Opakování, Fourierova transformace

9. září 2011

1 Jednorozměrná Fourierova transformace

Nechť $f(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t \tag{1}$$

nazýváme Fourierovým obrazem funkce $f(t)$.
Alternativní zápis pro $\xi = \frac{\omega}{2\pi}$ je:

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi j \xi t} \mathrm{d}t\,. \tag{2}$$

Inverzní zpětná transformace je pak dána:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega\,, \tag{3}$$

nebo

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{2\pi j \xi t} \mathrm{d}\xi\,. \tag{4}$$

Fourierova transformace funkce $f(t)$ existuje, pokud:

- $f(t)$ má na konečném intervalu konečný počet nespojitostí,
- $f(t)$ má na konečném intervalu konečný počet konečných extrémů,
- $f(t)$ je absolutně integrovatelná.

Tyto podmínky se nazývají Dirichletovými po německém matematikovi Johannu Dirichletovi. Všiměte si, ze ačkoli teoreticky existují funkce, které Dirichletovy podminky nesplňují, v praxi se s nimi nesetkáme.

Pro usnadnění zápisu si ještě definujme Fourierův operátor $\mathcal{F}$ pro přímou $F(\omega) = \mathcal{F}\big(f(t)\big)(\omega)$ i zpětnou $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(F(\omega)\big)(t)$ Fourierovu transformaci.

Příklady funkcí a jejich spekter naleznete na obrazcích 1–3 na konci tohoto dokumentu.

1.1 Vlastnosti

Linearita: $\mathcal{F}\big(af(t)+bg(t)\big) = a\mathcal{F}\big(f(t)\big) + b\mathcal{F}\big(g(t)\big)$.
Symetrie: $F(\omega) = F^*(-\omega)$, F^* je funkce komplexně sdružená k F.
Posun: $\mathcal{F}\big(f(t+t_0)\big) = e^{-j\omega t}\mathcal{F}\big(f(t)\big)$.
Změna měřítka: $\mathcal{F}\big(f(t/a)\big) = |a|\mathcal{F}\big(f\big)(a\omega)$.
Derivace: $\mathcal{F}\big(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)\big) = (j\omega)^n\mathcal{F}\big(f(t)\big)$.
Parsevalova věta (norma): $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}\big(f(t)\big)|^2\mathrm{d}\omega$
Parsevalova věta (skalární součin): $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g^*(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\big(f(t)\big)\mathcal{F}\big(g^*(t)\big)\mathrm{d}\omega$
Konvoluce: $\mathcal{F}\big(f(t)*g(t)\big) = \mathcal{F}\big(f(t)\big)\mathcal{F}\big(g(t)\big)$.
Dualita: je-li $\mathcal{F}\big(f(t)\big) = F(\omega)$ pak $\mathcal{F}\big(F(t)\big) = 2\pi f(-\omega)$

1.2 Význam

Fourierova transformace je "projekce" funkce $f(x)$ do funkcí $e^{-j\omega t}$. Abychom si objasnili pojem "projekce", je třeba definovat skalární součin na prostoru funkcí.

1.2.1 Skalární součin

Dobře známý skalární součin ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ je definován:

$$s = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,. \tag{5}$$

Skalár s je projekcí vektoru $\mathbf{x}$ do vektoru $\mathbf{y}$. Pokud vektory $\mathbf{b}_i$, $i = 1\ldots n$ tvoří bázi v $\mathbb{R}^n$, pak

$$s_i^* = \mathbf{x}\cdot\mathbf{b}_i \tag{6}$$

pro $i = 1\ldots n$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $\mathbf{b}$.

V prostoru funkcí je skalární součin definován

$$s = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t\,. \tag{7}$$

Všimněte si analogie mezi vektorovým prostorem a prostorem funkcí. Zápis skalárního součinu je velmi podobný, jen sumu nahradil integrál. Pokud jsou funkce $g(i,t)$ bází vektorového prostoru, pak

$$F(i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(i,t)\mathrm{d}t \tag{8}$$

je vyjádření funkce $f(x)$ v bázi g.

