

DCGI

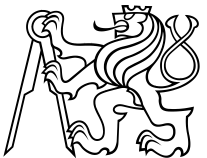
KATEDRA POČÍTAČOVÉ GRAFIKY A INTERAKCE

Úvod do 3D geometrie

Jiří Bittner

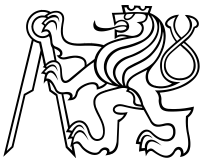
Obsah přednášky

- Vektory, sčítání a násobení vektorů
- Rotace, translace a jiné transformace
- Transformace v homogenních souřadnicích
- Skládání transformací
- Pohledové a projekční transformace
- Reprezentace 3D objektů



Matematický popis 3D dat

- Model “světa” v počítači
- Potřebný pro
 - Zobrazení scény
 - Animace
 - Výpočet kolizí
 - Simulace
 - Plánování akcí
 - ...
- Pozice vrcholů, ploch, objemů, ...
 - Atributy (barva, rychlost, hustota, ...)



Vektory

- Vektor: uspořádaná n-tice
 - Prvek vektorového prostoru
- Vektorový prostor \mathbb{R}^2 \mathbb{R}^3 \mathbb{R}^4
 - prostory uspořádaných dvojic/trojic/čtveřic reálných čísel
- Značení \vec{a} , \mathbf{a} Příklady:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



\mathbb{R}^3

\mathbb{R}^4



Axiomy vektorového prostoru

Komutativita

$$a + b = b + a$$

Asociativita

$$a + (b + c) = a + b + c$$

Distributivita

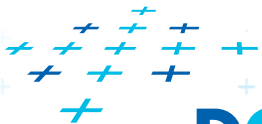
$$k(a + b) = ka + kb$$

Nulový prvek

$$a + \mathbf{0} = a$$

Inverzní prvek

$$a + (-a) = \mathbf{0}$$



Lineární nezávislost vektorů

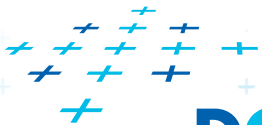
- Lineární kombinace vektorů:

$$x = \sum_i k_i a_i$$

- Lineární nezávislost:

$$a_j \neq \sum_i l_i a_i$$

- **Dimenze prostoru** je maximální počet lineárně nezávislých vektorů



Skalární součin

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i$$

- Skalární součin definuje metriku prostoru

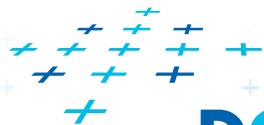
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$$

- Též definuje úhel mezi vektory:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \alpha$$

- *Ortogonální* vektory $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

- *Ortonormální* vektory $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$



Báze

- *Báze* prostoru - n lineárně nezávislých vektorů
- Ostatní vektory vyjádříme jejich lineární kombinací
- Kanonická neboli normální báze v \mathbb{R}^n

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0 \dots 0)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0 \dots 0)$$

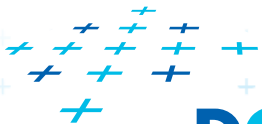
$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0 \dots 1)$$

Platí:

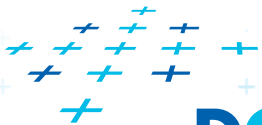
$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

tj. součin bázevého vektoru se sebou samým je 1, a se všemi ostatními je 0



Transformace

- Body reprezentovány vektory
- Použití transformací
 - modelování, zobrazování, animace
- Druhy transformací
 - Identita
 - Translace
 - Rotace
 - Změna měřítka
 - Shear (zkosení)
 - Perspektiva



Vyjádření transformace

- Obecná transformace

$$\mathbf{a}' = f(\mathbf{a})$$

- Lineární transformace

$$a'_i = \sum c_{ij} a_j$$

$$\mathbf{a}' = M\mathbf{a}$$

Homogenní souřadnice

- Přejchod z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^4
- Nutné pro posunutí a projekci !
- Zavedeme čtvrtou souřadnici w

$$\mathbf{a} = (x, y, z, w)$$

- Přejchod z homogenních souřadnic:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, 1 \right)$$

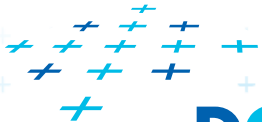


Transformace – maticové vyjádření

- ve 2D – matice 3x3, ve 3D – matice 4x4

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{transformační} \\ \textit{matice} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{transformační} \\ \textit{matice} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Skládání transformací

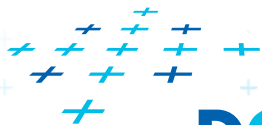
- Násobení matic!

- Je asociativní

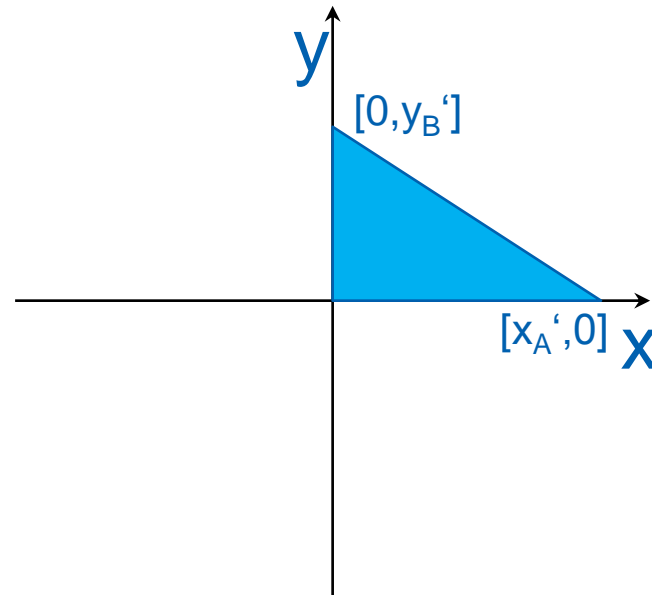
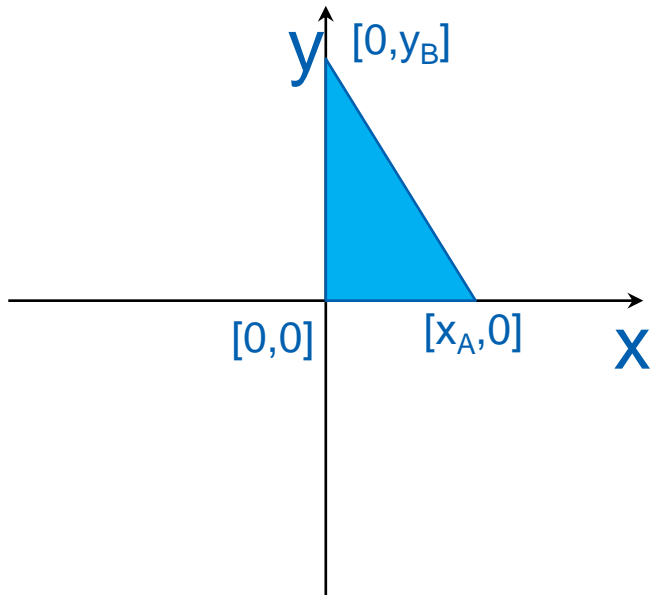
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

- Není komutativní

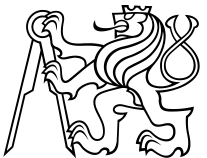
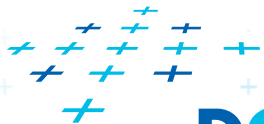
$$A \cdot B \neq B \cdot A$$



