Statistika a spolehlivost v lékařství
4. cvičení, 1. dubna 2014

Markovovy modely

Výpočet spolehlivosti opravovaných soustav nebo soustav se zálohováním bývá složitý. Pokud mají doby poruch a doby obnov exponenciální rozdělení, je výhodné použít Markovův model. V teorii Markovových procesů se omezíme na základní vlastnosti potřebné pro výpočet spolehlivosti soustav, teorie Markovových procesů je popsána v početné literatuře.

Markovovy modely jsou funkce dvou náhodných proměnných, stavu soustavy a doby nebo jiné veličiny, v závislosti na které stav sledujeme. Obě veličiny mohou být spojité nebo diskrétní, tomu odpovídají čtyři druhy modelů.

Def: Markovův řetězec : model s diskrétními stavy a diskrétním časem.
Def: Markovův proces : model s diskrétními stavy a spojitým časem.
Def: Markovův model : množina pravděpodobností udávajících pravděpodobnost přechodu z nějakého výchozího stavu do nějakého následujícího stavu. Pravděpodobnost závisí pouze na těchto dvou stavech a je zcela nezávislá na všech minulých stavech, kterými proces prošel.

Pro sestavení Markovova modelu se nejprve definují vzájemně se vylučující stavy soustavy. Soustava Markovových stavových rovnic popisuje pravděpodobnostní přechody z počátečních stavů do konečných stavů. Za předpokladů :

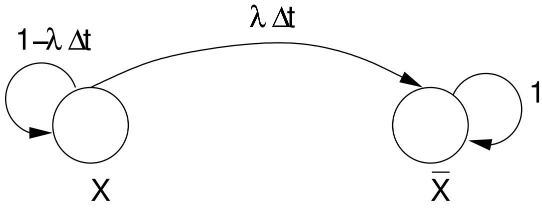
1. Pravděpodobnost přechodu z jednoho stavu do jiného v časovém intervalu Δt je rovna součinu $\lambda_i(t) \cdot \Delta t$, kde $\lambda_i(t)$ je intenzita pravděpodobnosti přechodu (hazard) příslušná ke dvěma stavům, mezi kterými přechod probíhá.

2. Pravděpodobnosti více než jednoho přechodu v časovém intervalu Δt jsou řádově menší a lze je zanedbat.

Def: Homogenní model : všechna $\lambda_i(t) = \lambda_i$ jsou konstantní.
Def: Nehomogenní model : některá $\lambda_i(t)$ je funkcí času.

Markovovy modely lze názorně vyjádřit orientovaným grafem (Markovův graf). Uzly grafu představují stavy soustavy, orientované hrany grafu označené pravděpodobnostmi přechodu udávají možné přechody.

Mějme soustavu s jediným neopravitelným prvkem. Pravděpodobnost bezporuchového stavu x v čase $t + \Delta t$ označme $P_x(t + \Delta t)$. Podobně pravděpodobnost, že soustava bude v poruchovém stavu $\overline{x}$ označíme $P_{\overline{x}}(t + \Delta t)$.



Markovův graf

Odvození matice pravděpodobností přechodu

Pro pravděpodobnosti jednotlivých stavů napíšeme rovnice

$$\begin{aligned} P_x(t + \Delta t) &= \quad (1 - \lambda(t)\Delta t) \cdot P_x(t), \\ P_{\overline{x}}(t + \Delta t) &= \lambda(t)\Delta t \cdot P_x(t) + P_{\overline{x}}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

které přepíšeme do maticové rovnice

$$\begin{bmatrix} P_x(t + \Delta t) \\ P_{\overline{x}}(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda(t)\Delta t & 0 \\ \lambda(t)\Delta t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_{\overline{x}}(t) \end{bmatrix}.$$

nebo zkráceně:

$$p(t + \Delta t) = \mathbb{P}p(t),$$

kde $\mathbb{P}$ je *matice pravděpodobností přechodu*, a vektor $p(t)$ obsahuje pravděpodobnosti jednotlivých stavů v čase t, tedy v tomto případě

$$p(t) = \begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_{\overline{x}}(t) \end{bmatrix}$$

Matice pravděpodobností přechodu $\mathbb{P}$ má součet v každém sloupci roven 1.