Položme teď $i = \omega$ a $g(i,t) = e^{-j\omega t}$ a máme:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\,. \tag{9}$$

1.3 Diracův impuls

Protoze už víme co je skalární sučin na prostoru funkcí, můžeme definovat Diracův impulz $\delta(t-t_0)$ pomocí vztahu:

$$f(t_0) = f(t) \cdot \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t\,. \tag{10}$$

S využitím definice pak snadno spočítáme Fourierovu transformaci Diracova impulsu:

$$\mathcal{F}\big(\delta(t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = e^{-j\omega t_0}\,. \tag{11}$$

S pomocí rovnice 11 a dalsšch vlastností Fourierovy transformace (kapitola 1.1) pak můžeme vypočítat třeba obrazy dalších funkcí, například $\sin(t)$.

1.4 Příklad: $\mathcal{F}\big(\sin(t)\big)$

Nejprve si spočtěme $\mathcal{F}\big(e^{-jtt_0}\big)$, bude se nám později hodit. Užitím principu duality na rovnici (11) dostaneme

$$\mathcal{F}\big(e^{-jtt_0}\big) = 2\pi\delta(-t_0-\omega) = 2\pi\delta(t_0+\omega)\,. \tag{12}$$

Funkci $\sin(t)$ si přepíšeme pomicí kompexních exponenciel $\sin(t) = \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})$, a využijeme linearitu Fourierovy transformace:

$$\mathcal{F}\big(\sin(t)\big) = \frac{1}{2j}\Big[\mathcal{F}\big(e^{jt}\big) - \mathcal{F}\big(e^{-jt}\big)\Big]\,. \tag{13}$$

Řešení dostaneme prostým dosazením rovnice (12) a $t_0 = 1$ do rovnice (13):

$$\mathcal{F}\big(\sin(t)\big) = \frac{\pi}{j}\Big[\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\Big]\,. \tag{14}$$

Obdobně bychom mohli získat i obrazy dalších funkcí.

2 Dvourozměrná Fourierova transformace

Nechť $f(t)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pak

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-2\pi j(xu+yv)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{15}$$

nazýváme fourierovým obrazem funkce $f(x,y)$.
Zpětná transformace pak:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{2\pi j(xu+yv)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{16}$$

Vektorový zápis rovnice (15) s použitím vektoru souřadnic $\mathbf{x}$ a vektoru frekvencí $\boldsymbol{\omega}$ je

$$F(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}\mathbf{x}\,. \tag{17}$$

Rovnice (17) je zároveň definicí Fourierovy transformace pro libovolný počet dimenzí. Obecná inverze je tedy analogicky k předchozímu

