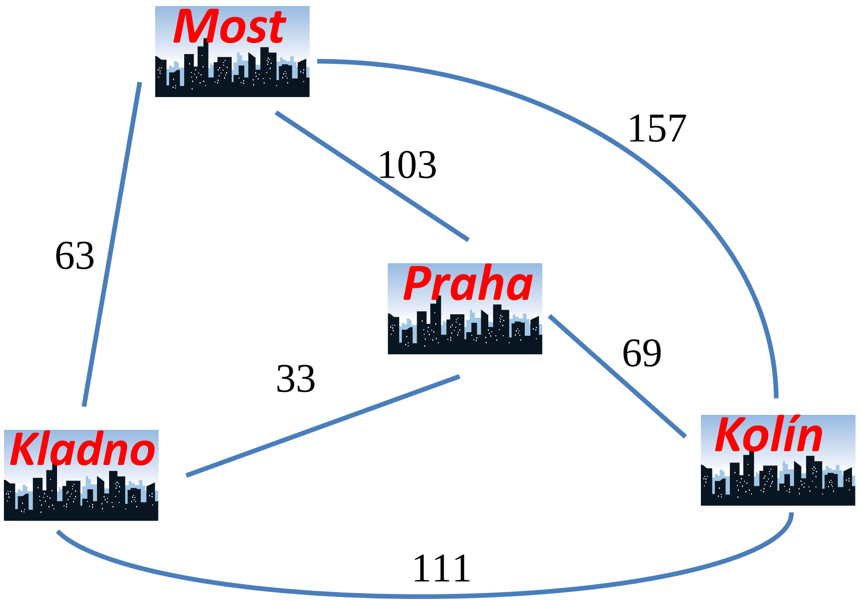
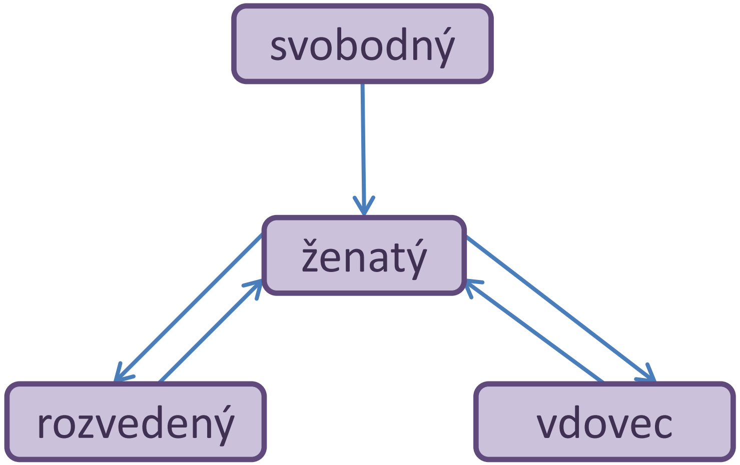
Graf - motivace

- matematická struktura reprezentující *vztahy* mezi *entitami*
- modelování reálného světa



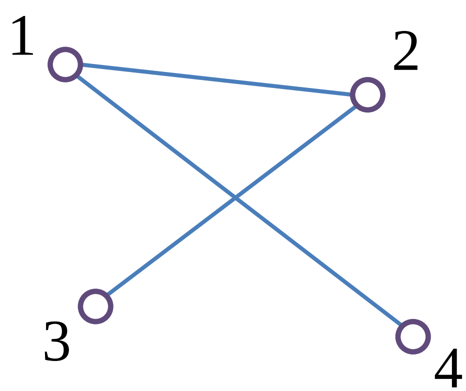


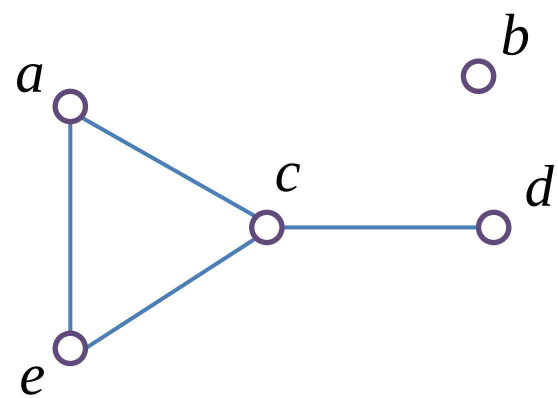
Definice (obyčejného) neorientovaného grafu