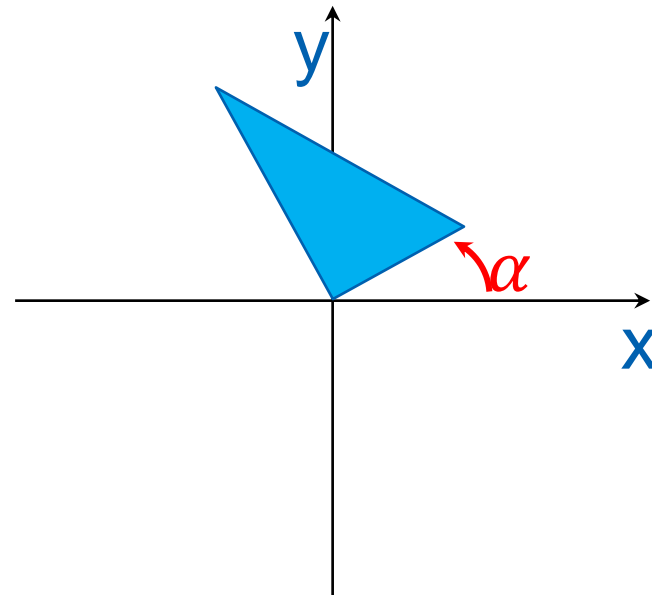
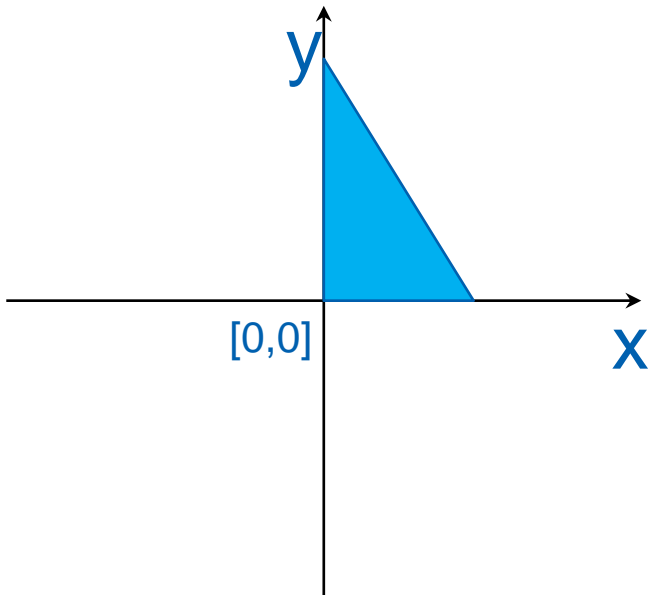
Změna měřítka (scaling)



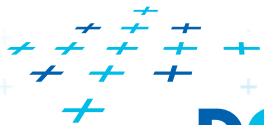
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S & 0 & 0 \\ 0 & y_S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



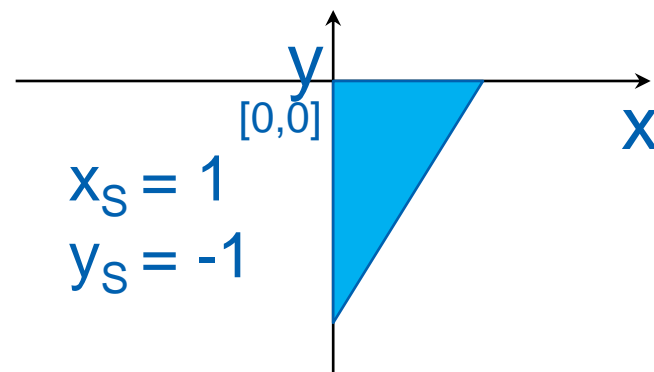
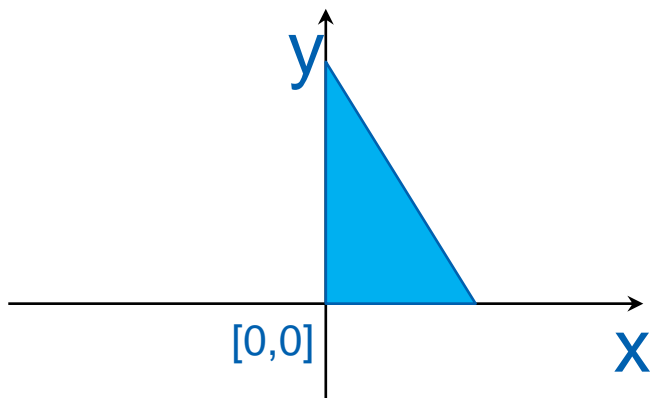
Rotace



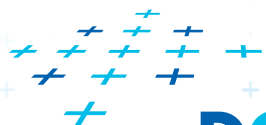
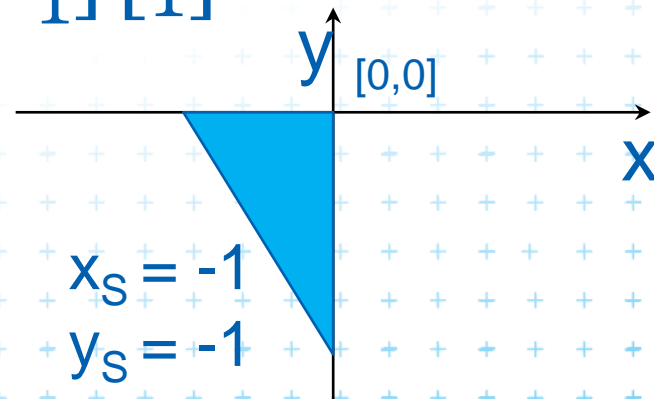
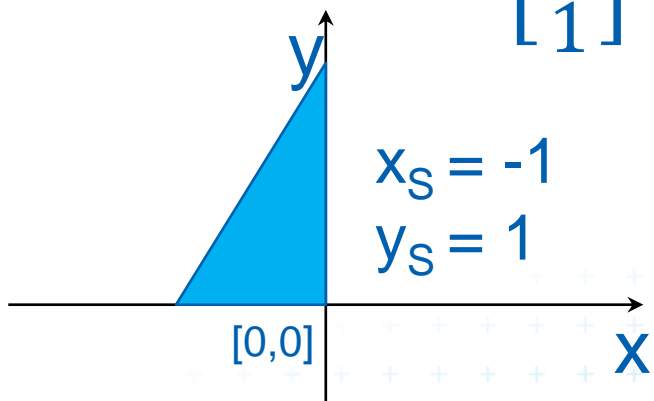
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



