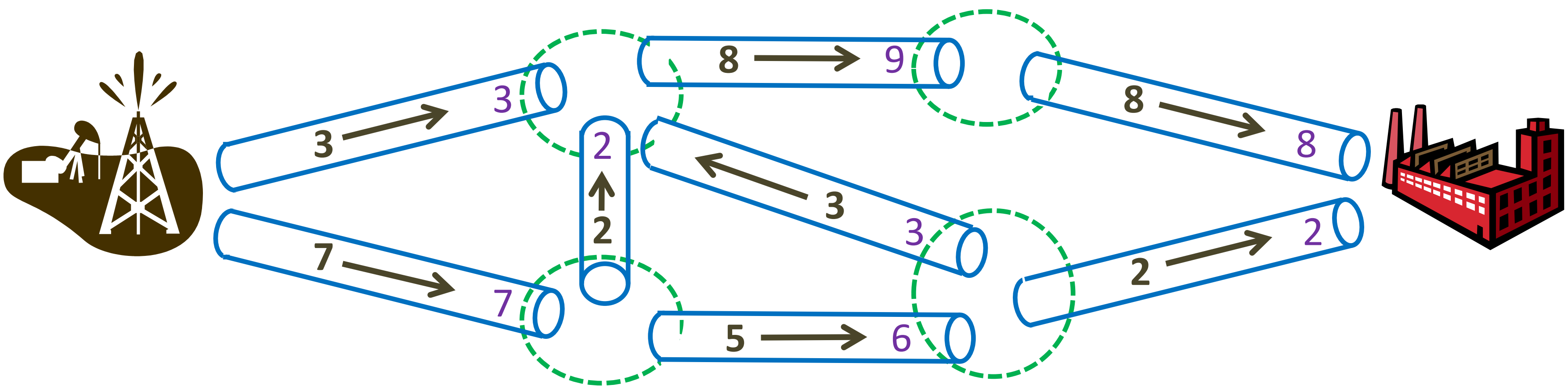
Motivační úloha – ropovod

Máme dánu síť potrubí, kde

- pro každou rouru známe maximální možný průtok
- v uzlech máme možnost přítok distribuovat

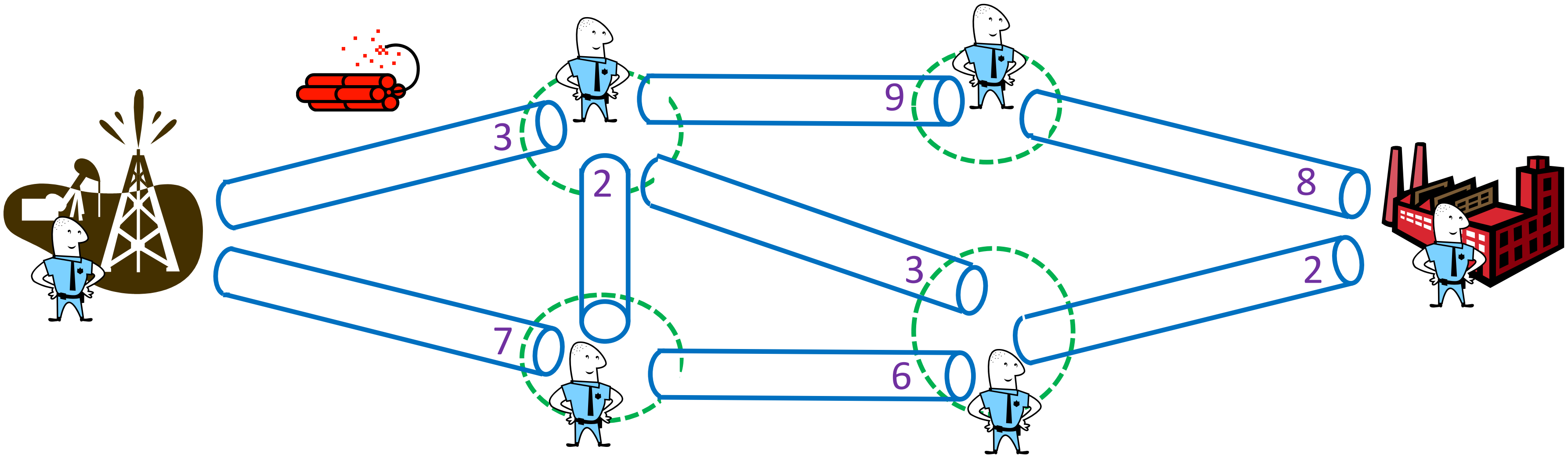


Jak zajistit, aby továrna byla zásobována co největším přítokem ropy?

Komplementární úloha – sabotáž

Dva případy:

1. jednotkové množství dynamitu poškodí libovolnou rouru
2. potřebné množství dynamitu je úměrné kapacitě roury



Které roury musíme poškodit, aby továrna nemohla být vůbec zásobována?

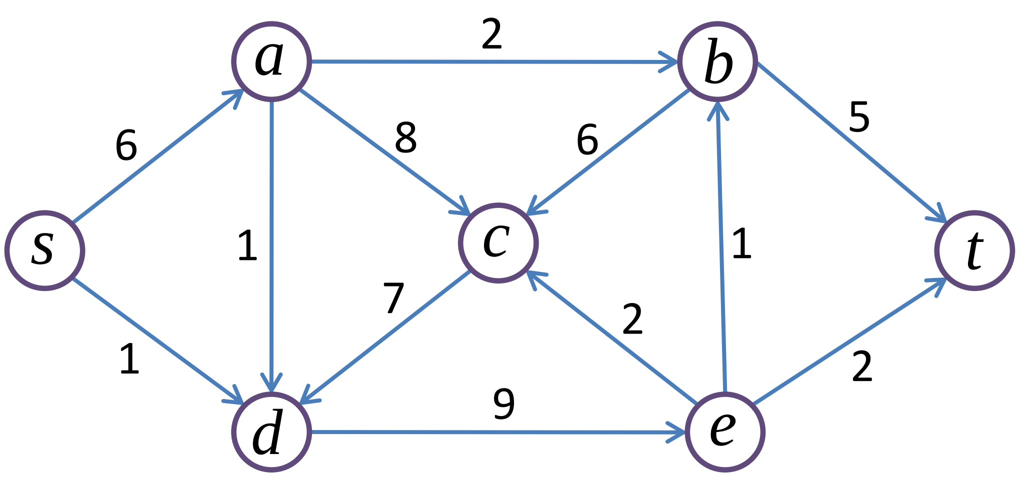
Toky v sítích

- Definice sítě, toku a řezu
- Základní algoritmus na hledání maximálního toku a minimálního řezu
- Modifikace úlohy, využití