$G = (V, E)$

V… konečná množina vrcholů (**V**ertices)

$E \subseteq \binom{V}{2}$ … množina hran (**E**dges)





$V = \{1,2,3,4\}$

$E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,3\}\}$

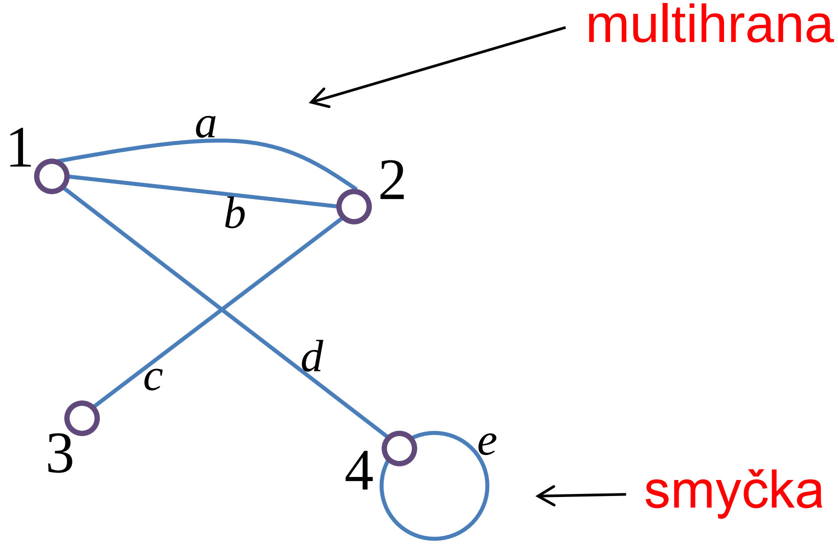
$V = \{a,b,c,d,e\}$

$E = \{\{a,c\},\{c,e\},\{e,a\},\{c,d\}\}$

Obecnější definice (multihrany, smyčky)

$G = (V, E, \rho)$ … neorientovaný graf

$\rho : E \to \binom{V}{2} \cup V$ … incidence grafu (fce určující koncové vrcholy hran)



$\rho(a) = \{1,2\}$
$\rho(b) = \{1,2\}$

$\rho(c) = \{2,3\}$
$\rho(d) = \{1,4\}$

$\rho(e) = \{4\}$

$V = \{1,2,3,4\}$

$E = \{a, b, c, d, e\}$

Důležité typy grafů

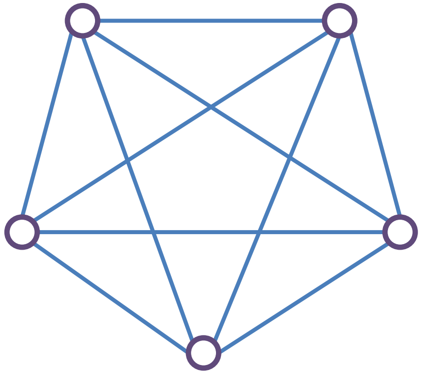
- K_n … úplný graf na *n* vrcholech

$$K_n = (V, E), \quad |V| = n \wedge E = \binom{V}{2}$$

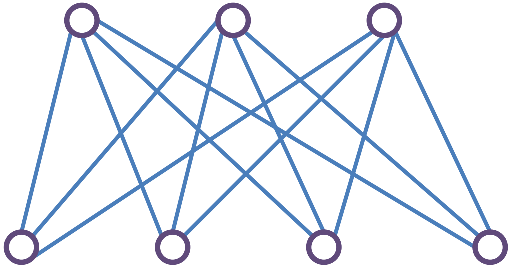
- $K_{m,n}$ … úplný bipartitní graf

$$K_{m,n} = (V_1 \cup V_2, E), \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset \wedge |V_1| = m \wedge |V_2| = n \wedge$$
$$E = \{\{x, y\} \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