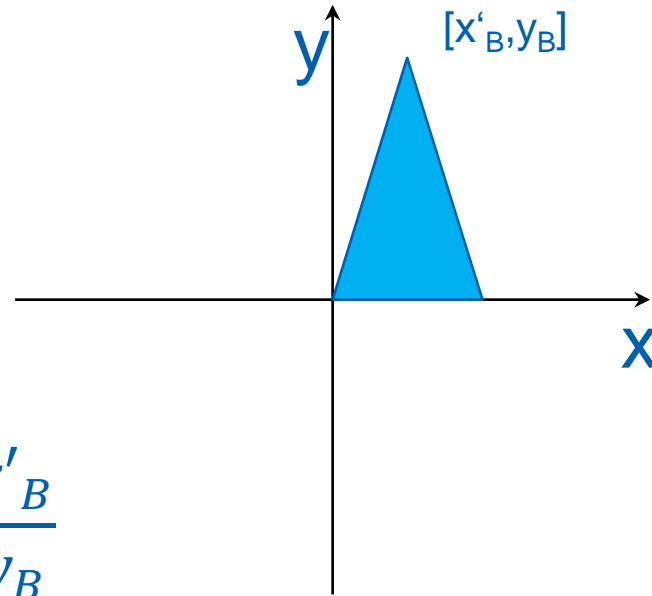
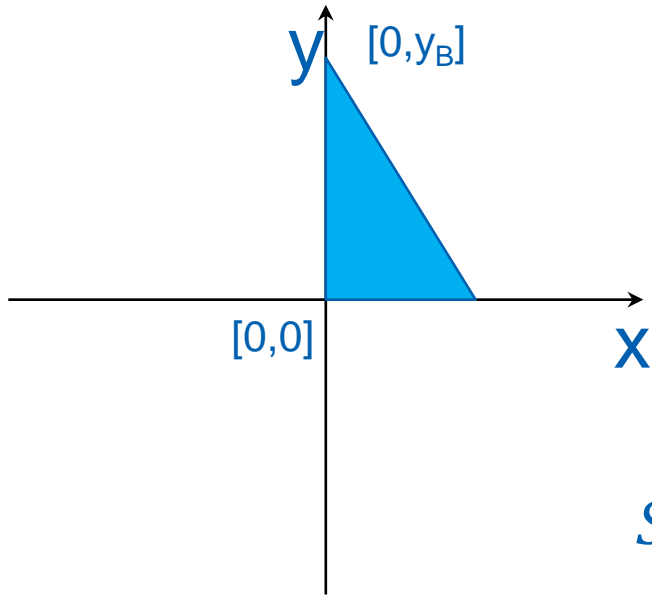
Symetrie



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S & 0 & 0 \\ 0 & y_S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

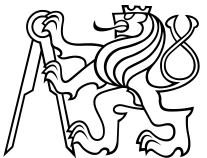
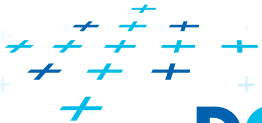


Střih (zkosení)

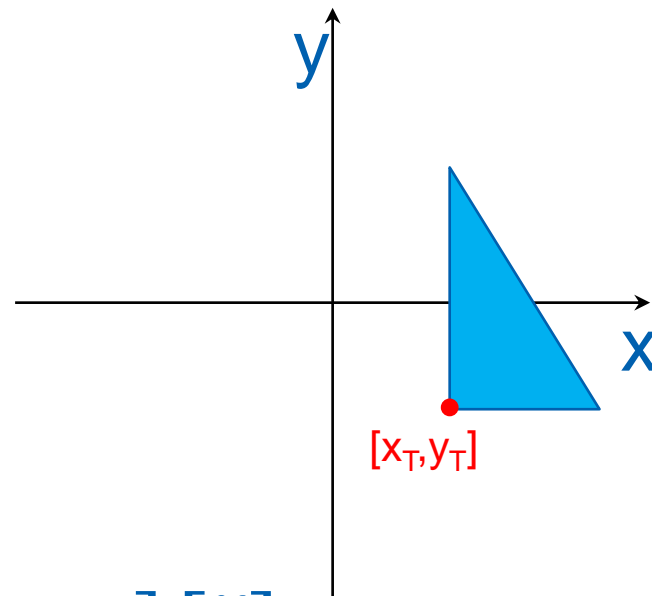
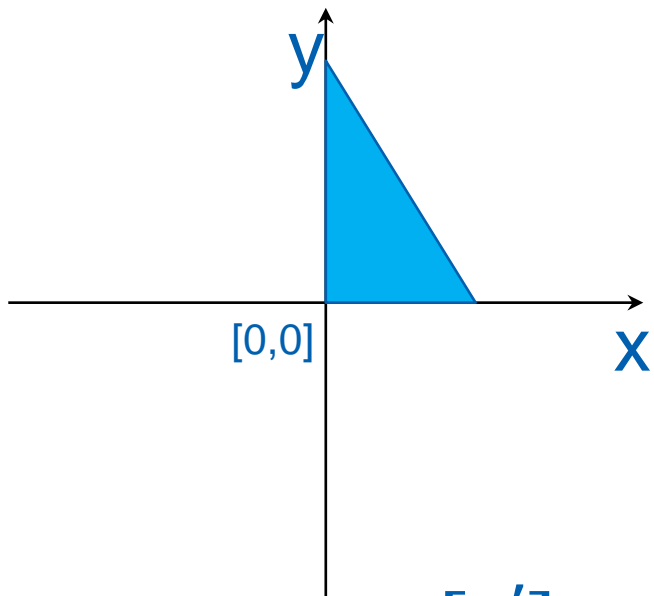


$$SH_x = \frac{x'_B}{y_B}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & SH_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

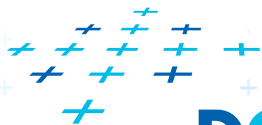


Translace (posunutí)



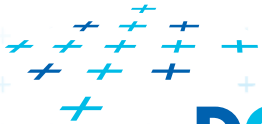
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_T \\ 0 & 1 & y_T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Translace není lineární transformace
- Nelze ji vyjádřit maticí 2x2 (ve 2D) nebo 3x3 (ve 3D)!



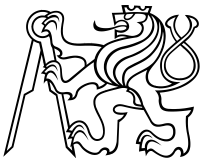
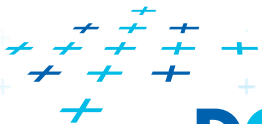
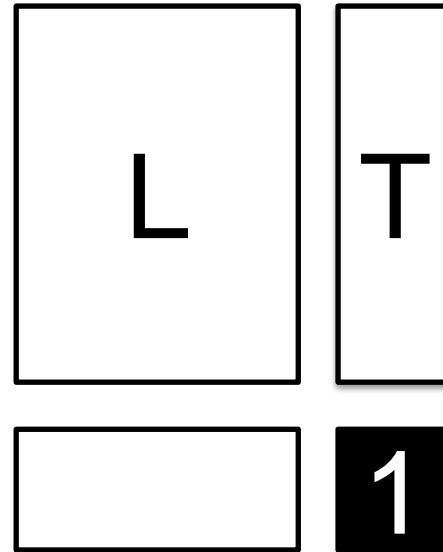
Translace ve 3D

$$\mathbf{a}' = M\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x + t_x \\ a_y + t_y \\ a_z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

