Vytěžování dat, cvičení 3: EM algoritmus

Michael Anděl, Miroslav Čepek, Radomír Černoch

19. října 2015

Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Fakulta elektrotechnická, ČVUT

Ochutnávka EM

- `http://demonstrations.wolfram.com/ExpectationMaximizationForGaussianMixtureDistributions`
- Bishop: Pattern Recognition and Machine Learning, str. 437

Gaussovské rozdělení

- Hustota pravděpodobnosti:

$$P(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}} \exp\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\,\sigma^2}}\right)^2$$

- Odhad parametrů:
  - Střední hodnota z aritmetického průměru:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$$

  - Variance ze střední kvadratické odchylky:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \hat{\mu})^2$$

Vygenerujte si v Matlabu náhodné vzorky z $P(x \mid \mu = 10, \sigma^2 = 5)$ pomocí `randn` a zpětně odhadněte jejich parametry pomocí funkcí `mean` a `var`.

Směs Gaussovských rozdělení (GMM)

- Mějme 2 normální rozdělení:

$$P(x \mid \mu_m = 180, \sigma_m = 10) \text{ a } P(x \mid \mu_z = 170, \sigma_z = 8)$$

  s následujícími směsnými koeficienty:

$$P(m) = 0.9 \text{ a } P(z) = 0.1$$

- Výsledná hustota pravděpodobnosti:

$$P(x \mid ...) = P(m) \cdot P(x \mid \mu_m, \sigma_m) + P(z) \cdot P(x \mid \mu_z, \sigma_z)$$

Zkuste si z této distribuce vygenerovat vzorky pomocí `randn` a zobrazit je v histogramu pomocí `hist`.