K_5



$K_{3,4}$

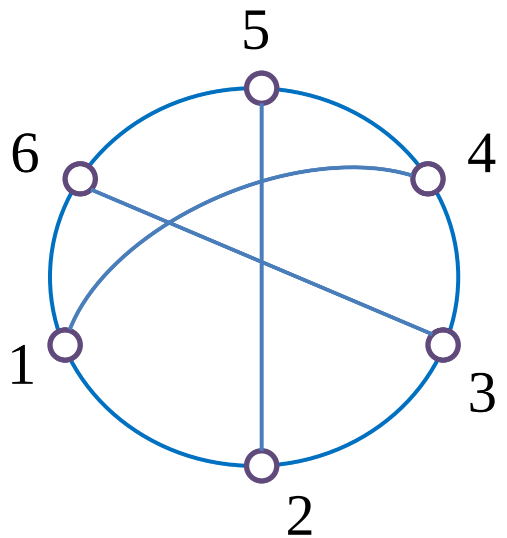


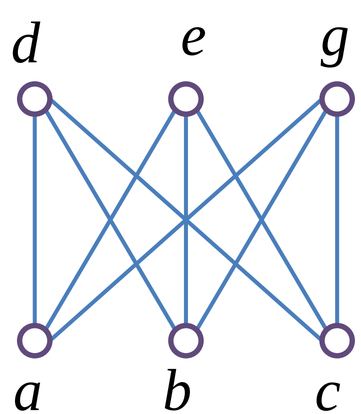
Izomorfismus grafů

Grafy $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ nazýváme izomorfní, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení (bijekce) $f : V_1 \to V_2$ tak, že platí:

$$\{x, y\} \in E_1 \text{ právě když } \{f(x), f(y)\} \in E_2$$

- zobrazení f nazýváme izomorfismus grafů G_1 a G_2
- píšeme $G_1 \cong G_2$





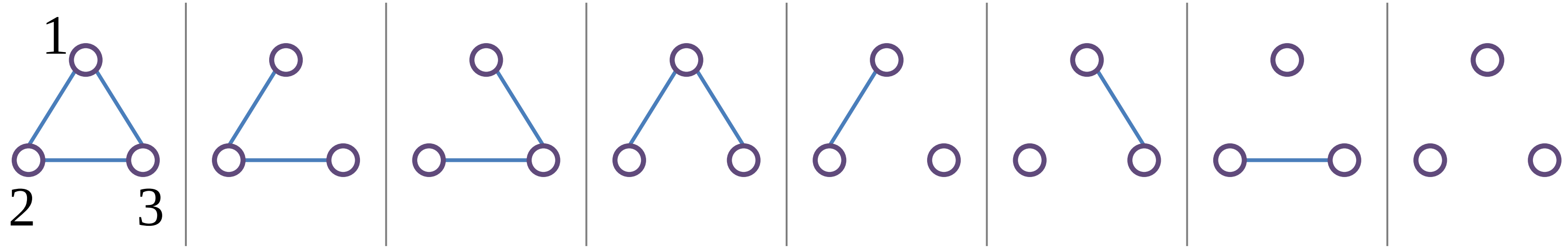
$1 \mapsto a \quad 4 \mapsto e$

$2 \mapsto d \quad 5 \mapsto c$

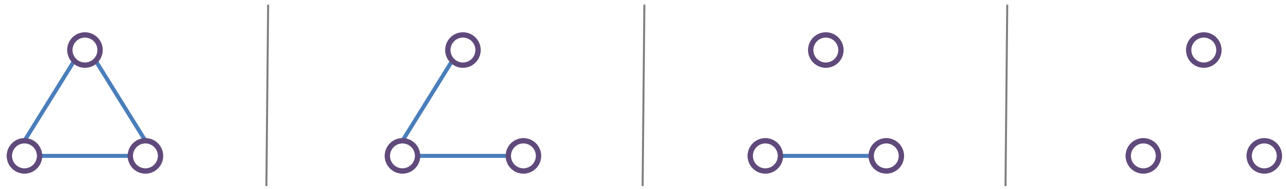
$3 \mapsto b \quad 6 \mapsto g$

Počet neizomorfních grafů na *n* vrcholech

$n = 3$, všechny různé grafy:



z toho 4 navzájem neizomorfní:



Stupeň vrcholu, skóre grafu

Nechť $G=(V,E)$ je graf a $v\in V$ jeho vrchol. Počet hran obsahujících v označujeme $\deg_G(v)$, toto číslo nazýváme stupněm vrcholu v.

