

# Vytěžování dat, přednáška 2: Pravděpodobnostní rozdělení

Filip Železný



Evropský sociální fond  
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

*Fakulta elektrotechnická, ČVUT*

Úloha:

- ▶ Vstup: data

$$D = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\}, \vec{x}_i \in X (1 \leq i \leq m), m \in \mathbb{N}$$

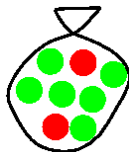
náhodně, navz. nezávisle vybraná z rozdělení  $P_X$  na  $X$

- ▶ Výstup: vzor

$$h \in \mathcal{L}$$

reprezentující odhad  $P_X$ , tj. generativní model dat

2 druhy bonbónů v balíčku



Vybíráme náhodně (poslepu), dostaneme



Jaký je poměr (pravděpodobnost) zelených bonbónů v balíčku?

$$X = \{ \bullet, \bullet \}$$

$P_X$  lze reprezentovat jedním číslem  $\theta$

$$P(\bullet) = \theta, P(\bullet) = 1 - \theta$$

Tedy prostor vzorů je reálný interval

$$\mathcal{L} = [0; 1]$$

Pozn.: ve skutečnosti konečná podmnožina  $[0; 1]$ , neboť reálná čísla se reprezentují konečným počtem číslic.

Data

$$D = \{ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \} \quad (m = 10)$$

Odhad dle relativní četnosti:

$$P(\bullet) = \theta \approx \frac{9}{10}$$

Odůvodnění: četnost konverguje k pravděpodobnosti pro  $m \rightarrow \infty$ .

- ▶ Obecnější metoda odhadu. Používá podmíněnou pravděpodobnost

$$P(D|\theta)$$

tj.: má-li parametr hodnotu  $\theta$ , budeme data  $D$  pozorovat s touto pravděpodobností. Nazývá se **věrohodnost** (likelihood).

- ▶ Parametr odhadneme tak, že věrohodnost maximalizujeme

$$\theta^* = \arg \max_{\theta} P(D|\theta)$$

- ▶ Data  $x_i \in D$  jsou vybírána navzájem nezávisle, tedy:

$$P(D|\theta) = \prod_{i=1}^m P(x_i|\theta)$$

$$D = \{ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \} (m = 10)$$

- ▶ Pro  $\theta = P(\bullet) = 0.6$

$$P(D|\theta) = P(\bullet|0.6)^9 \cdot P(\bullet|0.6)^1 = 0.6^9 \cdot 0.4 \approx 0.004$$

- ▶ Pro  $\theta = P(\bullet) = 0.8$

$$P(D|\theta) = P(\bullet|0.8)^9 \cdot P(\bullet|0.8)^1 = 0.8^9 \cdot 0.2 \approx 0.027$$

- ▶ Tedy  $\theta = 0.8$  je věrohodnější než  $\theta = 0.6$ .

Obecně: jak najít  $\theta$ , které věrohodnost maximalizuje?

Pro snazší výpočet používáme *logaritmus* věrohodnosti

$$L(D|\theta) = \log P(D|\theta)$$

tedy

$$L(D|\theta) = \log \prod_{i=1}^m P(x_i|\theta) = \sum_{i=1}^m \log P(x_i|\theta)$$

V příkladě s bombóny:

$$L(D|\theta) = \log \theta^z + \log(1 - \theta)^c = c \log \theta + z \log(1 - \theta)$$

kde  $c$  a  $z$  je počet červených resp. zelených bombónů v datech



$\theta$  maximalizuje věrohodnost právě tehdy, když maximalizuje její logaritmus.