Definice sítě

Síť je čtveřice $S=(G,s,t,c)$, kde

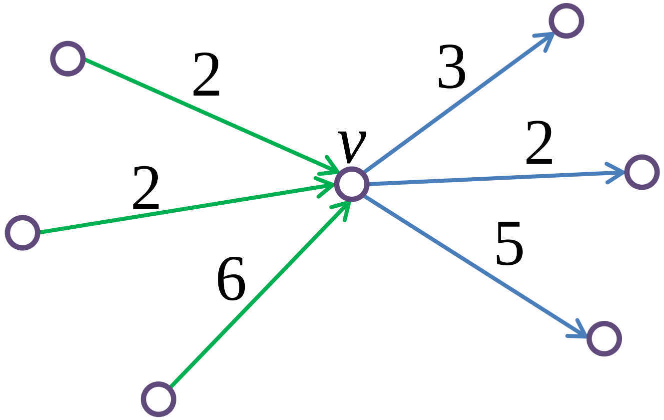
- $G=(V,E)$ je orientovaný graf
- $s\in V$ je vrchol nazývaný zdroj
- $t\in V$ je vrchol nazývaný spotřebič
- $c:E\rightarrow \mathbf{R}^{+}$ je kapacita



Tok v síti

Tok v síti $S=(G,s,t,c)$ je funkce $f:E\rightarrow\mathbf{R}^{+}$ splňující

1. $0\leq f(e)\leq c(e)$ pro každou hranu $e\in E$
2. $\sum_{(x,v)\in E} f\big((x,v)\big)=\sum_{(v,x)\in E} f\big((v,x)\big)$ pro každý vrchol $v\in V-\{s,t\}$



- Tok hranou není větší než kapacita hrany.
- Celkový odtok z vrcholu je roven celkovému přítoku.

Velikost toku

- Bilancí vrcholu v nazýváme hodnotu

$$f(v) = \sum_{(x,v)\in E} f\big((x,v)\big) - \sum_{(v,x)\in E} f\big((v,x)\big)$$

(rozdíl, mezi tím co do vrcholu vtéká a odtéká)

- Velikost toku definujeme jako $|f| = f(t)$.

- Platí
  1. $|f| = -f(s)$
  2. $\forall v \in V - \{s,t\} : f(v) = 0$

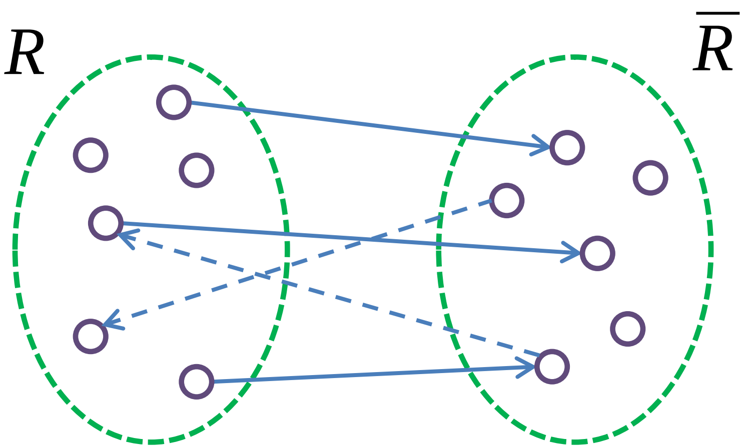
Cíl: Pro danou síť chceme nalézt tok maximální velikosti.

Řez v síti

Nechť $G=(V,E)$ je orientovaný graf.
Pro $R \subseteq V$ označme $\overline{R}=V-R$ (doplněk množiny).

Řez v síti $S=(G,s,t,c)$ určený množinou $R \subseteq V$ je množina orientovaných hran $\delta(R)$ splňující:

$$\delta(R)=\left\{(v,w)\in E \mid v\in R \wedge w\in \overline{R}\right\}$$

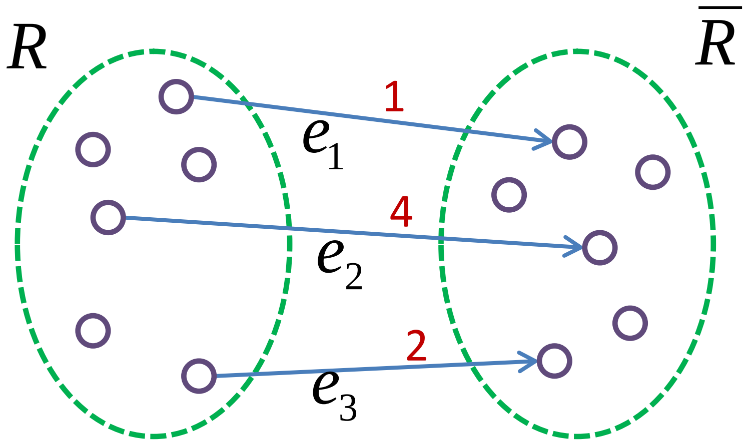


Kapacita řezu

Říkáme, že řez $\delta(R)$ je (s,t)-řezem, pokud $s \in R$ a $t \in \overline{R}$ (zdroj a spotřebič jsou řezem od sebe odděleny).