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\,. \tag{18}$$

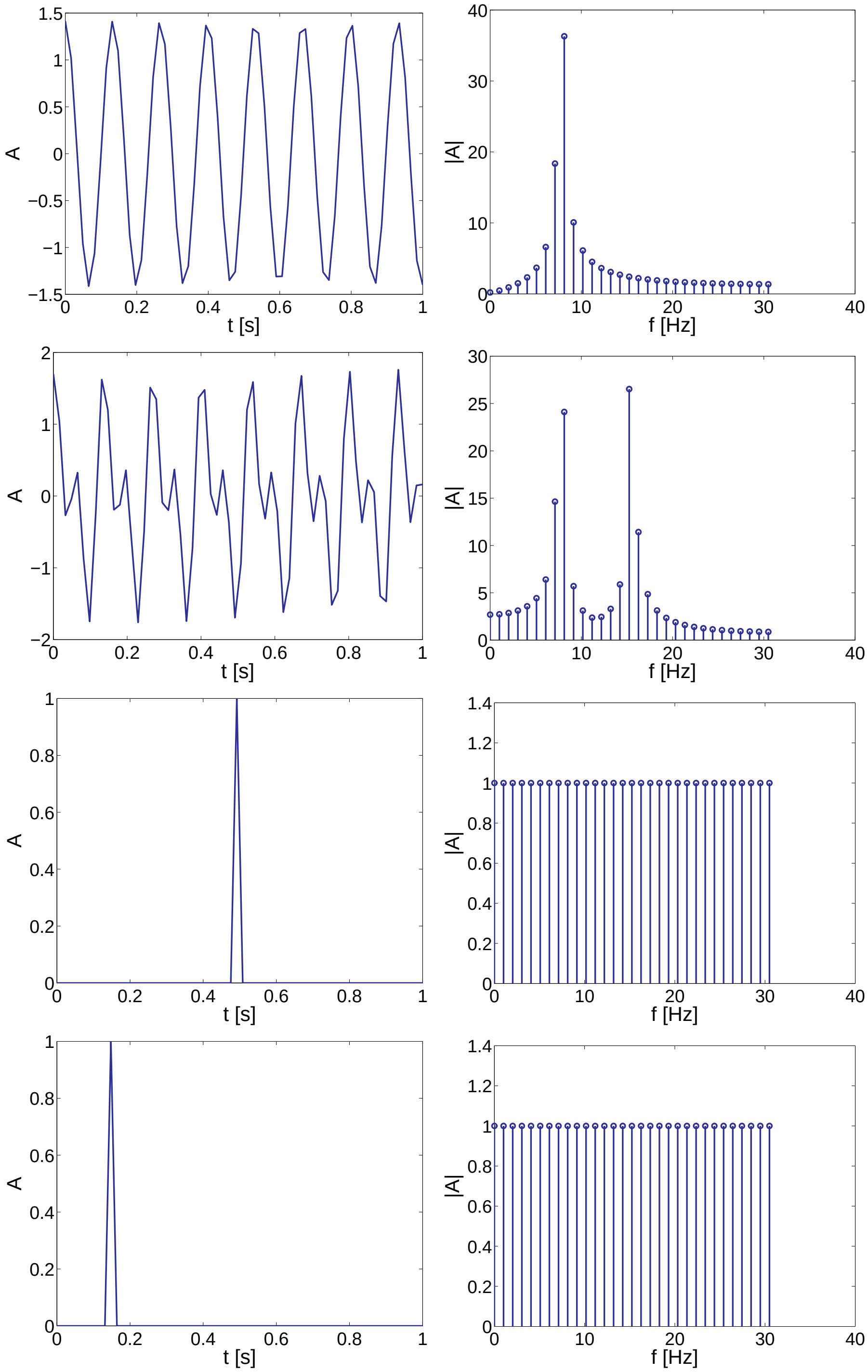
2.1 Vlastnosti

Linearita: $\mathcal{F}\big(Af(x,y)\big) = A\mathcal{F}\big(f(x)\big)$.
Separabilita: pokud $f(x,y) = f(x)f(y)$ pak $\mathcal{F}\big(f(x,y)\big) = \mathcal{F}\big(f(x)\big)\mathcal{F}\big(f(x)\big)$.
Věta o centrálním řezu říká že řez 2D Fourierovou transformací obrazu pod úhlem ϕ je 1D Fourierovou transformací projekce téhož obrazu pod úhlem ϕ rovnicí se tento fakt dá zapsat:

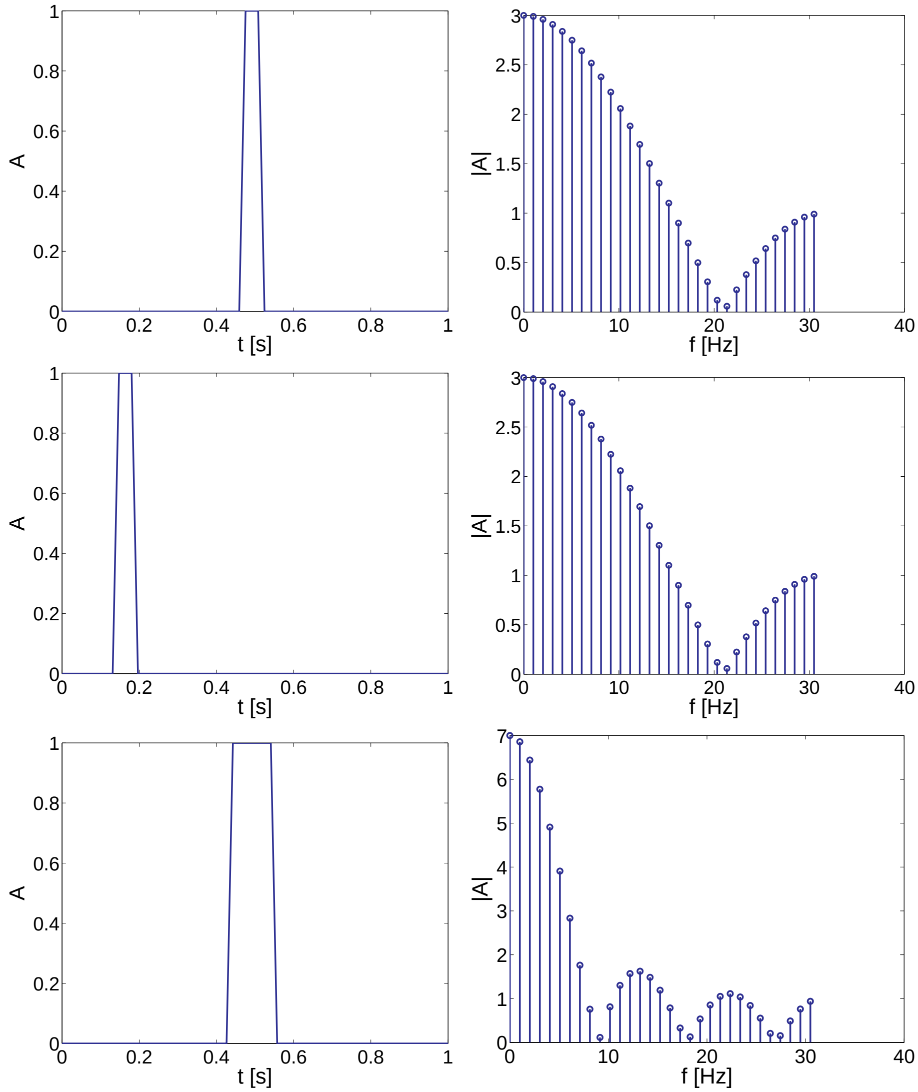
$$\hat{P}_{\phi}(u,v) = \mathcal{F}\big(o(\xi,\nu)\big)\,. \tag{19}$$