Hledáme maximum  $L(D|\theta)$ , tedy položíme

$$\frac{d}{d\theta} L(D|\theta) = 0$$

V příkladě s bonbóny:

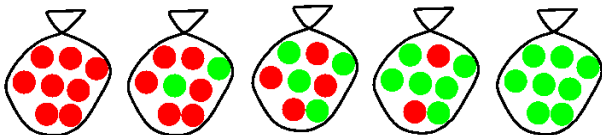
$$\frac{d}{d\theta} (c \log \theta + z \log(1 - \theta)) = \frac{c}{\theta} - \frac{z}{1 - \theta} = 0$$

Řešení:

$$\theta = \frac{c}{c + z} = \frac{c}{m}$$

Tedy stejný výsledek jako u odhadu dle relativní četnosti. Metoda maximální věrohodnosti je ale obecnější - uvidíme dále.

Tentokrát víme, že se vyrábí jen 5 typů balíčků:



1. 100% zelených
2. 75% zelených, 25% červených
3. 50% zelených, 50% červených
4. 25% zelených, 75% červených
5. 100% červených

Každý typ představuje jeden vzor pro generování dat (losování bonbónů), označme je po řadě  $\mathcal{L} = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ .

Odhad dle četností již není použitelný, metoda maximální věrohodnosti je.

$$P(D|h_1) = 1^z + 0^c$$

$$P(D|h_2) = 0.75^z + 0.25^c$$

$$P(D|h_3) = 0.5^z + 0.5^c$$

$$P(D|h_4) = 0.25^z + 0.75^c$$

$$P(D|h_5) = 0^z + 1^c$$

( $z, c \dots$  počet zelených resp. červených bonbónů v datech)

Dostáváme samé zelené:  $D = \{ \bullet \bullet \bullet \dots \}$ , který vzor je nejvěrohodnější?

Marginální rozdělení pravděpodobnosti  $P_{\mathcal{L}}(h_i)$  vzorů může být známo před obdržáním dat.

Např:

1. 100% zelených – 10% výroby
2. 75% zelených, 25% červených – 20% výroby
3. 50% zelených, 50% červených – 40% výroby
4. 25% zelených, 75% červených – 20% výroby
5. 100% červených – 10% výroby

Tedy

$$P_{\mathcal{L}}(h_1) = 0.1, P_{\mathcal{L}}(h_2) = 0.2, P_{\mathcal{L}}(h_3) = 0.4, P_{\mathcal{L}}(h_4) = 0.2, P_{\mathcal{L}}(h_5) = 0.1$$

Tyto pravděpodobnosti se nazývají *apriorní*.

Známe-li rozdělení

▶  $P_{\mathcal{L}}$

▶ a (po obdržení dat)  $P(D|h_i)$  pro každý vzor  $h_i$

můžeme podle Bayesova pravidla spočítat

$$P(h_i|D) = \frac{P(D|h_i)P_{\mathcal{L}}(h_i)}{P(D)}$$

$P(h_i|D)$  je *aposteriorní pravděpodobnost* vzoru  $h_i$  po obdržení dat  $D$ .