Kapacitu řezu $\delta(R)$ definujeme jako

$$c(\delta(R)) = \sum_{e \in \delta(R)} c(e)$$



$$c(e_1) = 1$$
$$c(e_2) = 4$$
$$c(e_3) = 2$$

$$c(\delta(R)) = c(e_1) + c(e_2) + c(e_3) = 7$$

Maximální tok a minimální řez

Lemma: Pro každý tok f a každý (s,t)-řez $\delta(R)$ platí

$$f(\delta(R)) - f(\delta(\overline{R})) = |f|$$

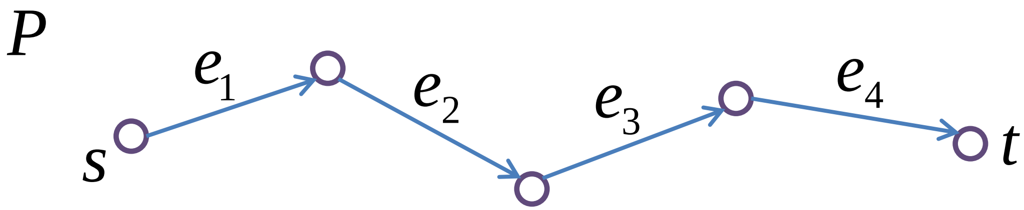
Důsledek: Pro každý tok f a každý (s,t)-řez $\delta(R)$ platí

$$|f| \leq c(\delta(R))$$

Věta: Velikost maximálního toku je rovna kapacitě minimálního (s,t)-řezu.

$$\max\{|f| : f \text{ je tok}\} = \min\{c(\delta(R)) : \delta(R) \text{ je } (s,t)\text{-řez}\}$$

Vylepšující cesta

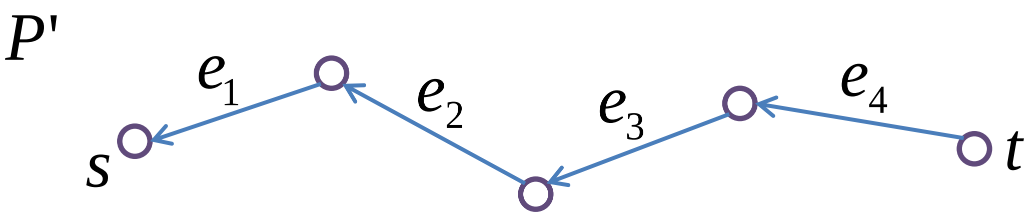


$$\forall e \in P$$
$$f(e) < c(e)$$

$$\varepsilon = \min\left\{c(e) - f(e) : e \in P\right\}$$

Podél cesty P můžeme tok f vylepšit (zvětšit) o hodnotu ε .

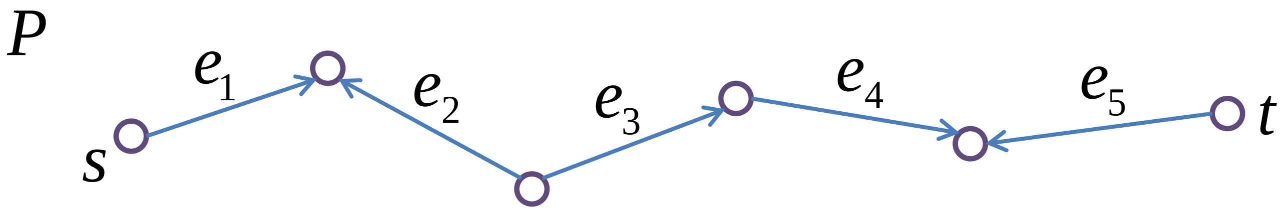
Obdobně při opačné orientaci hran:



$$\forall e \in P'$$
$$f(e) > 0$$

$$\varepsilon = \min\left\{f(e) : e \in P'\right\}$$

Vylepšující cesta – zobecnění



Hrany na cestě P rozdělíme na dopředné a zpětné.

D .. množina dopředných hran
Z .. množina zpětných hran

$\varepsilon_1 = \min\{c(e) - f(e) : e \in D\}$ $\qquad$ $\varepsilon_2 = \min\{f(e) : e \in Z\}$

$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

Tok vylepšíme o hodnotu ε.

Algoritmus vylepšující cesty

Věta: Tok v síti je maximální právě tehdy, když neexistuje žádná vylepšující cesta.

Algoritmus Ford-Fulkersonův:

```
FordFulkerson:
  f := nulový tok; // inicializace
  while existuje vylepšující cesta P z s do t do
    vylepši tok f podél cesty P;
  done
```

Algoritmus vylepšující cesty – složitost

- Ford-Fulkersonův algoritmus je konečný v případě celočíselných nebo racionálních kapacit.
- Pro iracionální kapacity může neustále konvergovat k určité hodnotě.

Modifikace – Edmonds-Karpův algoritmus:

- Mezi vylepšujícími cestami upřednostníme vždy tu s nejmenším počtem hran.
- Provede se vylepšení podél $O\left(|V| \cdot |E|\right)$ cest.