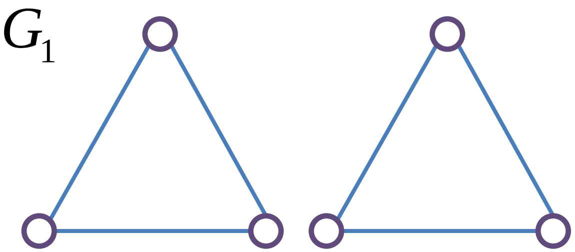
$$\deg_G(v)=\left|\{e:e\in E\wedge v\in e\}\right|$$

Označme vrcholy grafu G jako $v_1,v_2,\ldots,v_n$.
$(\deg_G(v_1),\deg_G(v_2),\ldots,\deg_G(v_n))$ nazýváme posloupnost stupňů grafu G, nebo skóre grafu G.

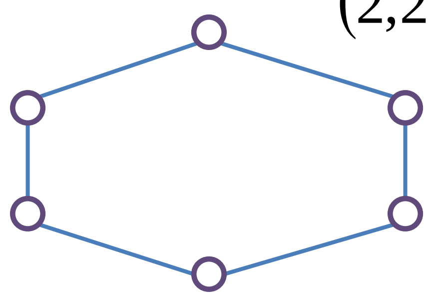
Věta: Izomorfní grafy mají stejná skóre.

$(2,2,2,2,2,2)$

G_1



G_2



Věta neplatí v opačném znění.

Vlastnosti skóre, princip sudosti

Věta (Princip sudosti): Pro každý graf $G=(V,E)$ platí

$$\sum_{v\in V}\deg_G(v)=2|E|$$

(tj. pokud sečteme stupně všech vrcholů, dostaneme dvojnásobek počtu hran)

Důsledek: Počet vrcholů lichého stupně je sudé číslo pro každý graf.

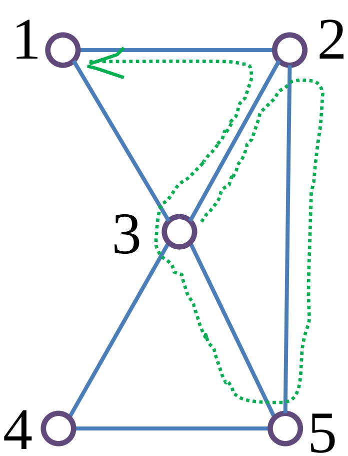
Aplikace důsledku:

??? Existuje graf, který má skóre $(3,3,2,2,1)$?

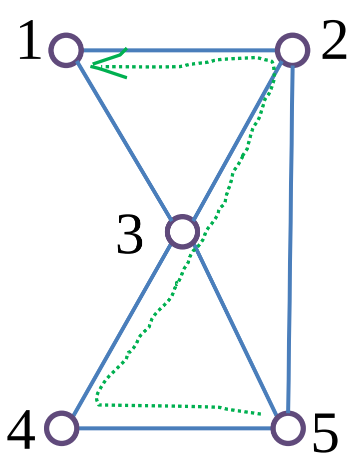
Sled, cesta a kružnice

- Sled v grafu $G=(V,E)$ je posloupnost vrcholů a hran tvaru $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$, kde v_i a v_{i+1} jsou krajní vrcholy hrany e_i .
- Uzavřený sled – pokud $v_0 = v_k$ a $k \geq 1$, jinak je sled otevřený.
- Cesta je (otevřený) sled, ve kterém se neopakuje žádný vrchol.
- Kružnice je uzavřený sled, ve kterém se kromě $v_0 = v_k$ neopakuje žádný vrchol.