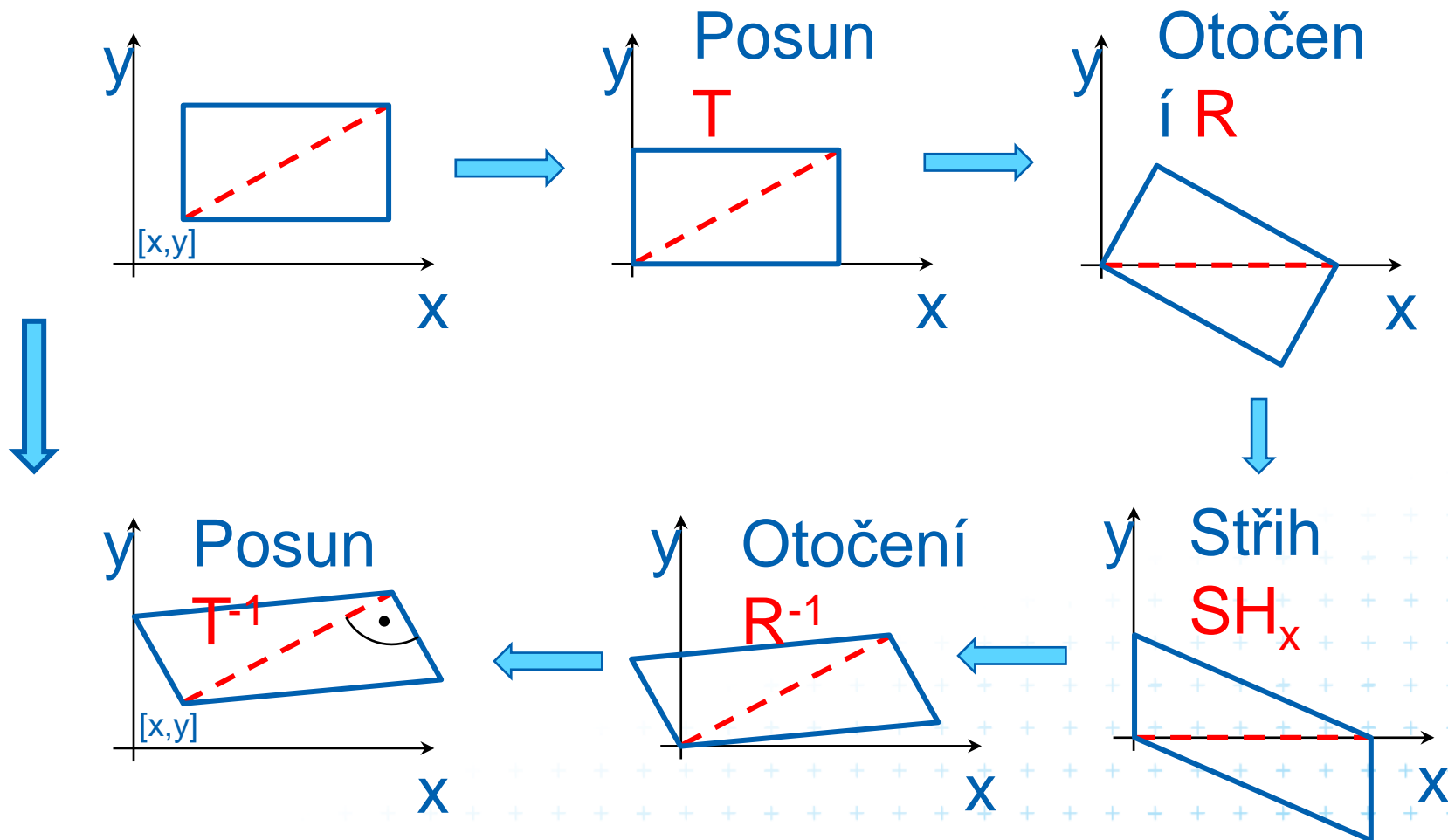


Transformace v homogenních souřadnicích

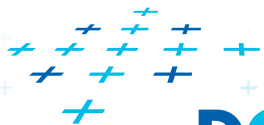
- Transformační matice:
 - L: lineární transformace
 - T: translace
 - 0, 1: pro afinní transf. je tento řádek vždy (0, 0, 0, 1)



Skládání – zkosení podle přímky



$$M = T^{-1} \cdot R^{-1} \cdot SH_x \cdot R \cdot T$$



Transformace – Přehled

Afinní

Lineární

Podobnosti

Rigidní/ Eukleidovské

Posunutí

Identita

Rotace

Zachovává úhly a vzdálenosti

Isotropní
změna měřítka

Zachovává úhly

Anisotropní
Změna měřítka

Zrcadlení

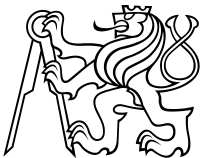
Zkosení

*Zachovává
rovnoběžky*

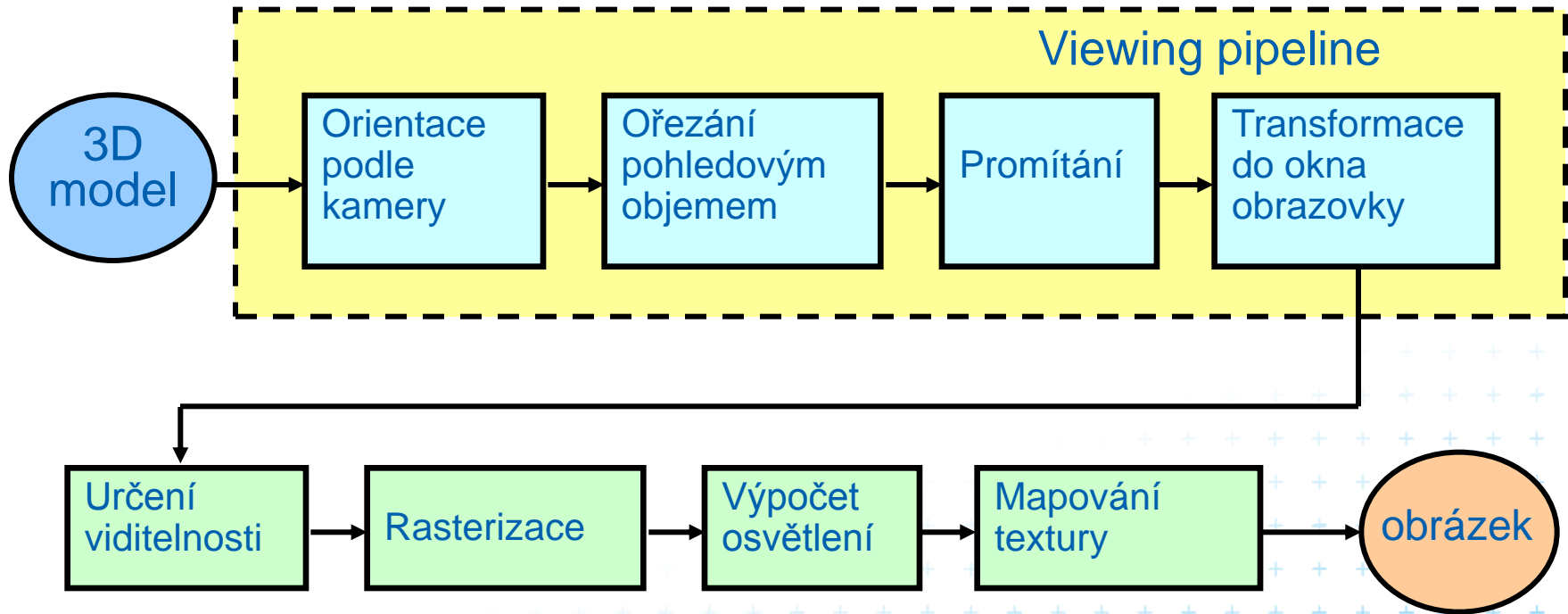


Transformace souřadných systémů

- Object / Modeling coordinates
 - Relativně vůči počátku objektu
- World coordinates
 - Translace a rotace objektu vůči počátku světa
- Camera / Eye coordinates
 - Kamera je vždy v počátku
- Screen / Window coordinates
 - Perspektivní transformace
 - x, y souřadnice + z-buffer