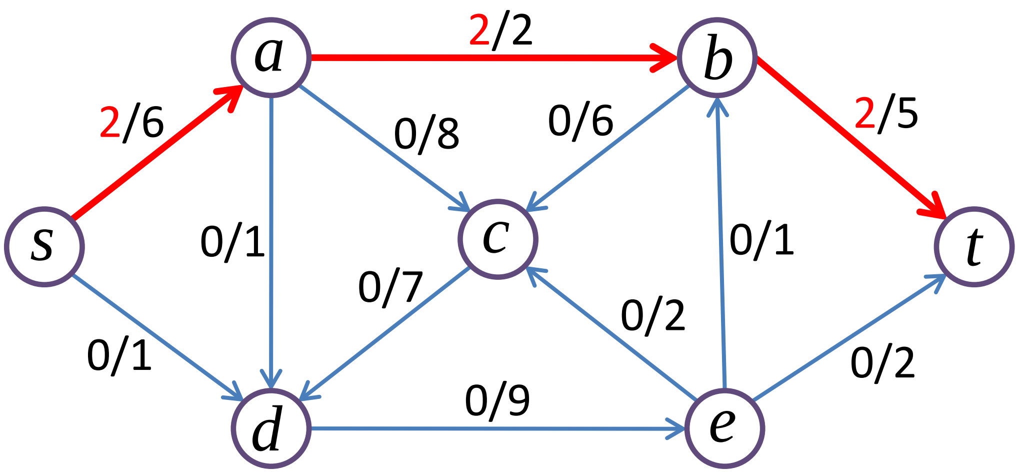
Celková složitost: $O\left(|V| \cdot |E|^2\right)$

Další vylepšení:

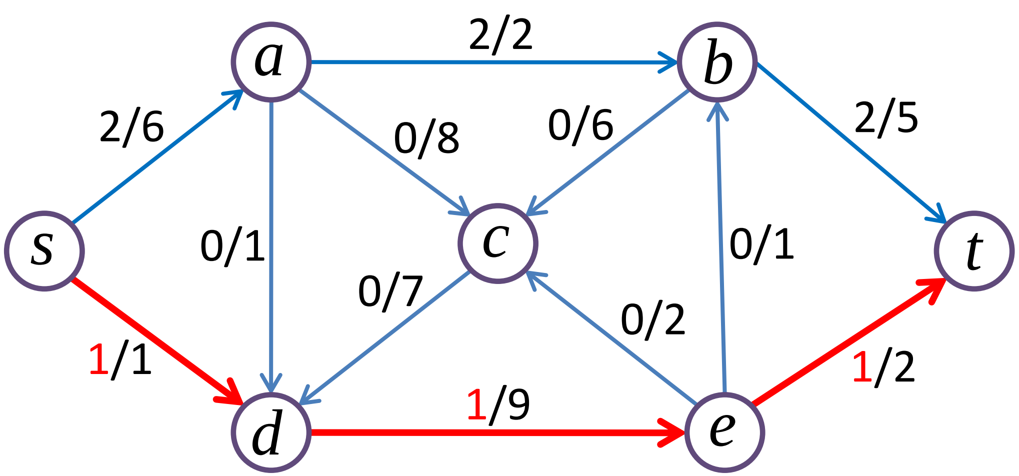
- Dinicův algoritmus $O(|V|^2 \cdot |E|)$
- Algoritmus tří Indů $O(|V|^3)$

Průběh algoritmu (1. a 2. krok)

1.

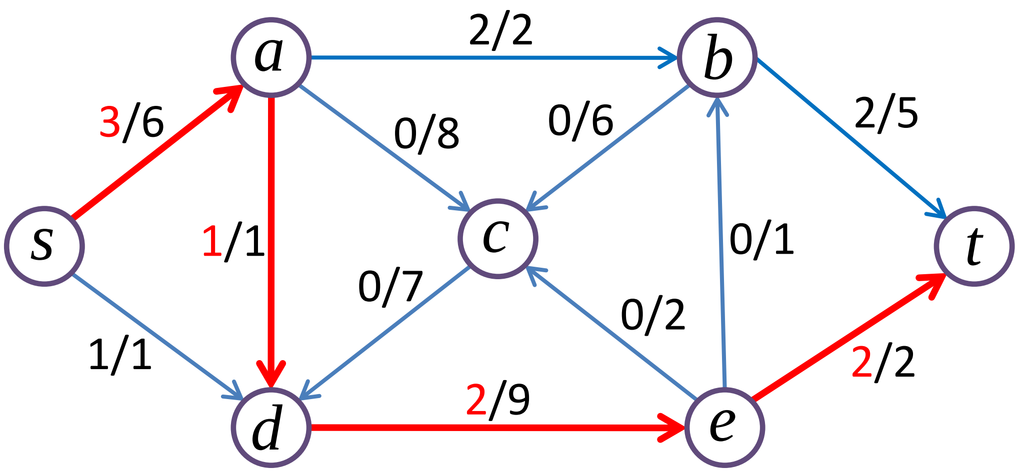


2.

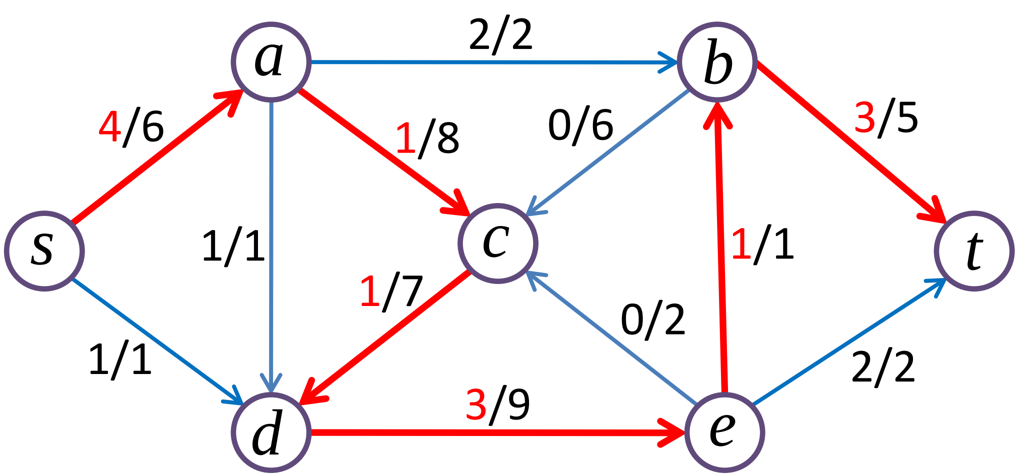


Průběh algoritmu (3. a 4. krok)