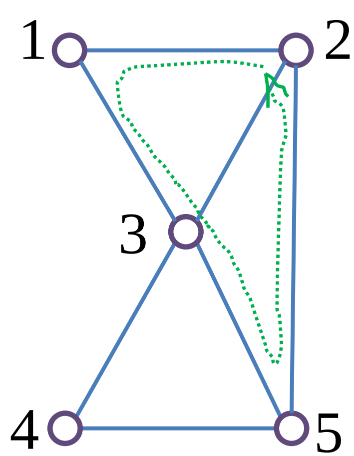
otevřený sled



cesta



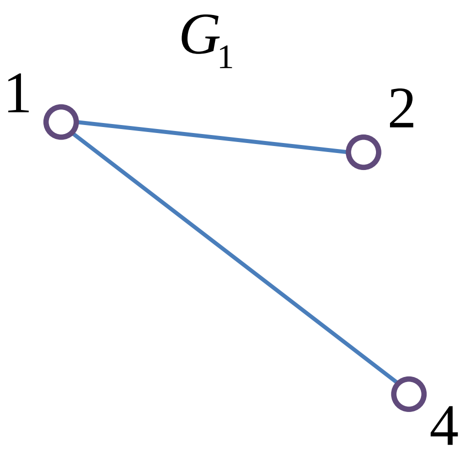
kružnice

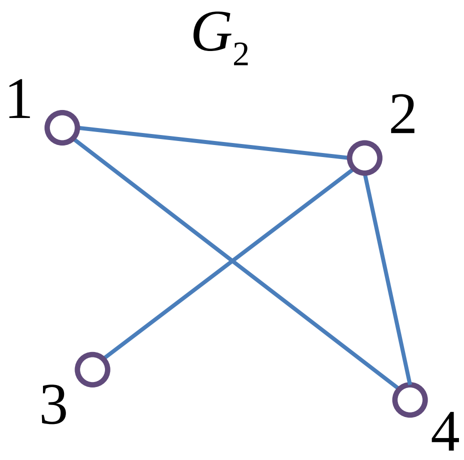


Podgraf

$$G_1 = (V_1, E_1), \quad G_2 = (V_2, E_2)$$

G_1 je podgraf G_2 právě když: $V_1 \subseteq V_2 \wedge E_1 \subseteq E_2$

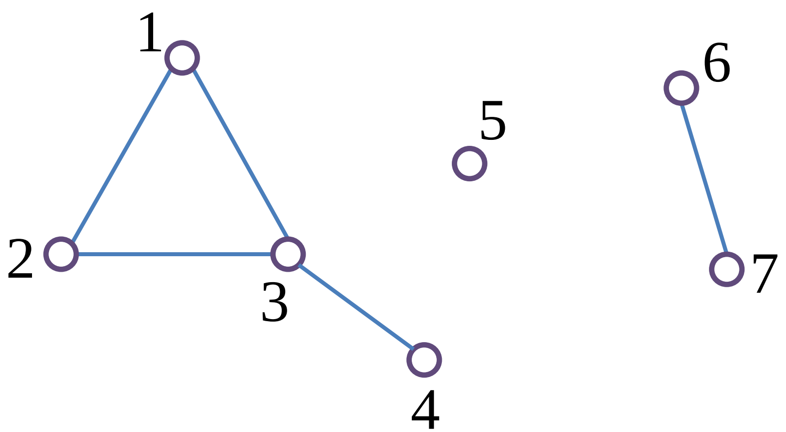




Souvislost grafu, komponenty

Graf $G=(V,E)$ nazýváme souvislý, pokud mezi každými jeho dvěma vrcholy existuje sled.

Komponenta grafu je každý jeho maximální souvislý podgraf.



vrcholy tvořící jednotlivé komponenty:

$\{1,2,3,4\}$

$\{5\}$

$\{6,7\}$

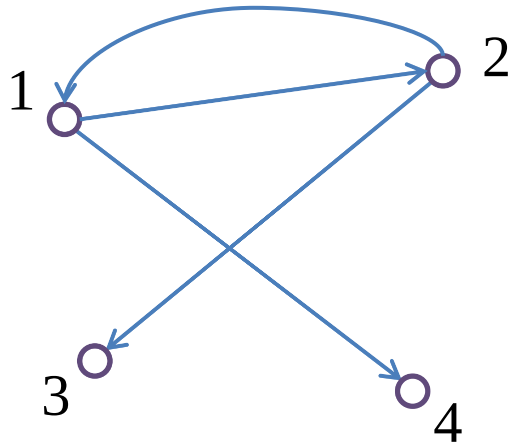
Otázka: Jak definovat pomocí souvislosti strom?

Orientovaný graf

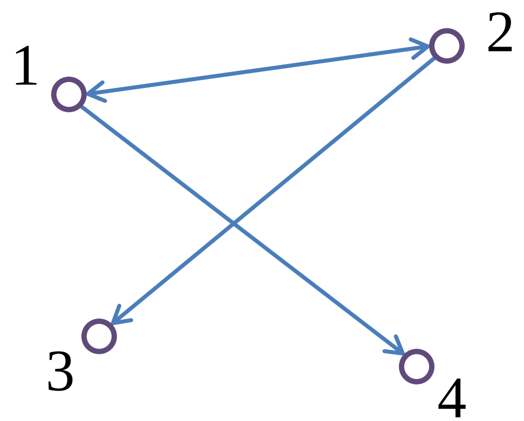
$G = (V, E)$

V … konečná množina vrcholů

$E \subseteq V \times V - \{(v,v) : v \in V\}$ … množina (orientovaných) hran



ekvivalentní schéma:



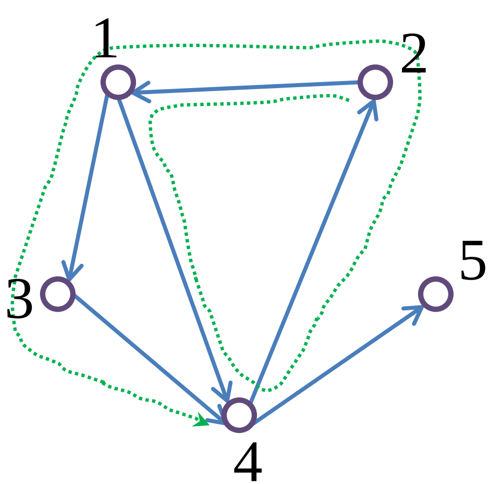
$V = \{1,2,3,4\}$

$E = \{(1,2), (2,1), (1,4), (2,3)\}$

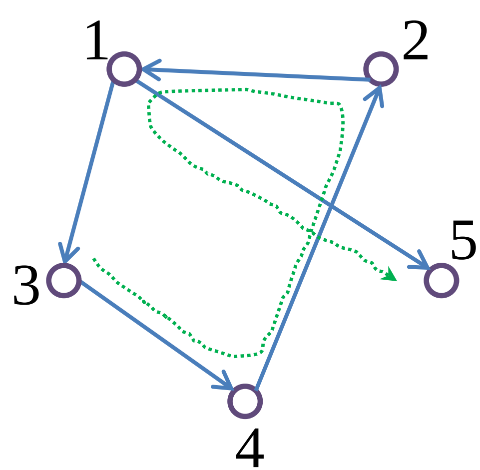
Orientované spojení, cesta a kružnice

- Orientované spojení v grafu $G = (V, E)$: $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$
- Orientovaná cesta je otevřené orientované spojení, ve kterém se neopakuje žádný vrchol.
- Orientovaná kružnice (cyklus) je uzavřené orientované spojení, ve kterém se kromě začátku a konce neopakuje žádný vrchol.