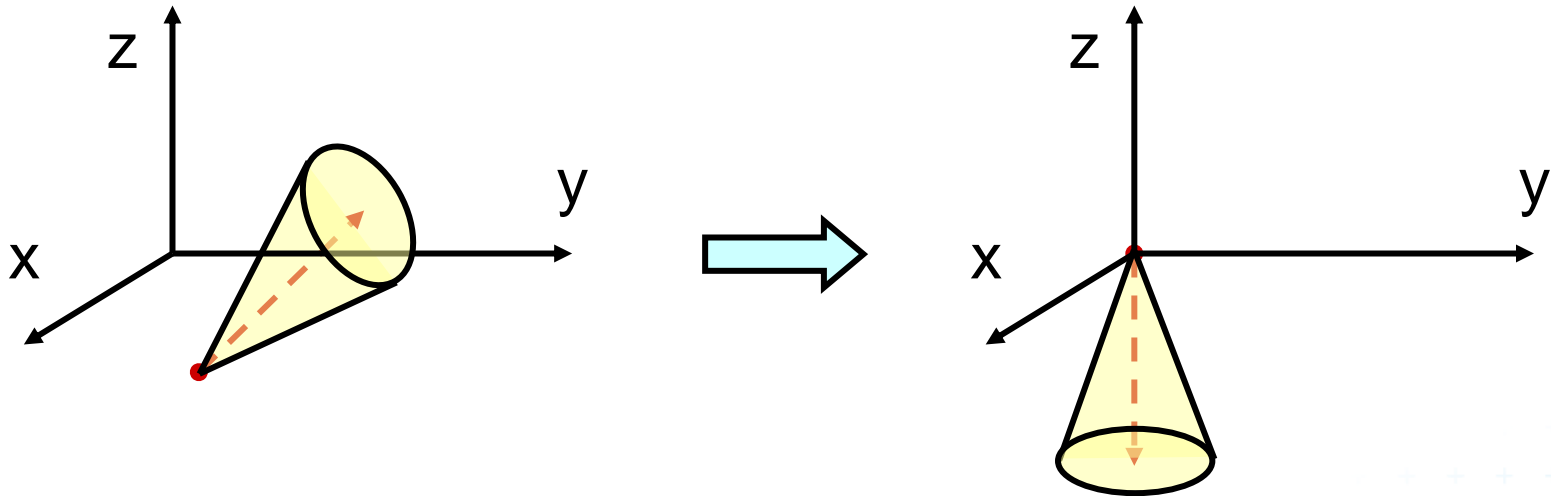


Zobrazovací řetězec – Rendering pipeline

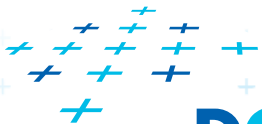


Pohledová transformace - Kamera

- Transformace scény do unifikované polohy

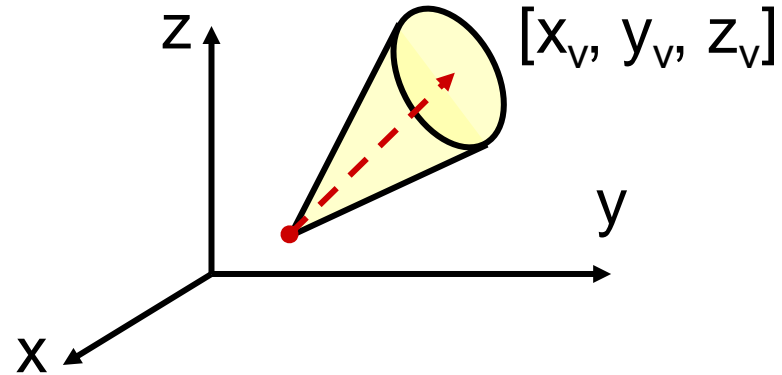


- Střed promítání v $[0,0,0]$... posun
- Směr promítání // s osou z ... otočení
- Průmětna // s rovinou xy
- „Up vector” ... otočení kolem osy z

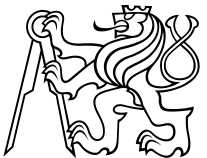
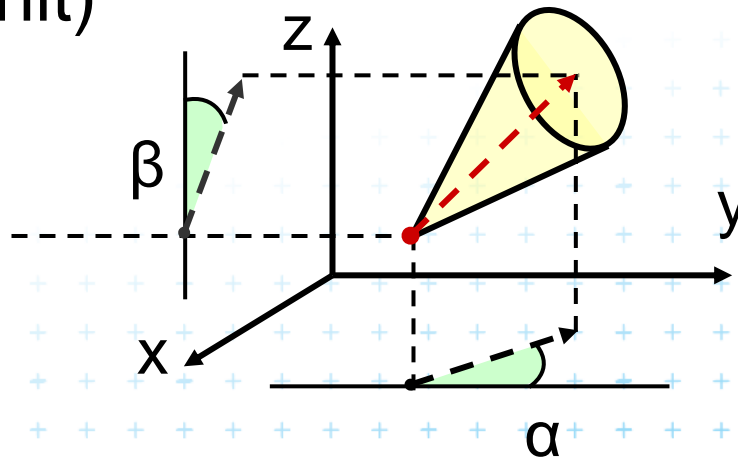


Zadání pohledu

- Bodem a vektorem

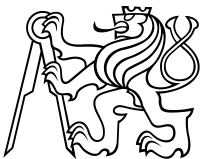
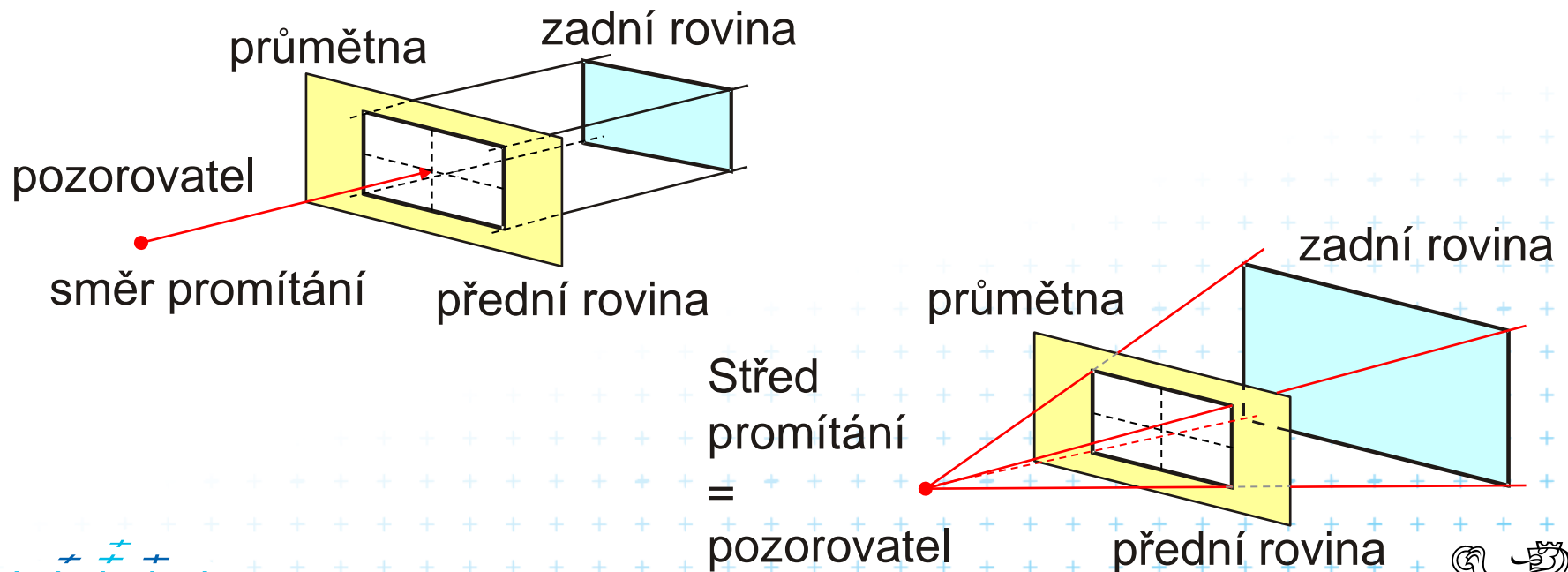