Příklady 2D funkcí a jejich spekter naleznete na obrazcích 4–5 na konci tohoto dokumentu.

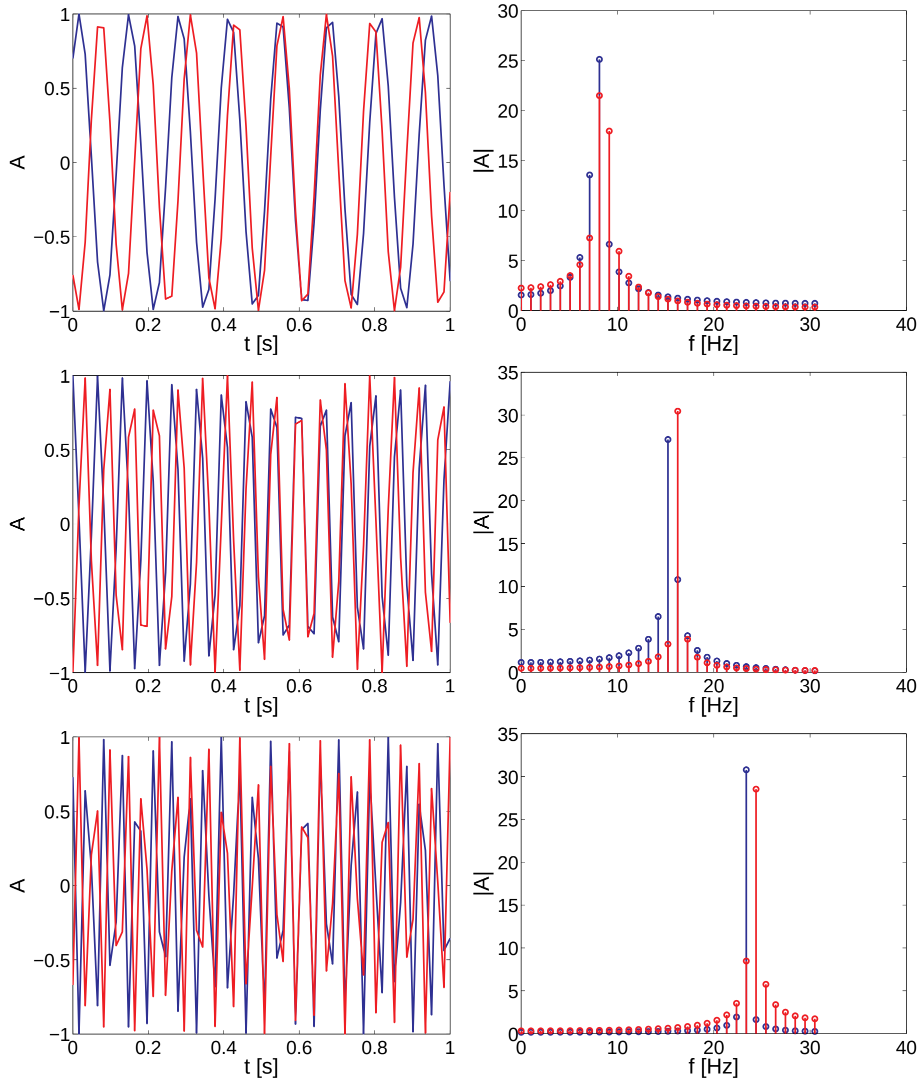
http://nrm.wikipedia.org/wiki/File:Stones-in-water.jpg http://www.renorock.net/images/Plaster