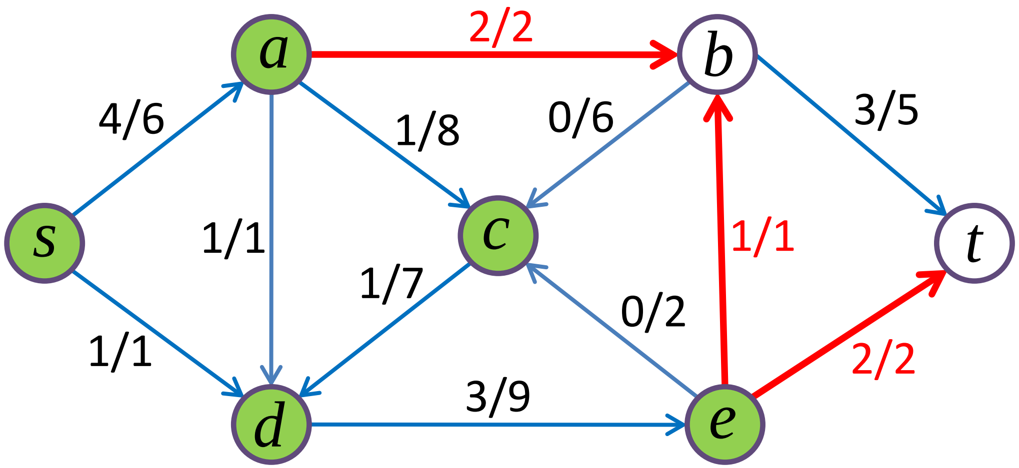
3.



4.



Ukončený algoritmus – minimální řez



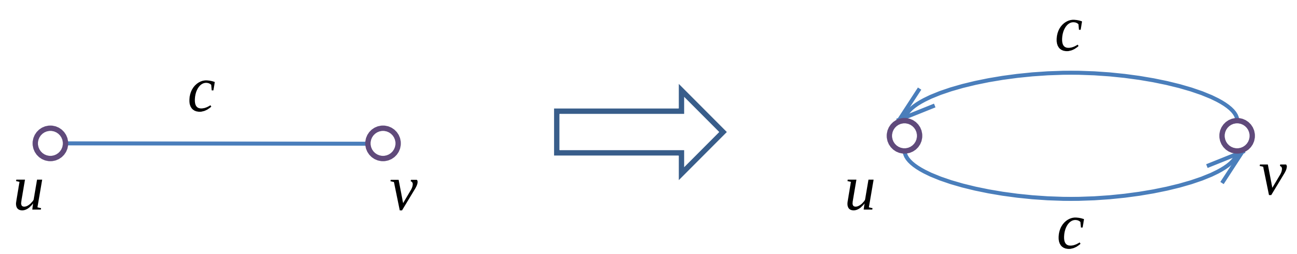
$$R_{\min} = \{s, a, c, d, e\}$$

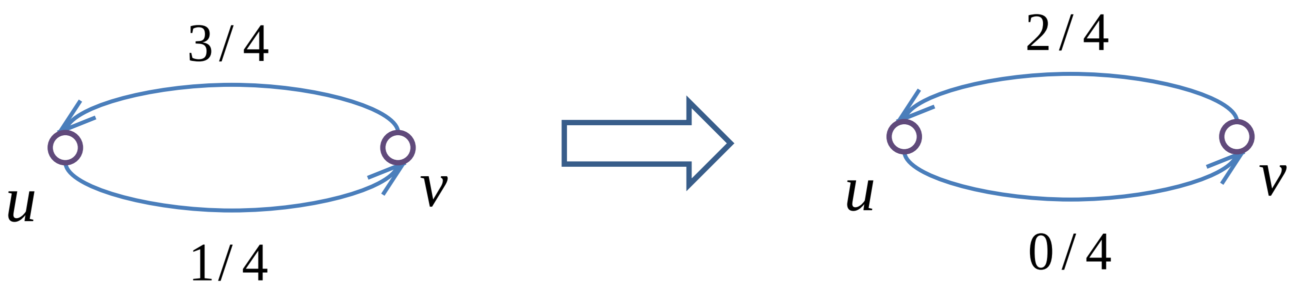
$\delta(R_{\min})$ … minimální řez

$$c(\delta(R_{\min})) = |f_{\max}| = 5$$

Toky v neorientovaném grafu

Každou neorientovanou hranu nahradíme dvěma protisměrně orientovanými hranami se stejnou kapacitou.

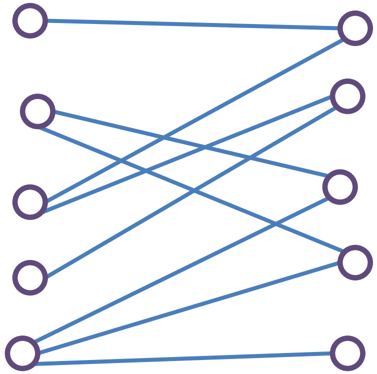




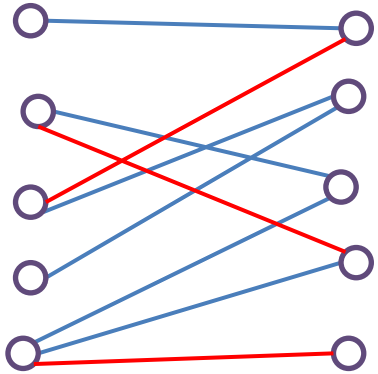
Tok lze vždy upravit tak, aby používal nejvýše jednu z dvojice orientovaných hran.

