

Vytěžování dat, cvičení 3: EM algoritmus

Michael Anděl, Miroslav Čepek

7. 10. 2014



Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Fakulta elektrotechnická, ČVUT

- ▶ `http://demonstrations.wolfram.com/ExpectationMaximizationForGaussianMixtureDistributions`
- ▶ Bishop: Pattern Recognition and Machine Learning, str. 437

- ▶ Hustota pravděpodobnosti:

$$P(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- ▶ Odhad parametrů:
 - ▶ Střední hodnota z aritmetického průměru:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$$

- ▶ Variance ze střední kvadratické odchylky:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \hat{\mu})^2$$

Vygenerujte si v Matlabu vzorky z $P(x|\mu = 10, \sigma^2 = 5)$ pomocí gaussovského generátoru náhodných čísel `randn` a zpětně odhadněte jejich parametry. Jak se bude odhad měnit s počtem vygenerovaných vzorků?

Směs Gaussovských rozdění (GMM)

- ▶ Mějme 2 normální rozdění:

$$P(x | \mu_m = 180, \sigma_m = 10) \text{ a } P(x | \mu_z = 170, \sigma_z = 8)$$

s následujícími směsnými koeficienty:

$$P(m) = 0.9 \text{ a } P(z) = 0.1$$

- ▶ Výsledná hustota pravděpodobnosti:

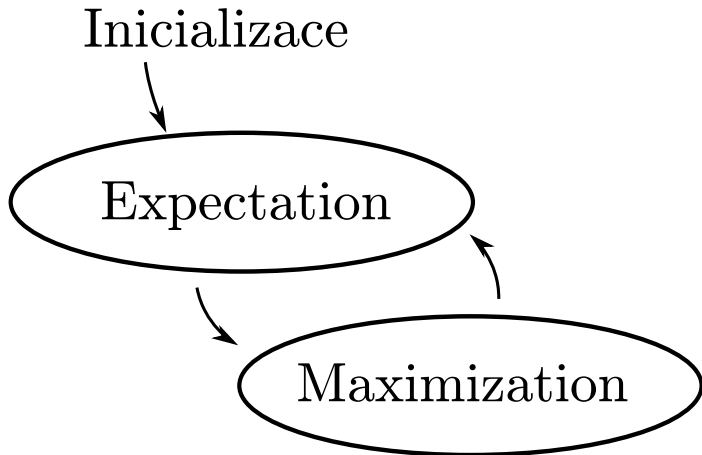
$$P(x | \dots) = P(m) \cdot P(x | \mu_m, \sigma_m) + P(z) \cdot P(x | \mu_z, \sigma_z)$$

Op2t si zkuste z této distribuce vygenerovat vzorky pomocí a zobrazit je v histogramu pomocí `hist`. Jak ale zpětně odhadnout parametry??

- ▶ Dokáži ze své výšky odhadnout, jestli jsem muž nebo žena?
- ▶ Souhlasíte s následující úvahou:
 $P(m|x) \sim P(m) \cdot P(x|\mu_m, \sigma_m)$? (pro $P(z|x)$ obdobně)
- ▶ Aby platil součet $P(m|x) + P(z|x) = 1$, používá se normalizační konstanta (jmenovatel je stejný pro $P(m|x)$ i $P(z|x)$):

$$P(m|x) = \frac{P(m) \cdot P(x|\mu_m, \sigma_m)}{P(m) \cdot P(x|\mu_m, \sigma_m) + P(z) \cdot P(x|\mu_z, \sigma_z)}$$

- ▶ Zjistěte, zda platí $P(m|x=160) > P(z|x=160)$ (pozn.: normalizační konstantu lze pro účel porovnání vynechat).



1. *Inicializace* náhodně nastaví parametry $P(m)$, $P(z)$, μ_m , σ_z , ...
2. *Expectation* přiřadí instance oběma normálním rozdělením.
3. *Maximization* odhadne parametry rozdělení na základě přiřazení z E fáze:

$$\mu_z \leftarrow \frac{1}{N_z} \sum_{n=1}^N P(z | x_n) x_n$$

$$\sigma_z^2 \leftarrow \frac{1}{N_z} \sum_{n=1}^N P(z | x_n) (x_n - \mu_z)^2$$

$$P(z) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(z | x_n)$$

- $N_z = \sum_{n=1}^N P(z | x_n)$... normalizační konstanta

1. Seznamte se s daty v souboru `height.csv`, který obsahuje tělesnou výšku vzorku 100 lidí, Američanů ve věku mezi 20 a 29 lety. Kromě výšky lidí (1. sloupec) obsahují data i jejich pohlaví (2. sloupec). Každý záznam tvoří jeden řádek tabulky.
2. Prohlédněte si dokumentaci k přiložené funkci `dataplot(data)`, která načtená data vykreslí do grafu:

```
>> data = csvread('height.csv'); dataplot(data);
```


4. Implementujte EM algoritmus pro maximum-likelihood optimalizaci parametrů směsi dvou normalních rozdělení. Popis algoritmu naleznete ve třetí přednášce (str. 21-24).