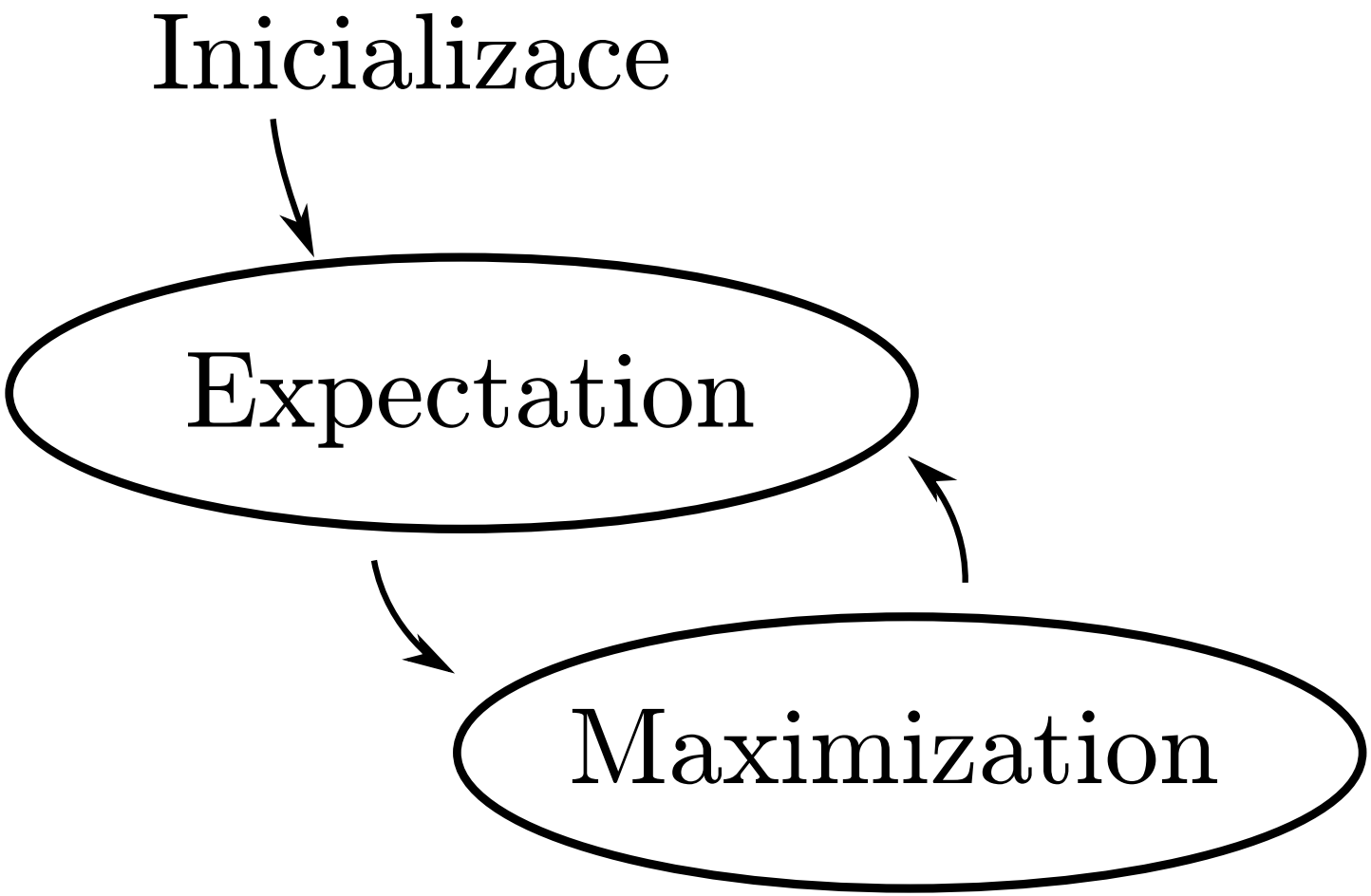
GMM: Odhady parametrů

- Dokáži ze své výšky odhadnout, jestli jsem muž nebo žena?
- Souhlasíte s následující úvahou:
  $P(m \mid x) \sim P(m) \cdot P(x \mid \mu_m, \sigma_m)$? (pro $P(z \mid x)$ obdobně)
- Aby platil součet $P(m \mid x) + P(z \mid x) = 1$, používá se normalizační konstanta (jmenovatel je stejný pro $P(m \mid x)$ i $P(z \mid x)$):

$$P(m \mid x) = \frac{P(m) \cdot P(x \mid \mu_m, \sigma_m)}{P(m) \cdot P(x \mid \mu_m, \sigma_m) + P(z) \cdot P(x \mid \mu_z, \sigma_z)}$$

- Zjistěte, zda platí $P(m \mid x = 160) > P(z \mid x = 160)$ (pozn.: normalizační konstantu lze pro účel porovnání vynechat).

EM algoritmus



EM: 3 fáze

1. *Inicializace* náhodně nastaví parametry $P(m)$, $P(z)$, μ_m, σ_z, ...
2. *Expectation* přiřadí instance oběma normálním rozdělením.
3. *Maximization* odhadne parametry rodělení na základě přiřazení z E fáze:

$$\mu_z \leftarrow \frac{1}{N_z} \sum_{n=1}^{N} P(z \mid x_n)\, x_n$$

$$\sigma_z^2 \leftarrow \frac{1}{N_z} \sum_{n=1}^{N} P(z \mid x_n)\, (x_n - \mu_z)^2$$

$$P(z) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(z \mid x_n)$$

- $N_z = \sum_{n=1}^{N} P(z \mid x_n)$ ... normalizační konstanta

Úloha (1/3)

1. Seznamte se s daty v souboru `height.csv`, který obsahuje tělesnou výšku vzorku 100 lidí, Američanů ve věku mezi 20 a 29 lety. Kromě výšky lidí (1. sloupec) obsahují data i jejich pohlaví (2. sloupec). Každý záznam tvoří jeden řádek tabulky.
2. Prohlédněte si dokumentaci k přiložené funkci `dataplot(data)`, která načtená data vykreslí do grafu:
   `>> data = csvread('height.csv'); dataplot(data);`

Úloha (2/3)

4. Implementujte EM algoritmus pro maximum-likelihood optimalizaci parametrů směsi dvou normalních rozdělení. Popis algoritmu naleznete ve třetí přednášce (str. 21-24).
   - Vstupem algorimu bude první sloupec načtených dat (druhý sloupec můžete použít pro zpětnou kontrolu). Vhodně zvolte počáteční parametry obou rozložení.
   - Pokud Váš algoritmus vrátí matici 2×2 ve formátu

$$\texttt{params} = \begin{pmatrix} \mu_{\text{ženy}} & \sigma_{\text{ženy}} \\ \mu_{\text{muži}} & \sigma_{\text{muži}} \end{pmatrix}$$