Párování v bipartitním grafu

$G = (V, E):$



párování:

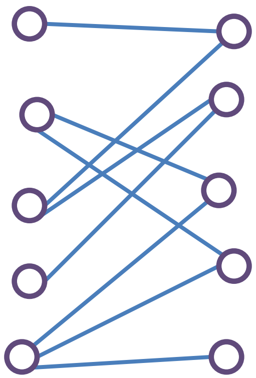


Jak nalézt párování s maximálním možným počtem hran?

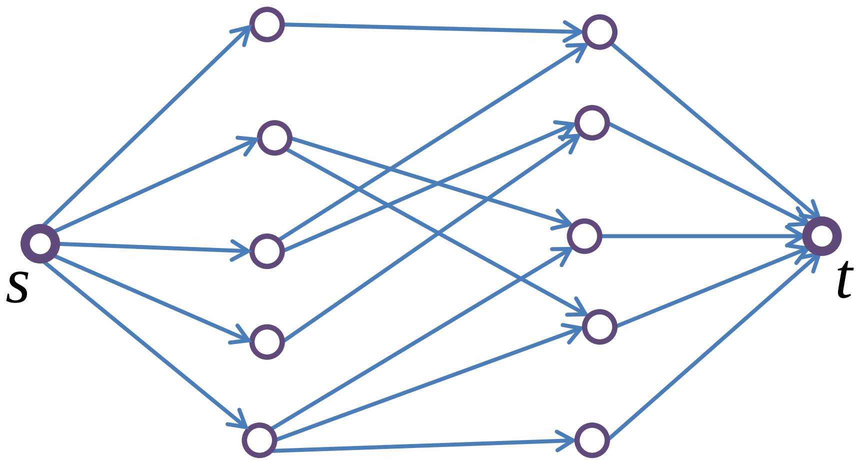
Maximální párování v bipartitním grafu

Zadaný (neorientovaný) bipartitní graf rozšíříme na síť přidáním zdroje a spotřebiče a zorientováním hran. Kapacita každé hrany je *1*.

Vstup:



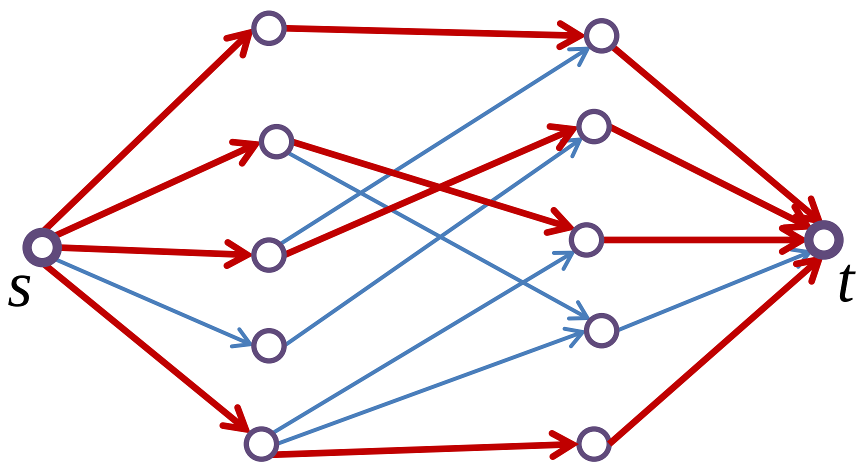
Síť:



V síti nalezneme maximální tok.

Maximální párování v bipartitním grafu

Výsledek:

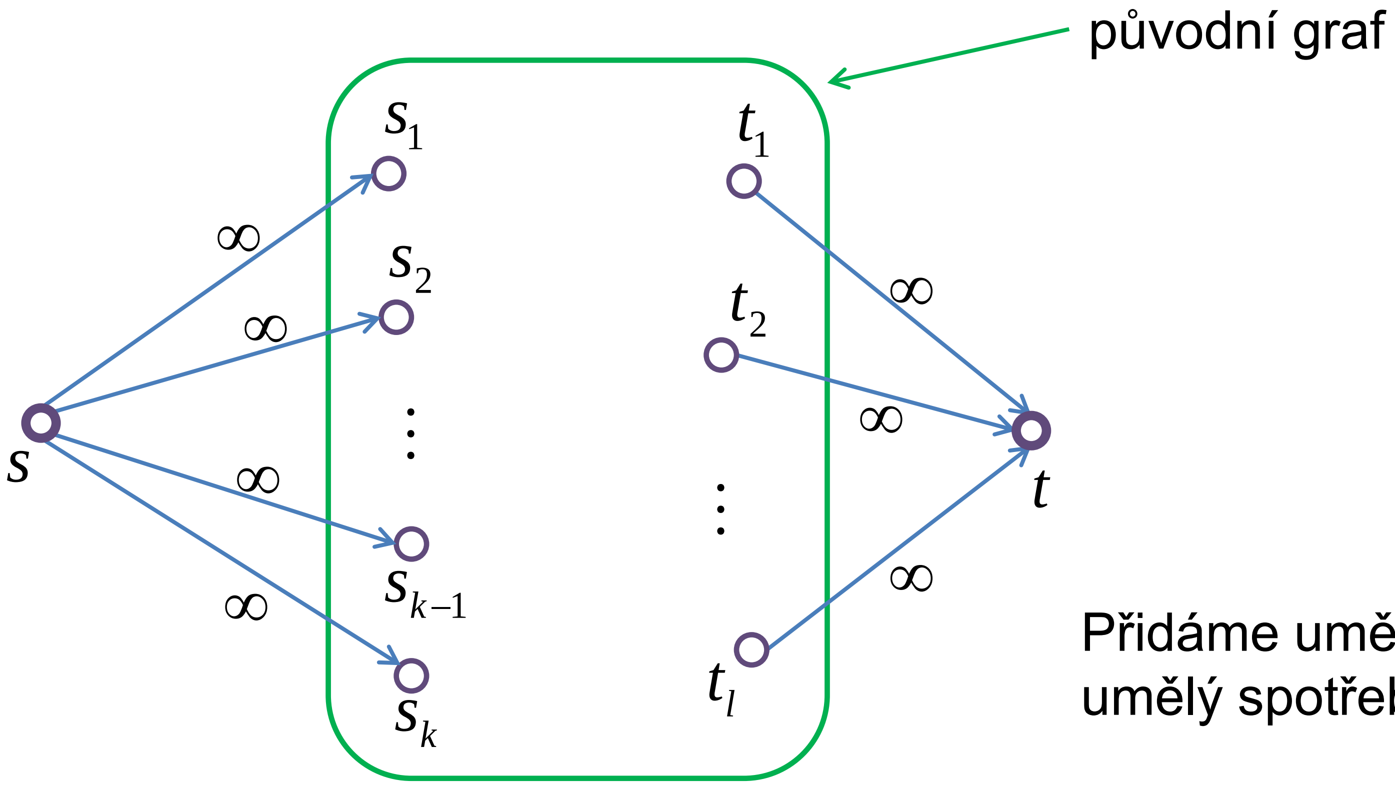


- Každá cesta z *s* do *t* určuje jednu hranu v párování.
- Velikost maximálního párování je *4*.

Více zdrojů a spotřebičů

$s_1, \ldots, s_k$ … zdroje

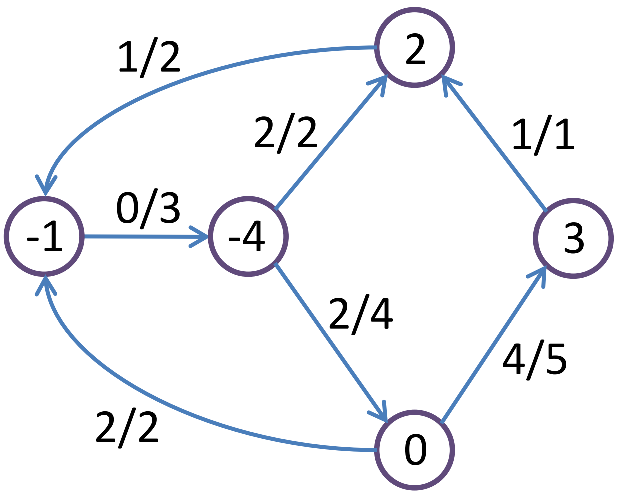
$t_1, \ldots, t_l$ … spotřebiče



Přidáme umělý zdroj *s* a umělý spotřebič *t*.

Cirkulace s požadavky

$d : V \to \mathbf{R}$ … funkce požadavků, pro každý vrchol v předepisuje požadovanou bilanci $f(v)$

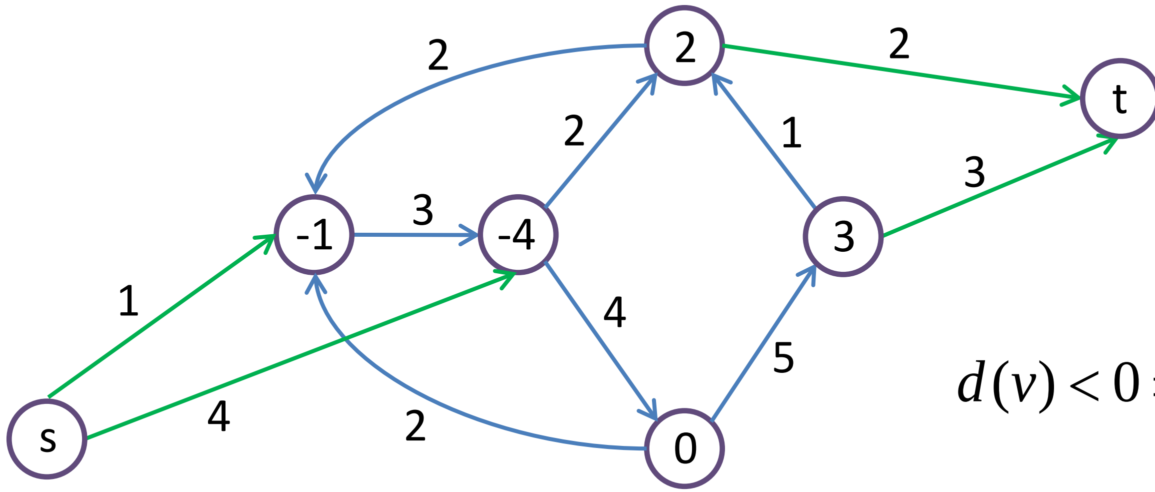


$d(v) > 0$ … v se chová jako spotřebič
$d(v) < 0$ … v se chová jako zdroj
$d(v) = 0$ … „normální“ chování

Pokud existuje cirkulace, pak platí

$$\sum_{v \in V, d(v) > 0} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) < 0} -d(v) = |f|$$

Převod cirkulace na tok v síti



$d(v) < 0 \Rightarrow$ hrana (s, v) s kapacitou $|d(v)|$

$d(v) > 0 \Rightarrow$ hrana (v, t) s kapacitou $d(v)$

Pokud existuje tok velikosti $|f| = \sum_{v \in V, d(v) > 0} d(v)$, pak existuje cirkulace v původním grafu.

Cirkulace s limity na průtok hranou

$l : E \rightarrow \mathbf{R}^{+}$

$l(e)$ je minimální předepsaná hodnota cirkulace hranou e

$l(e) \leq f(e) \leq c(e)$

Uvažujme tok f_0, kde $\forall e \in E : f_0(e) = l(e)$.

Upravíme kapacity a požadavky ve vrcholech následovně:

$$c'(e) := c(e) - l(e)$$
$$d'(v) := d(v) - f_0(v)$$

$\Rightarrow$ modifikovaná síť S'

V S' nalezneme cirkulaci f'.