Jmenovatel

$$P(D) = \sum_{j=1}^{|\mathcal{L}|} P(D|h_j)P(h_j)$$

nezávisí na  $h_i$ . Z tohoto důvodu

$$\arg \max_{h_i} P(h_i|D) = \arg \max_{h_i} P(D|h_i)P_{\mathcal{L}}(h_i)$$

Metoda *maximální aposteriorní pravděpodobnosti* (MAP) vybírá vzor  $h$

$$h = \arg \max_{h_i} P(h_i|D) = \arg \max_{h_i} P(D|h_i)P_{\mathcal{L}}(h_i)$$

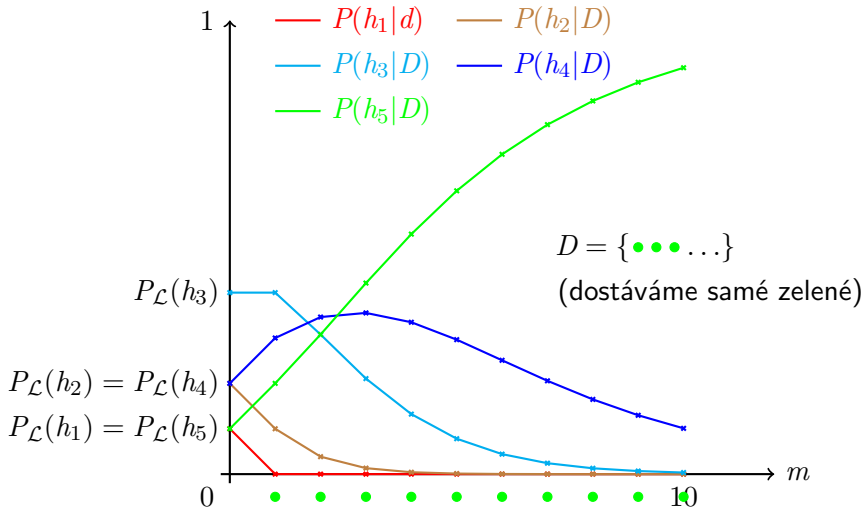
Srov. s metodou maximální věrohodnosti, kde

$$h = \arg \max_{h_i} P(D|h_i)$$

MAP tedy bere navíc úvahu informaci nesenou apriorním rozdělením  $P_{\mathcal{L}}(h_i)$ . Ta je významná pro malé množství dat, ale s rostoucím množstvím dat její význam klesá:

$$\arg \max_{h_i} P(D|h_i)P_{\mathcal{L}}(h_i) \rightarrow_{m \rightarrow \infty} \arg \max_{h_i} P(D|h_i)$$

# Aposteriorní pravděpodobnost jako funkce množství dat



# Odhad parametrů normálního rozdělení

Data  $D = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  vybrána navz. nezávisle z rozdělení

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Z dat odhadujeme parametry  $\mu, \sigma$ . Aplikace metody max. věrohodnosti:

$$L(D|\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^m \log P(x_i|\mu, \sigma) = m(-\log \sqrt{2\pi} - \log \sigma) - \sum_{i=1}^m \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

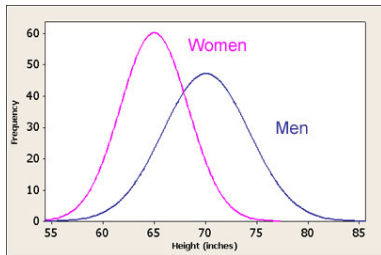
$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mu} L(D|\theta) = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - \mu) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m}$$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\sigma} L(D|\theta) = -\frac{m}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^2 = 0 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^2}{m}}$$



# Směs normálních rozdělení (pokr.)

pohlaví	výška
žena	171
žena	164
muž	182
žena	169
muž	178
muž	184
...	



$$X = P \times V = \{\text{muž, žena}\} \times R^+$$

$$\begin{aligned} D &= \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots\} = \{(p_1, v_1), (p_2, v_2), (p_3, v_3), \dots\} \\ &= \{(\text{žena}, 171), (\text{žena}, 164), (\text{muž}, 182), \dots\} \end{aligned}$$

## Směs normálních rozdělání (pokr.)

- ▶ Rozdělání výšek je součtem dvou normálních rozdělání (muži, ženy)
- ▶ Každé má svoji střední hodnotu a rozptyl

Rozdělání  $P_X$  na  $X$  lze vyjádřit jako

$$P_X(\vec{x}) = P_X([p, v]) = P_P(\text{muž})P_{V|P}(v|\text{muž}) + P_P(\text{žena})P_{V|P}(v|\text{žena})$$

$$P_{V|P}(v|\text{muž}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{muž}}^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_{\text{muž}})^2}{2\sigma_{\text{muž}}^2}\right)$$

$$P_{V|P}(v|\text{žena}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{žena}}^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_{\text{žena}})^2}{2\sigma_{\text{žena}}^2}\right)$$