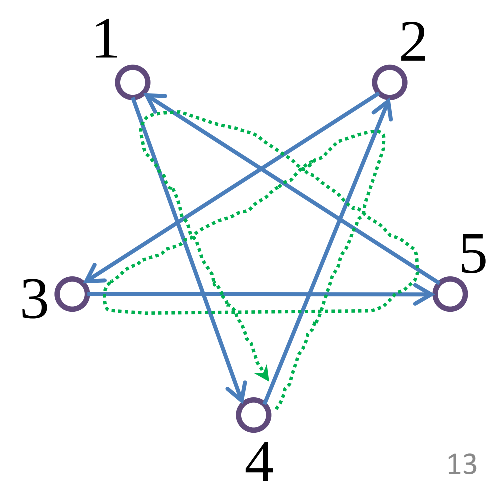
orientované spojení



orientovaná cesta



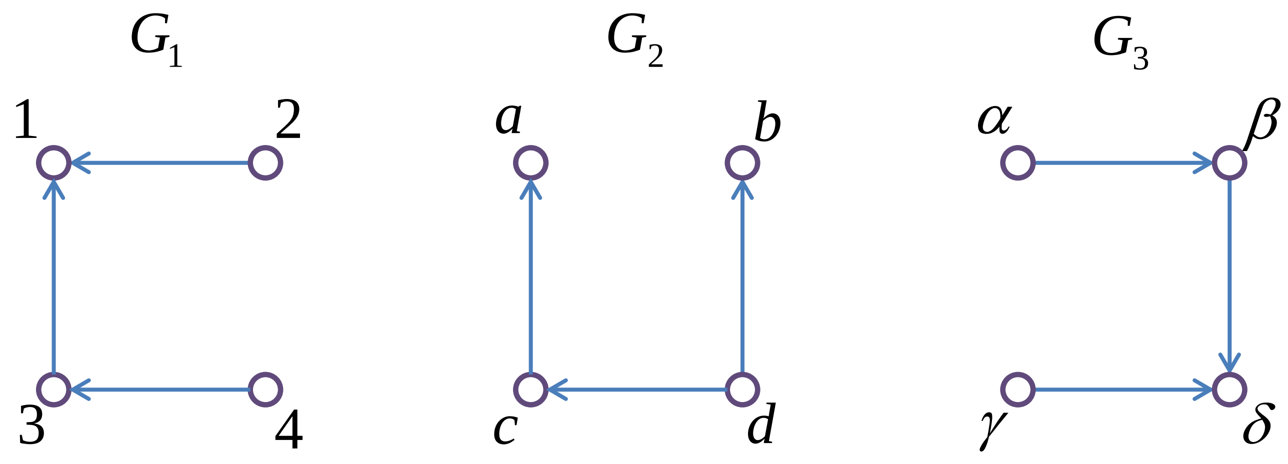
cyklus



Izomorfismus

Orientované grafy $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ nazýváme izomorfní, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f : V_1 \to V_2$ takové, že $(x, y) \in E_1$ právě když $(f(x), f(y)) \in E_2$.

- izomorfismus zachovává orientaci hran



$G_2 \ncong G_1$

$G_2 \ncong G_3$

$G_1 \cong G_3$

$1 \mapsto \delta$

$2 \mapsto \gamma$

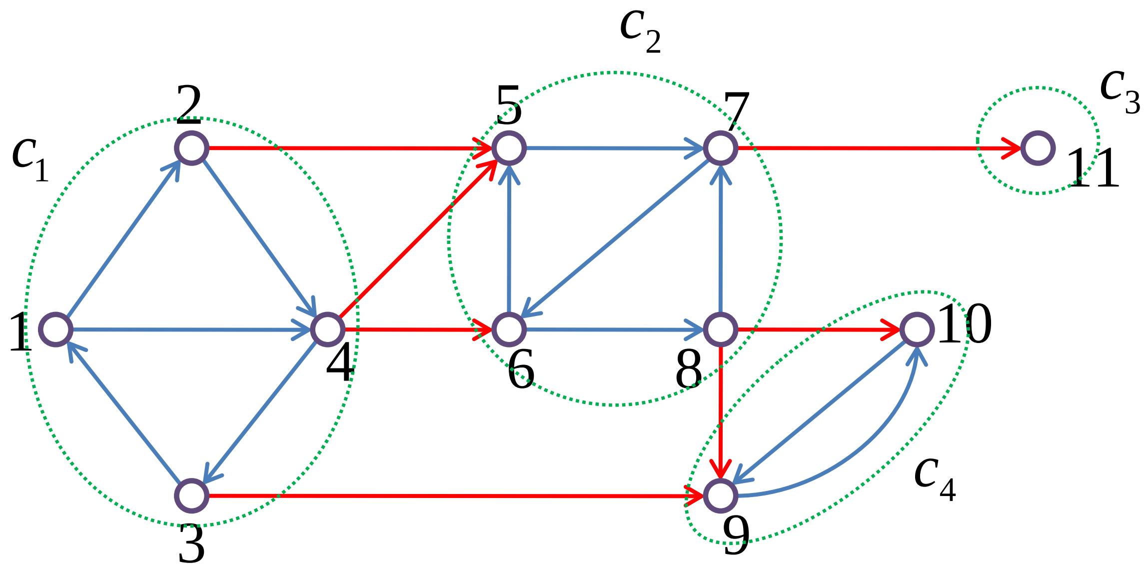
$3 \mapsto \beta$

$4 \mapsto \alpha$

Silně souvislý graf, silné komponenty

• Orientovaný graf nazýváme silně souvislý, právě když pro libovolnou dvojici vrcholů existuje orientované spojení mezi nimi.

• Silná komponenta grafu je každý jeho maximální silně souvislý podgraf.

