (samozřejmě jak amplitudu, tak fázi) a snažili se použít vztahy z přednáškového slidu č. 41 opačně, tedy k rekonstrukci proudové hustoty (k rekonstrukci tvaru zdroje). Jednalo by se o jakousi mikroskopii. Obrázek 1 ukazuje, že pro $d<\lambda$, se vám rekonstrukce nepodaří. Vysvětlete proč. Vysvětlete dále, co bych měl udělat, abych zrekonstruoval (abych „viděl“) i zdroje s $d<\lambda$.

*Výsledek*:

$$\boldsymbol{E}\left(x,y,z>0,\omega\right)=-\omega\mu\mathbf{x}_0 I_0\left(\omega\right)\mathcal{F}_{k_y}^{-1}\left\{\cos\left(k_y\frac{d}{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}}{k_z}\right\}$$

$$k_z=\sqrt{k^2-k_y^2}$$




Obr. 1 Absolutní hodnota elektrického pole v řezu $z=10\lambda$.

*Pozn.* 1. Při provádění zpětné Fourierovy transformace je třeba dát pozor na člen $1/k_z$. Tuto singularitu, lze snadno odstranit fyzikálním předpokladem, že okolní prostředí je alespoň málo ztrátové, tedy, že vlnové číslo $k$ je komplexní (pozor na znaménka imaginárních částí $k,k_z$). Použití $k\rightarrow k\left(1-\mathrm{j}10^{-3}\right)$ pro naše účely postačí.

*Pozn*. 2. Lze dokázat následující identitu

$$H_0^{(2)}\left(k\sqrt{y^2+z^2}\right) = 2\mathcal{F}_{k_y}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z|z|}}{k_z}\right\},$$

kde $H_0^{(2)}\left(\xi\right)$ je Hankelova funkce nultého řádu a druhého druhu (https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function). To znamená, že elektrické pole námi popisovaného systému lze také popsat jako

$$\boldsymbol{E}\left(x,y,z,\omega\right) = -\frac{\omega\mu_0\mathbf{x}_0 I_0\left(\omega\right)}{4}\left[H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{\left(y-\frac{d}{2}\right)^2+z^2}\right)+H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{\left(y+\frac{d}{2}\right)^2+z^2}\right)\right].$$

Použitím superpozice můžeme dokonce obecně říci, že proudová hustota $\boldsymbol{J}\left(x,y,z,\omega\right) = \mathbf{x}_0 K_0\left(y,\omega\right)\delta\left(z\right)$ generuje elektrické pole $\boldsymbol{E}\left(x,y,z,\omega\right) = -\frac{\omega\mu_0}{4}\mathbf{x}_0\int\limits_{y'} K_0\left(y',\omega\right)H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{\left(y-y'\right)^2+z^2}\right)dy'$. Tyto vztahy můžete použít pro ověření správnosti výpočtu pomocí FFT.