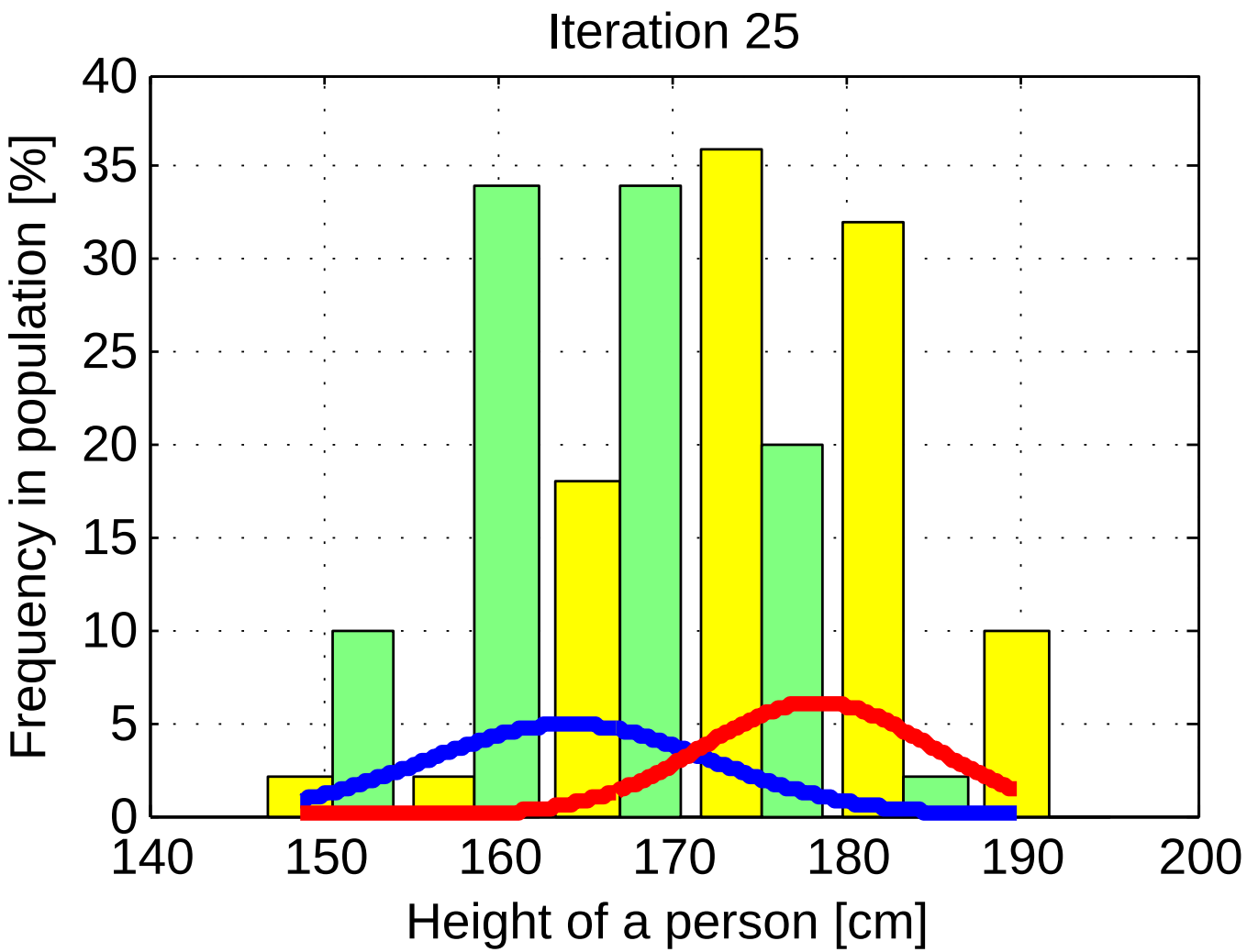
   můžete pro vykreslení obou rozdělení použít příkaz

```
>> dataplot(data, params);
```