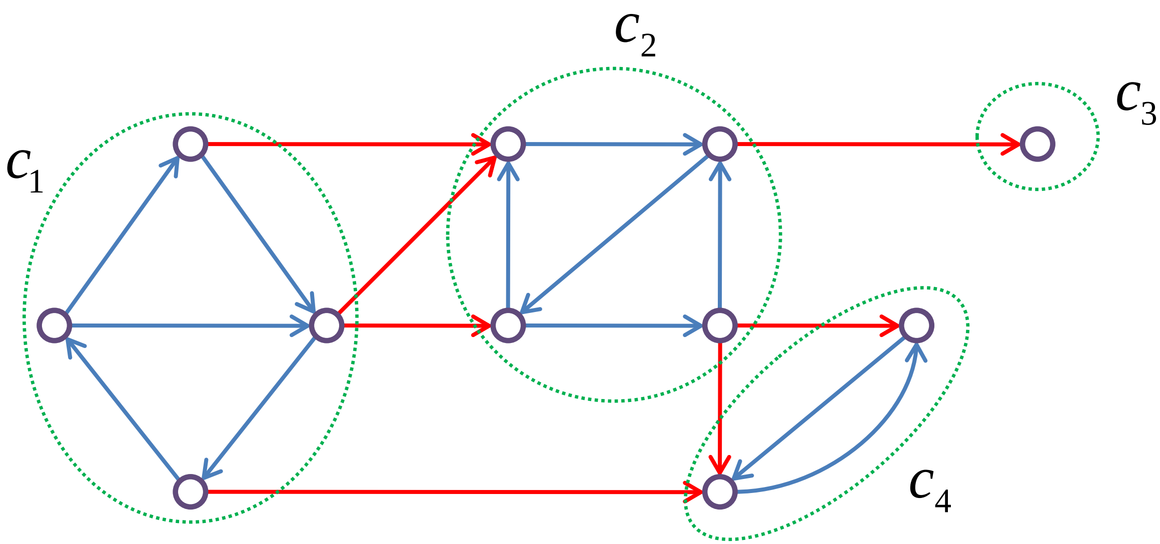


silné komponenty: c_1, c_2, c_3, c_4.

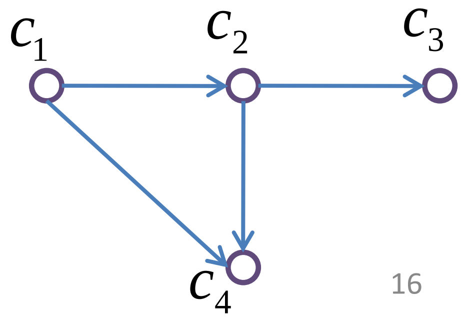
Kondenzace orientovaného grafu

Kondenzace orientovaného grafu G je orientovaný graf $G_c = (V_c, E_c)$, kde:

- vrcholy odpovídají silným komponentám v grafu G
- (c_i, c_j) je hrana v G_c, právě když existuje hrana v G z komponenty c_i do komponenty c_j



kondenzace G_c:



Výstupní a vstupní stupeň vrcholu

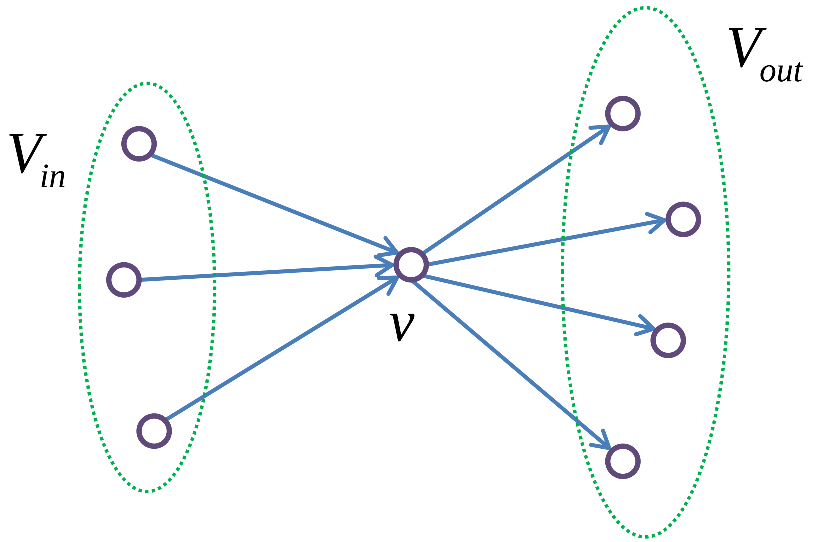
Mějme orientovaný graf $G = (V, E)$.

Vstupní stupeň vrcholu $v \in V$ definujeme:

$$\deg_G^-(v) = \left|\{(u,v) : (u,v) \in E\}\right|$$

a výstupní stupeň definujeme:

$$\deg_G^+(v) = \left|\{(v,u) : (v,u) \in E\}\right|$$



$$\deg_G^-(v) = |V_{in}| = 3$$

$$\deg_G^+(v) = |V_{out}| = 4$$