# Směs normálních rozdělání (pokr.)

Odhady dle maximální věrohodnosti, zvlášt pro každé pohlaví:

pohlaví	výška
žena	171
žena	164
žena	169

pohlaví	výška
muž	182
muž	173
muž	188

$$\mu_{\text{žena}} \approx \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} = \frac{504}{3} = 168$$

$$\mu_{\text{muž}} \approx \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} = \frac{543}{3} = 181$$

$$\sigma_{\text{žena}} \approx \sqrt{\frac{3^2 + 4^2 + 1^2}{3}} \approx 2.94$$

$$\sigma_{\text{muž}} \approx \sqrt{\frac{1^2 + 8^2 + 7^2}{3}} \approx 6.16$$

Víme, že v populaci jsou muži a ženy, ale proměnná (příznak) pohlaví v datech není.

pohlaví	výška
žena	171
žena	164
muž	182
žena	169
muž	178
muž	184

Jak nyní odhadnout  $P_X$ , tedy parametry  $\mu_{\text{muž}}$ ,  $\sigma_{\text{muž}}$ ,  $\mu_{\text{žena}}$ ,  $\sigma_{\text{žena}}$  a  $P(\text{žena})$ ?

1. 'Nastřel' počáteční hodnoty parametrů, např.

$$\mu_{\text{žena}} = 150, \sigma_{\text{žena}} = 10$$

$$\mu_{\text{muž}} = 200, \sigma_{\text{muž}} = 10$$

$$P(\text{žena}) = 0.5, P(\text{muž}) = 0.5$$

2. **Krok E (expectation):** Se stanovenými parametry spočti pravděpodobnosti hodnot skryté proměnné pro každou instanci, např.

$$\begin{aligned} P(\text{žena}|171) &= P(171|\text{žena})P(\text{žena})/P(171) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{žena}}} \exp\left(-\frac{(171 - \mu_{\text{žena}})^2}{2\sigma_{\text{žena}}^2}\right) \cdot 0.5/P(171) \\ &= 0.01391 \cdot 0.5/P(171) \end{aligned}$$

## 2. Krok E (pokr.)

$$\begin{aligned} P(\text{muž}|171) &= P(171|\text{muž})P(\text{muž})/P(171) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{muž}}} \exp\left(-\frac{(171 - \mu_{\text{muž}})^2}{2\sigma_{\text{muž}}^2}\right) \cdot 0.5/P(171) \\ &= 0.00188 \cdot 0.5/P(171) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{žena}|171) + P(\text{muž}|171) &= 1 \\ P(\text{žena}|171) &= \frac{0.01391 \cdot 0.5}{0.01391 \cdot 0.5 + 0.00188 \cdot 0.5} = 0.88 \\ P(\text{muž}|171) &= 1 - 0.88 = 0.12 \end{aligned}$$

3. **Krok M (maximization)**: Se spočtenými pravděpodobnostmi pro hodnoty skrytých proměnných znovu odhadni parametry rozdělení

$$\mu_{\text{žena}} \leftarrow \frac{1}{N_{\text{žena}}} \sum_{i=1}^m P(\text{žena} | v_i) v_i$$

$$\sigma_{\text{žena}} \leftarrow \sqrt{\frac{1}{N_{\text{žena}}} \sum_{i=1}^m P(\text{žena} | v_i) (v_i - \mu_{\text{žena}})^2}$$

$$P(\text{žena}) \leftarrow \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P(\text{žena} | v_i)$$

- ▶  $N_{\text{žena}} = \sum_{i=1}^m P(\text{žena} | v_i)$  ... normalizační konstanta, zaručuje, že součet  $P(\text{žena} | v_i)$  přes všechny instance je 1.

Analogicky spočteme pro muže.

4. Opakuj krokem 2 (dokud změny nejsou dostatečně malé)

## Konvergence algoritmu EM

iterace	$\mu_{\text{žena}}$	$\mu_{\text{muž}}$
0	150.000	200.000
1	167.007	181.972
2	167.951	181.956
(správné hodnoty)	168	181