- Bodem a dvěma úhly (α - azimut, β - zenit)



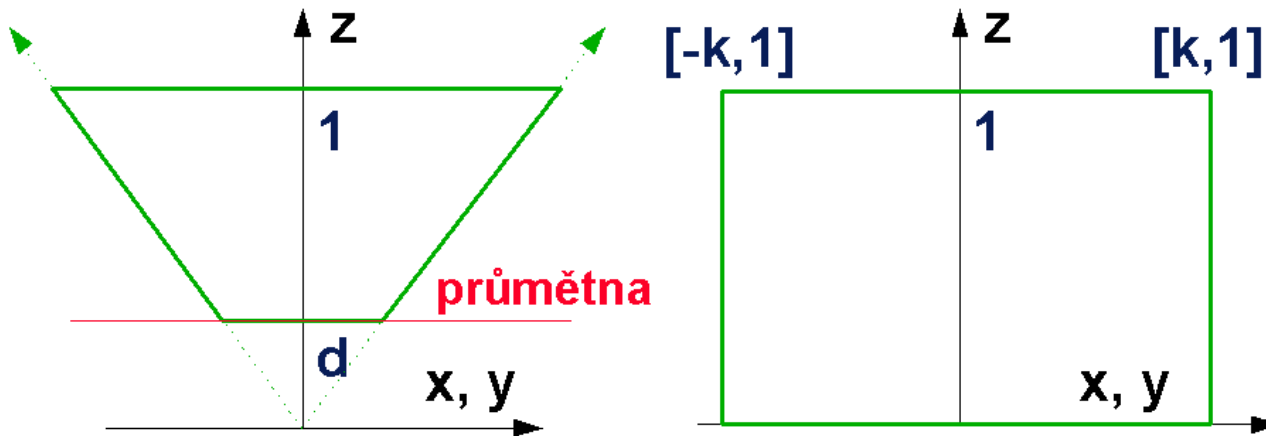
Projekční transformace

- Transformace z prostoru do průmětny
- Záběr - pohledový objem (*viewing volume*)
 - Vymezuje část prostoru, která se promítá na průmětnu



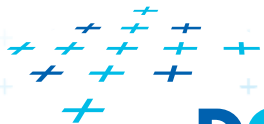
Perspektivní projekce

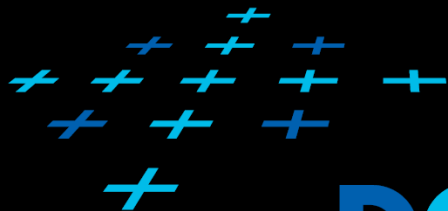
- Nelineární transformace do kvádru (unifikované ořezávání)



$$\begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-d} & \frac{-d}{1-d} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Perspektiva
není afinní
transformace!





DCGI

KATEDRA POČÍTAČOVÉ GRAFIKY A INTERAKCE

Reprezentace 3D objektů

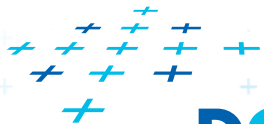
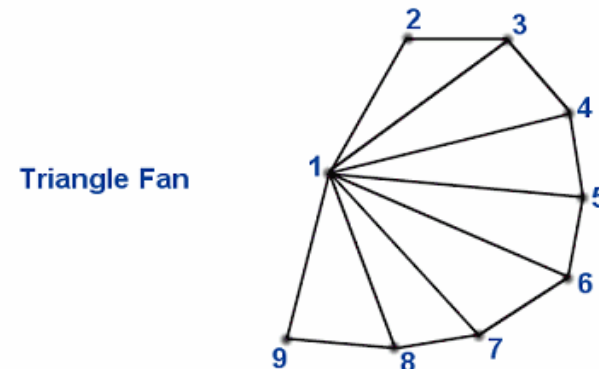
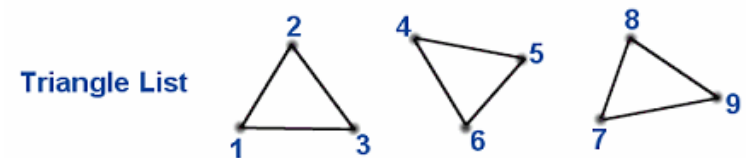
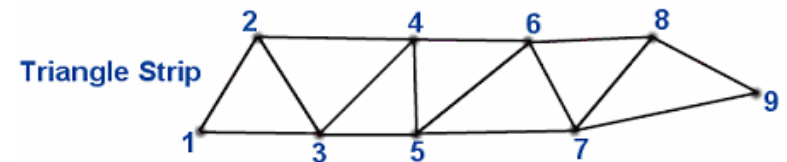
Reprezentace 3D objektů

■ Polygonální síť (mesh)

- Seznam vrcholů
- Seznam stěn (faces)
 - Každá stěna má seznam vrcholů
 - 16 bitový index

■ Efektivní uspořádání

- Triangle strip
- Triangle list
- Triangle fan



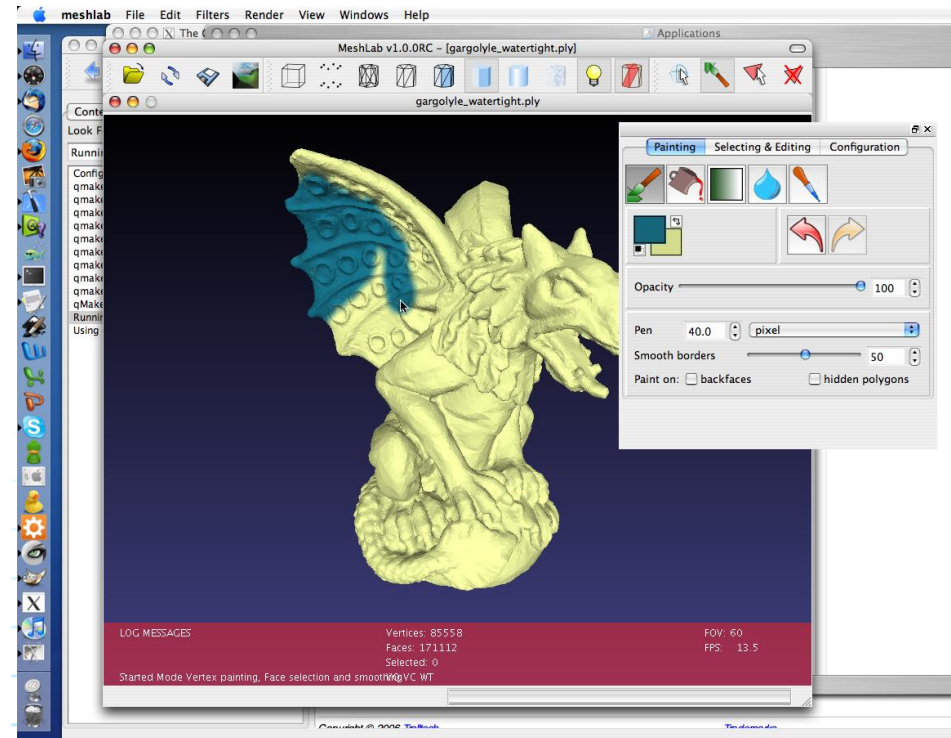
Polygonální síť – pokrač.