A spočítáme cirkulaci v původním grafu S:

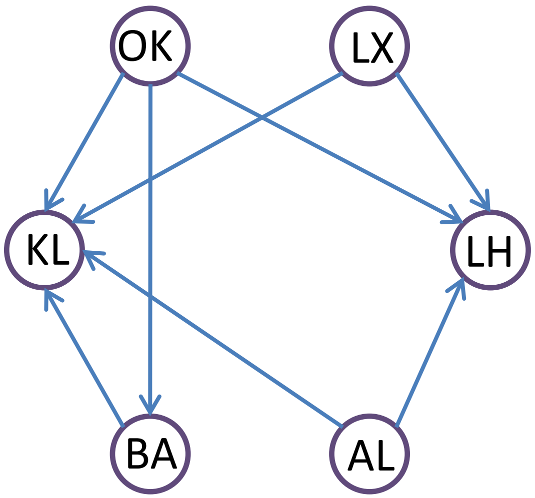
$$f := f' + f_0$$

Rozvrhování letadel

Letový řád:

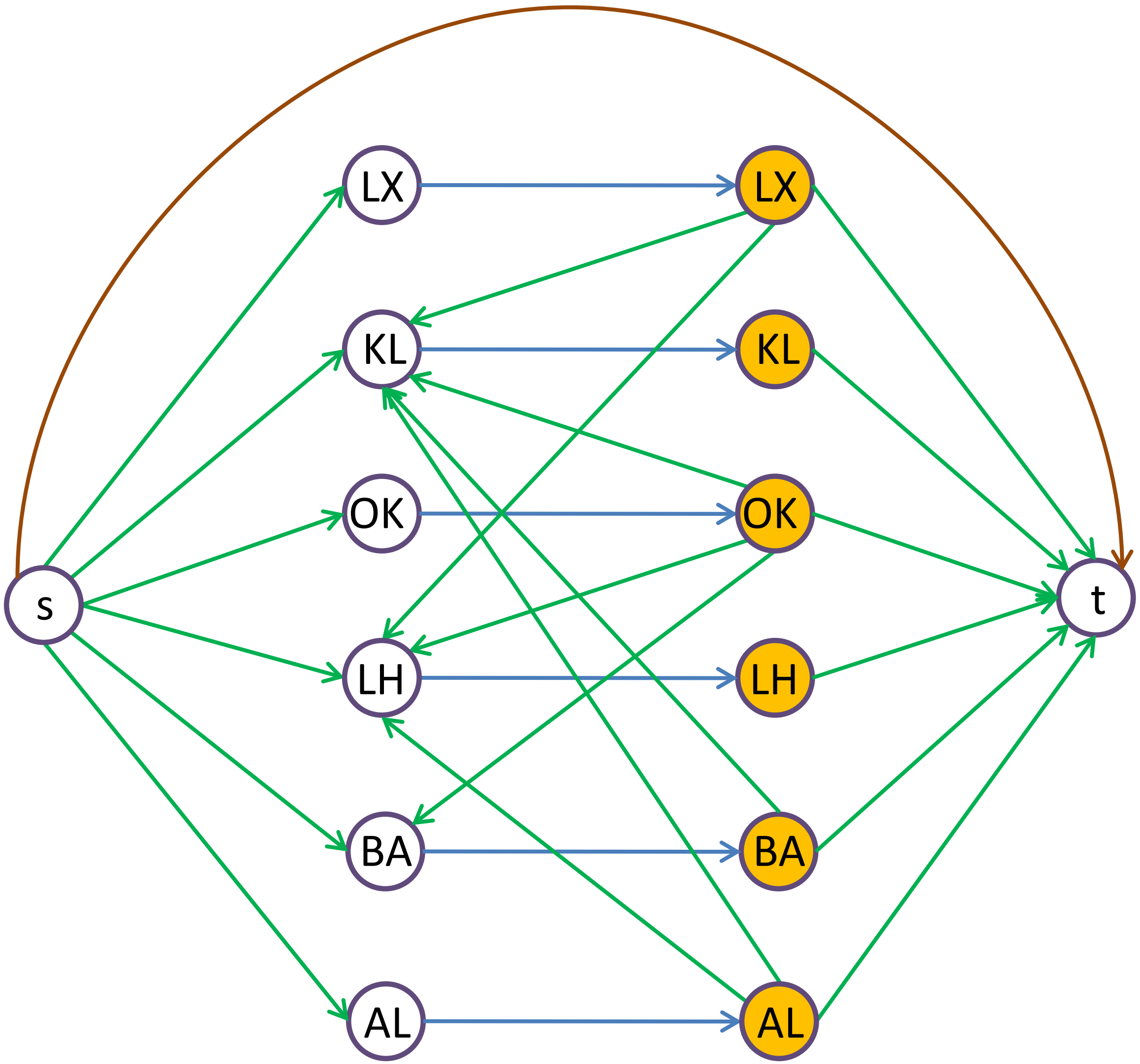
číslo letu	start	cíl
OK652	Praha (6:00)	Londýn (8:00)
LX2008	Milano (7:00)	Vídeň (10:00)
BA101	Londýn (9:00)	Madrid (11:00)
AL504	Milano (10:00)	Frankfurt (11:00)
LH2451	Frankfurt (13:00)	Budapešť (15:00)
KL404	Barcelona (18:00)	Budapešť (21:00)

Přípustná návaznost letů:



Postačuje na obsluhu všech letů *k* letadel?

Rozvrhování letadel – reprezentace



$$l(e) = c(e) = 1$$

$$l(e) = 0, c(e) = 1$$

$$l(e) = 0, c(e) = k$$

$$d(s) = -k$$
$$d(t) = k$$

Rozvrhování letadel – řešení