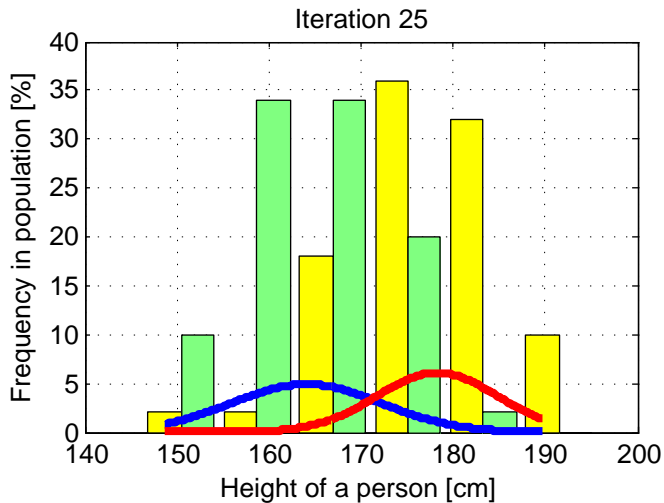
- ▶ Vstupem algoritmu bude první sloupec načtených dat (druhý sloupec můžete použít pro zpětnou kontrolu). Vhodně zvolte počáteční parametry obou rozložení.
- ▶ Pokud Váš algoritmus vrátí matici 2×2 ve formátu

$$\text{params} = \begin{pmatrix} \mu_{\text{ženy}} & \sigma_{\text{ženy}} \\ \mu_{\text{muži}} & \sigma_{\text{muži}} \end{pmatrix}$$

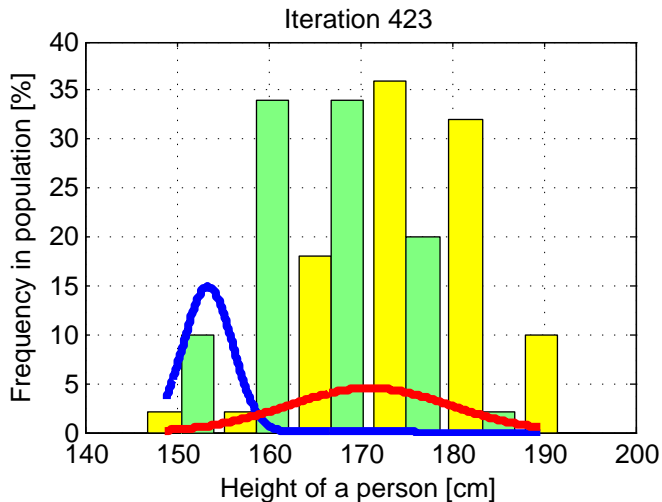
můžete pro vykreslení obou rozdělení použít příkaz
`>> dataplot(data, params);`

5. Vyvořte protokol o rozsahu cca. 1 strany A4, která shrne Vaši práci a analyzuje výsledky. Doporučený obsah:
 - ▶ grafy obou gaussovských rozložení v několika počátečních iteracích algoritmu a stav po konvergenci
 - ▶ počet iterací algoritmu (dochází-li k velkému rozptylu hodnot pro různá počáteční nastavení, spustte algoritmus několikrát a výsledek vyhodnoťte statisticky)
 - ▶ diskuze o vlivu prvotního přiřazení parametrů na jejich výsledné hodnoty.
 - ▶ rozbor, zda lze mezi výškou mužů a žen pozorovat statisticky významný rozdíl (využijte druhý sloupec vstupních dat a závěry z předchozích bodů)
 - ▶ poznámky k implementaci
6. Protokol odevzdejte do upload systému do 13.10.2011. Zdrojové kódy není nutné do systému nahrávat, ale můžete být požádáni o jejich ukázkou a předvedení během následujícího cvičení.

Úloha: Možný výsledek (1/3)



Úloha: Možný výsledek (2/3)



Úloha: Možný výsledek (3/3)