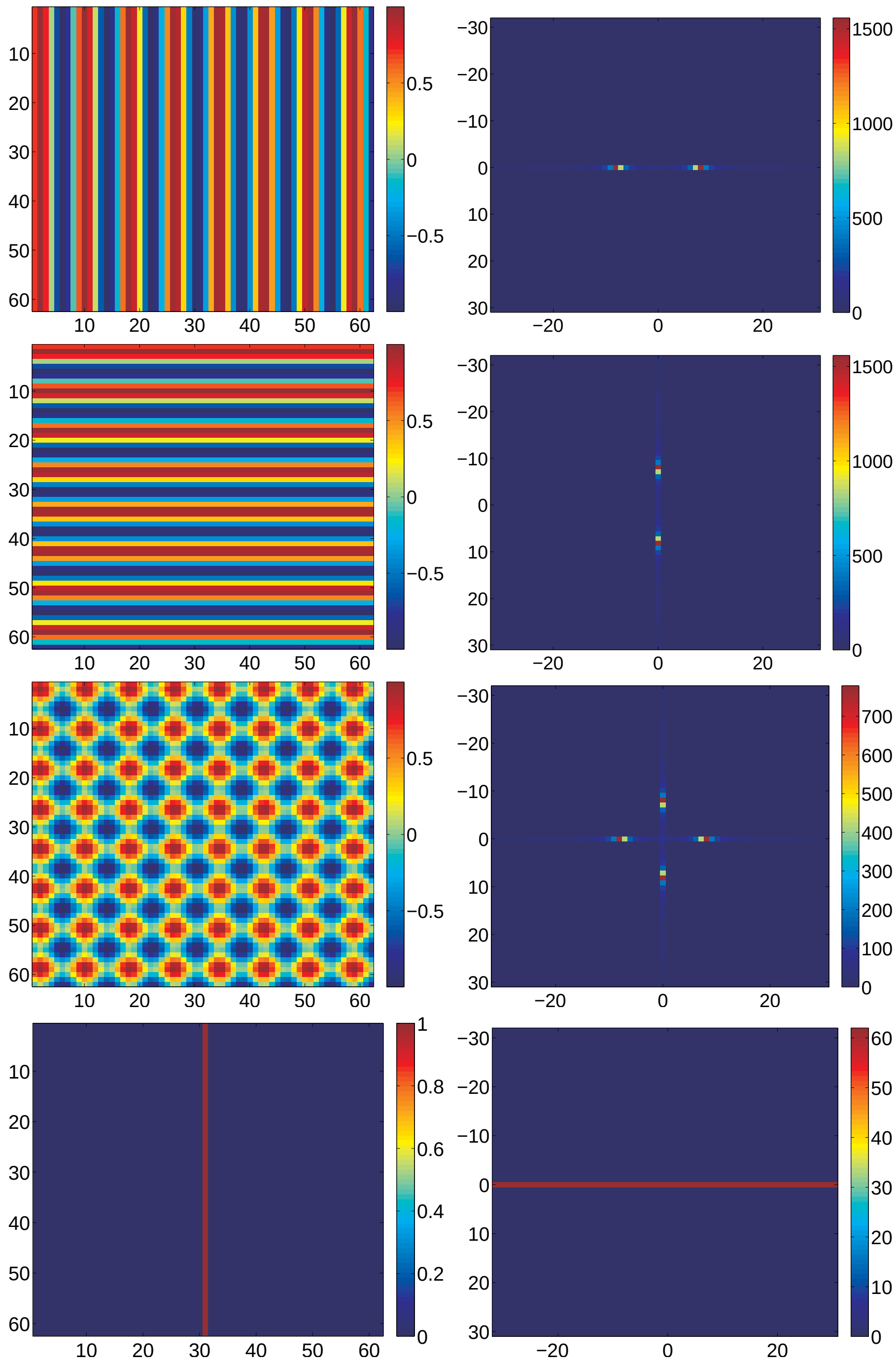
Obrázek 1: Diskrétní 1D funkce a jejich spektra—část 1