■ Informace ve vrcholu

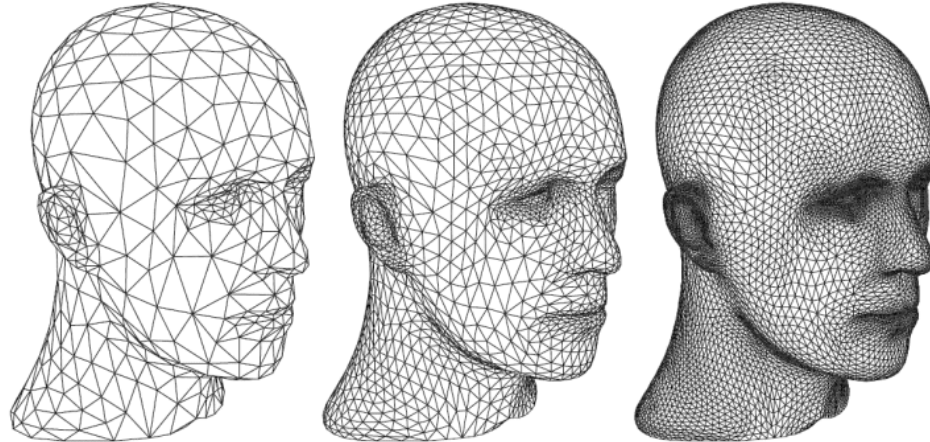
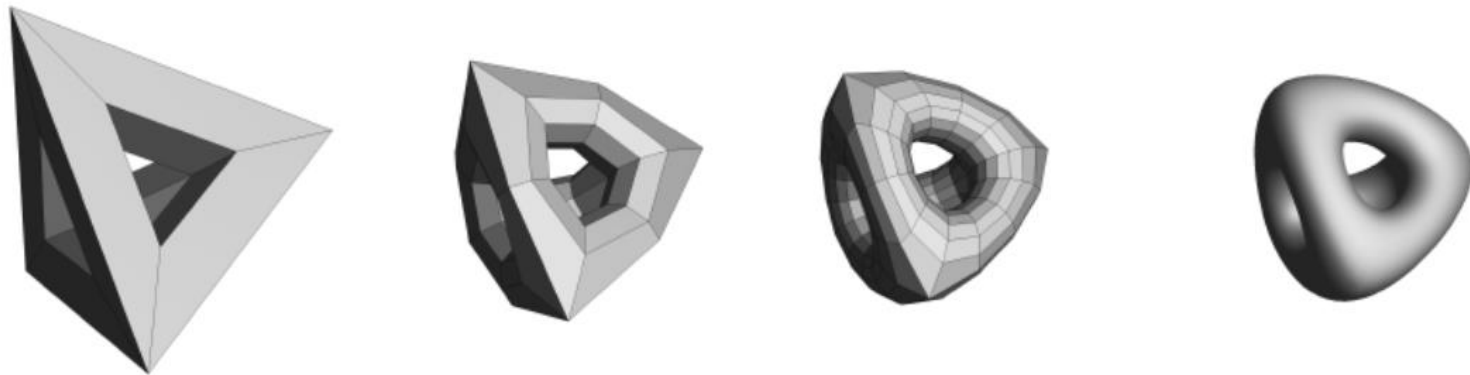
- Poloha
- Normála
- Barva
- Texturovací (uv) souřadnice
- Váhy a indexy kostí
- ...další speciální informace

■ Editace pol. sítí

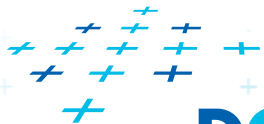
- Např. MeshLab
- <http://meshlab.sourceforge.net>