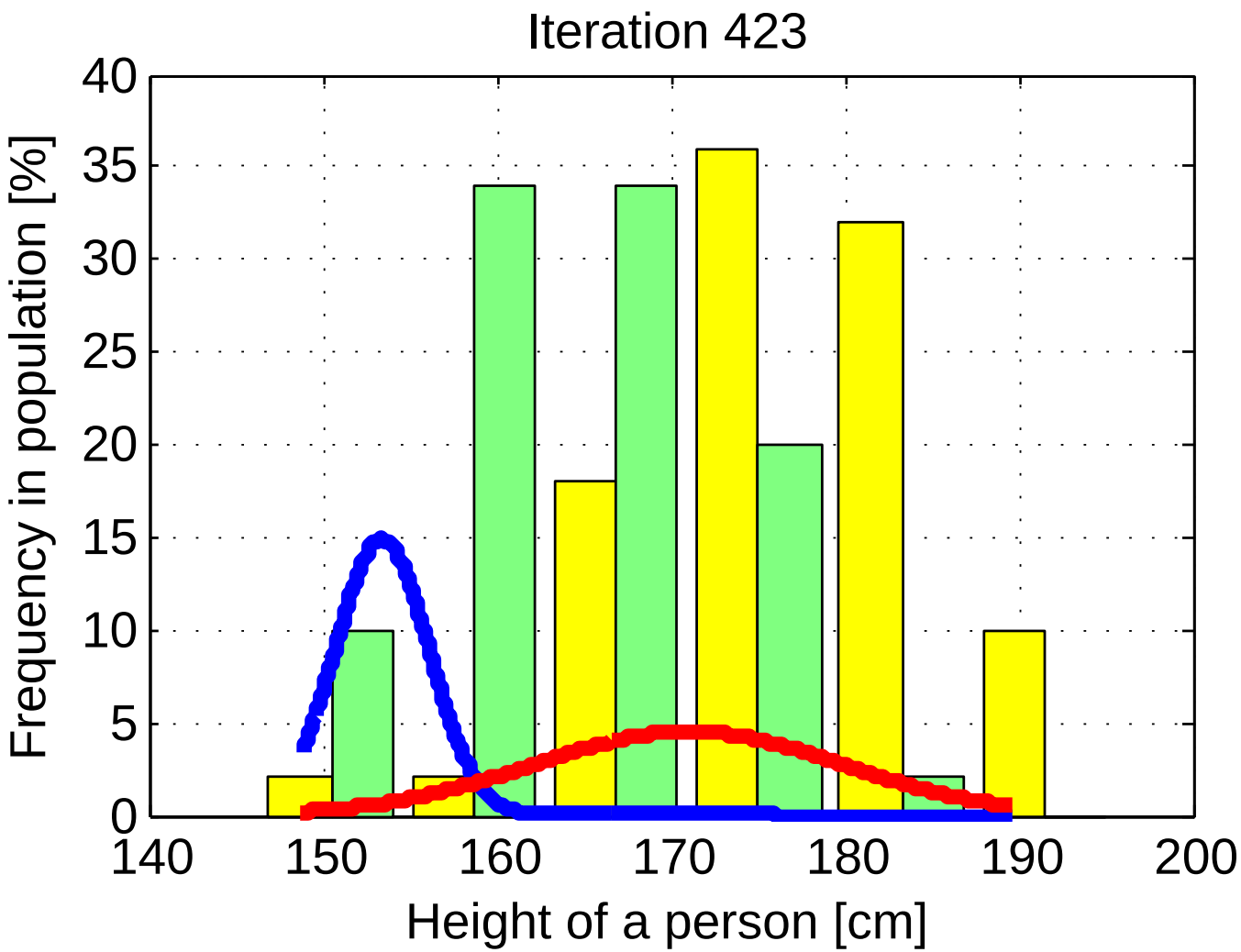
Úloha (3/3)

5. Vyvořte protokol o rozsahu cca. 1 strany A4, která shrne Vaši práci a analyzuje výsledky. Doporučený obsah:
   - grafy obou gaussovských rozložení v několika počátečních iteracích algoritmu a stav po konvergenci
   - počet iterací algoritmu (dochází-li k velkému rozptylu hodnot pro různá počáteční nastaveni, spustťe algoritmus několikrat a výsledek vyhodnoťte statisticky)
   - diskuze o vlivu prvotního přiřazení parametrů na jejich výsledné hodnoty.
   - rozbor, zda lze mezi výškou mužů a žen pozorovat statisticky významný rozdíl (využijte druhý sloupec vstupních dat a závěry z předchozích bodů)
   - poznámky k implementaci
6. Protokol odevzdejte do upload systému do 10.10.2011. Zdrojové kódy není nutné do systému nahrávat, ale můžete být požádáni o jejich ukázku a předvedení během následujícího cvičení.

Úloha: Možný výsledek (1/3)



Úloha: Možný výsledek (2/3)



Úloha: Možný výsledek (3/3)