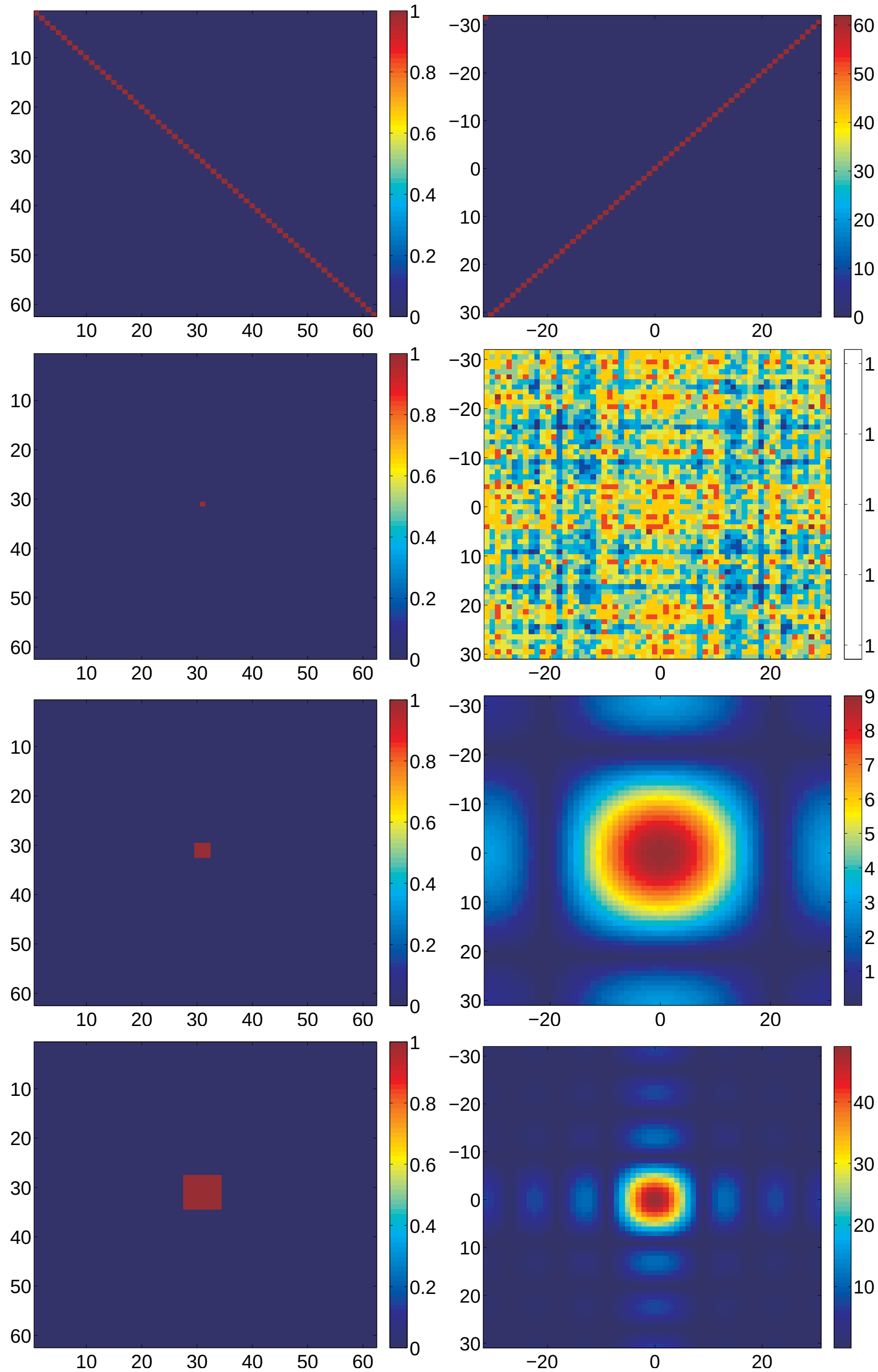
Obrázek 2: Diskrétní 1D funkce a jejich spektra—část 2



Obrázek 3: Diskrétní 1D funkce a jejich spektra—aliasing



Obrázek 4: Diskrétní 2D funkce a jejich spektra—část 1



Obrázek 5: Diskrétní 2D funkce a jejich spektra—část 2