Subdivision Surfaces



Zorin & Schroeder, SIGGRAPH 99



DCGI

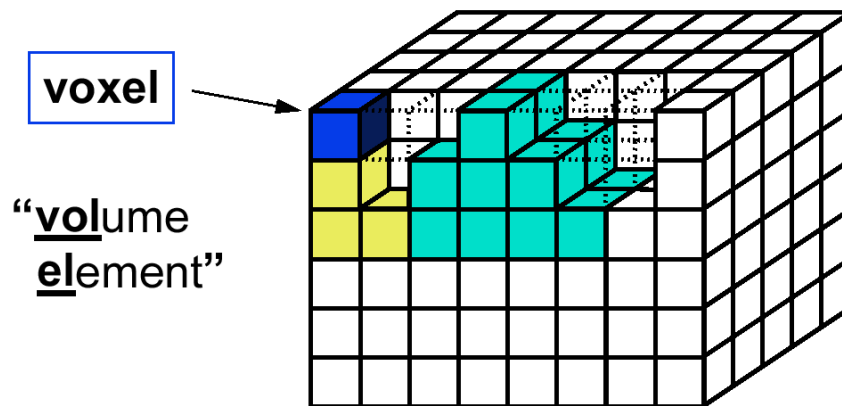


Jiné reprezentace

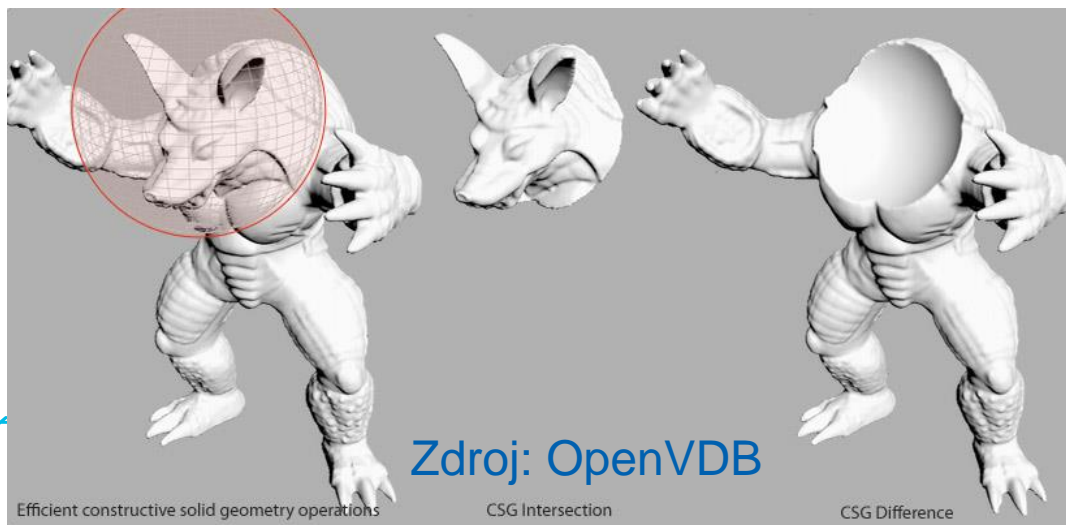
■ Objemová reprezentace



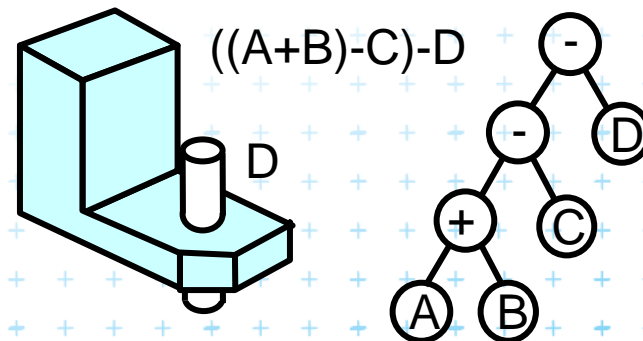
Zdroj: Ikits et al. GPU Gems 2



■ Konstruktivní geometrie těles

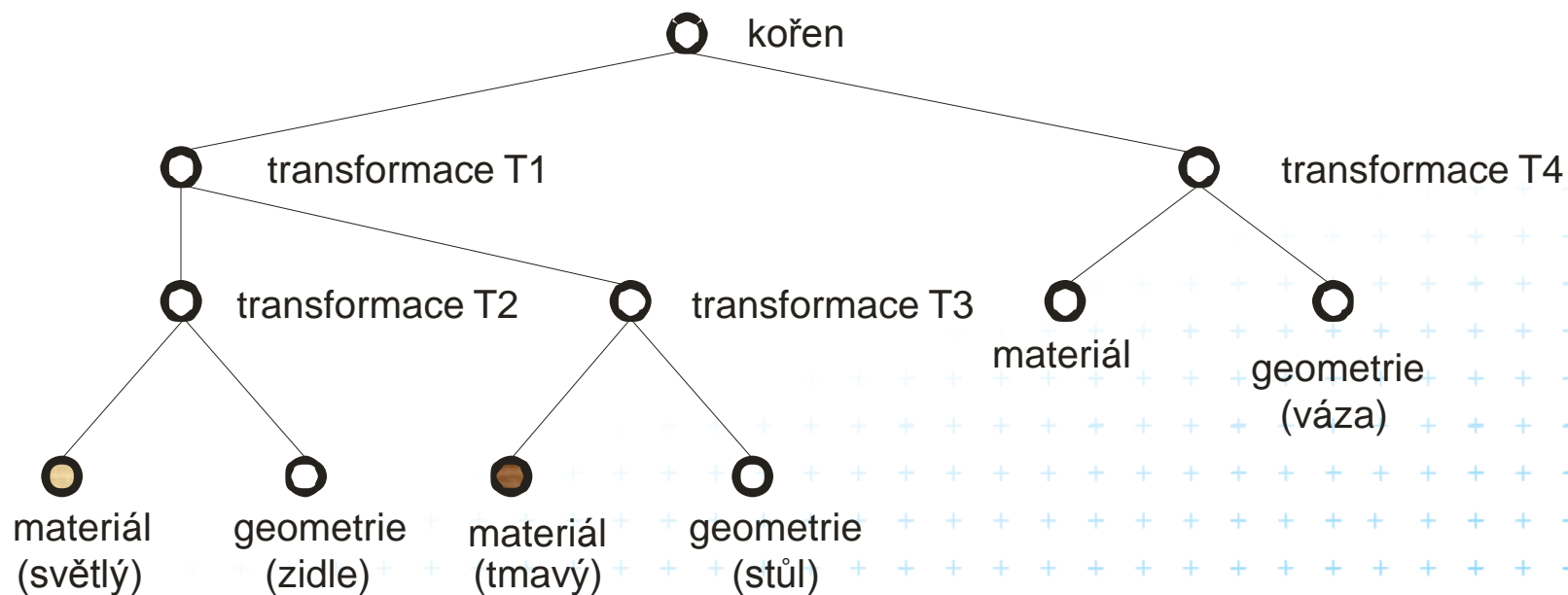


Zdroj: OpenVDB



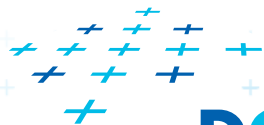
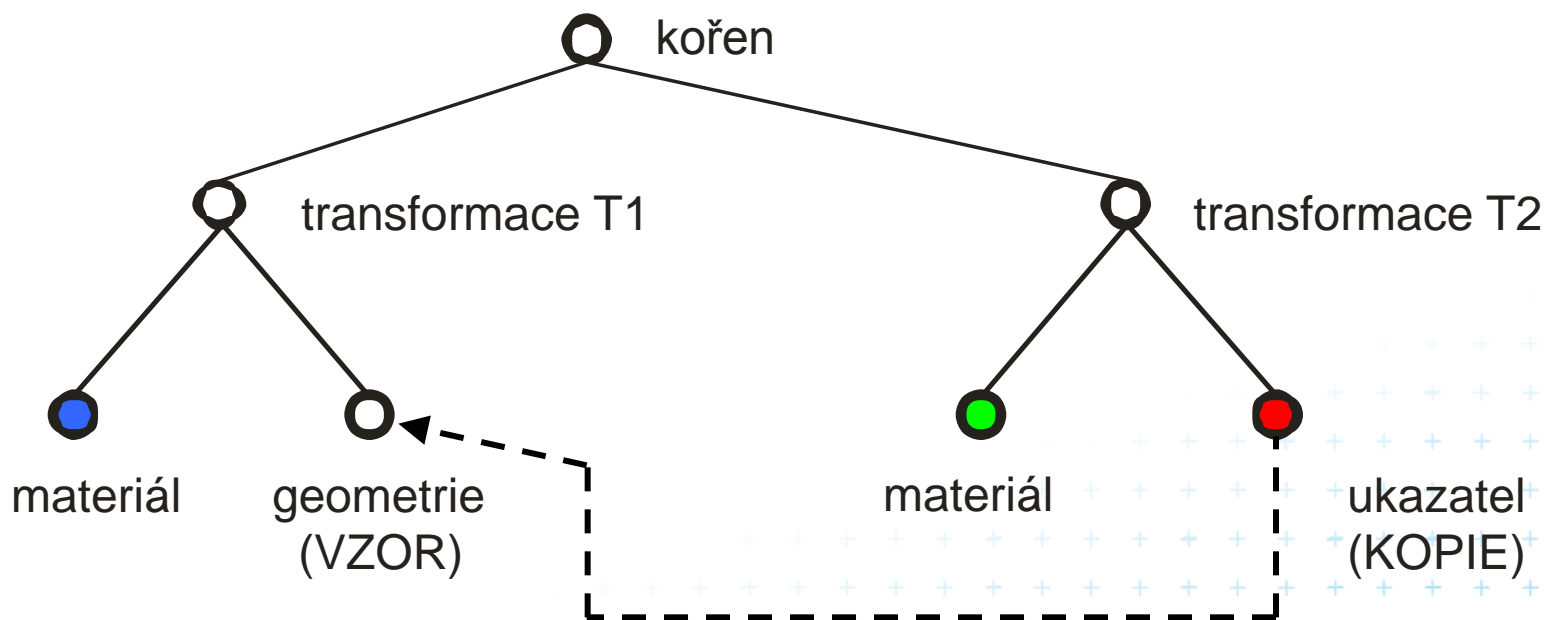
Graf scény

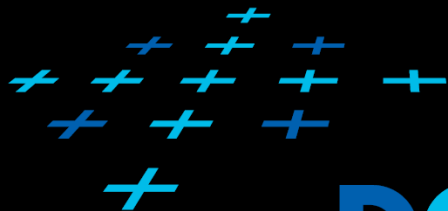
- Skládání transformací
- Logické / prostorové seskupování



Graf scény

- Instancování (vzor a kopie)
- DAG (orientovaný acyklický graf)





DCGI

KATEDRA POČÍTAČOVÉ GRAFIKY A INTERAKCE

Děkuji za pozornost!