Poznámka: *Rovnice lze zapsat i obráceně, pomocí řádkového vektoru pravděpodobností* $p'(t) = [p_1(t), \ldots, p_n(t)]$ *(*$p_i(t)$ *je pravděpodobnost stavu* i*) a matice* $\mathbb{P}'$*, pro kterou platí* $\mathbb{P}' = \mathbb{P}^{\mathrm{T}}$*. V takovém případě se následující stav počítá násobením zleva:*

$$p'(t + \Delta t) = p'(t)\mathbb{P}'$$

Pro matici $\mathbb{P}'$ *samozrejmě platí, že součet pravděpodobností v řádcích musí být roven 1. Pro výpočet s Markovovými modely je jedno, který způsob zápisu matice pravděpodobností přechodů se použije, je však třeba dbát na použití správných vektorů a správného násobení matice.*

Odvození matice intenzit

Rovnice (1) lze dále upravit na tvar :

$$\begin{aligned} \frac{P_x(t + \Delta t) - P_x(t)}{\Delta t} &= -\lambda(t)P_x(t), \\ \frac{P_{\overline{x}}(t + \Delta t) - P_{\overline{x}}(t)}{\Delta t} &= \lambda(t)P_x(t). \end{aligned}$$

Zavedením limity pro $\Delta t \to 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_x(t+\Delta t) - P_x(t)}{\Delta t} &= -\lambda(t) P_x(t), \\
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{\overline{x}}(t+\Delta t) - P_{\overline{x}}(t)}{\Delta t} &= \lambda(t) P_x(t),
\end{aligned}$$

získáme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
\dot{P_x} &= -\lambda(t) P_x(t), \\
\dot{P_{\overline{x}}} &= \lambda(t) P_x(t).
\end{aligned}$$

Obvyklé počáteční podmínky jsou $P_x(0) = 1$ a $P_{\overline{x}}(0) = 0$. První rovnici lze řešit samostatně

$$\begin{aligned}
\frac{dP_x}{dt} &= -\lambda(t) P_x(t), \\
\frac{1}{P_x(t)} dP_x &= -\lambda(t) dt, \\
\ln P_x(t) &= K \int_0^t -\lambda(t) dt, \\
P_x(t) &= K e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}.
\end{aligned}$$

Dosazením $P_x(0) = 1$ získáme vztah pro pravděpodobnost bezporuchového provozu

$$R(t) = P_x(t) = e^{\int_0^t -\lambda(t) dt}.$$

Řešením druhé rovnice dostaneme

$$Q(t) = P_{\overline{x}}(t) = 1 - e^{\int_0^t -\lambda(t) dt}.$$

Pro $\lambda(t) = \lambda$ vyjádříme soustavu diferenciálních rovnic maticovým zápisem

$$\begin{bmatrix} \dot{P_x}(t) \\ \dot{P_{\overline{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_{\overline{x}}(t) \end{bmatrix}.$$

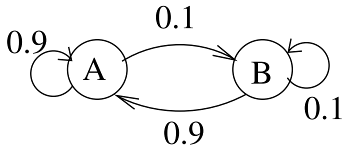
Získáme *matici intenzit*. Matice intenzit není stochastická, součet prvků v každém sloupci je roven nule. Matici intenzit lze také napsat přímo z Markovova grafu.

Limitní vektor

Matice pravděpodobností $\mathbb{P}$ popisuje, jaké jsou pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými stavy. Toho můžeme využít k výpočtu budoucích stavů $p(t+\Delta t)$ na základě předchozích stavů. Pro zjednodušení zápisu budeme značit následující stav $p(k+1) = p(t+\Delta t)$. Následující stav tedy může získat jako $p(k+1) = \mathbb{P}p(k)$, tedy:

$$\begin{aligned}
p(1) &= \mathbb{P}p(0) \\
p(2) &= \mathbb{P}p(1) = \mathbb{P}\mathbb{P}p(0) \\
&\vdots \\
p(k) &= \mathbb{P}^k p(0)
\end{aligned}$$

Uvažujme jednoduchý model:



Příslušná matice pravděpodobností přechodu je

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

a vektor pravdpodobností $p(t)$ je

$$p(t) = \begin{bmatrix} P_A(t) \\ P_B(t) \end{bmatrix}$$

Jaké budou pravděpodobnosti stavů v čase $k = 2$, pokud $p(0) = [1, 0]^T$?

$$p(1) = \mathbb{P}p(0) = \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$p(2) = \mathbb{P}p(1) = \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

V čase $k = 2$ budou tedy pravděpodobnosti stavů $p(2) = [0.9, 0.1]^{\mathrm{T}}$. Vidíme, že tyto pravděpodobnosti se nebudou se zvyšujícím časem k měnit. Vektor $[0.9, 0.1]^{\mathrm{T}}$ je tedy limitním vektorem modelu. Pro limitní vektor $x(k)$ platí, že v něm soustava setrvává, tedy jeho následující stav $x(k+1)$ bude stejný jako $x(k)$:

Limitní vektor x tedy můžeme vypočítat jako řešení soustavy

$$x = \mathbb{P}x$$

nebo též

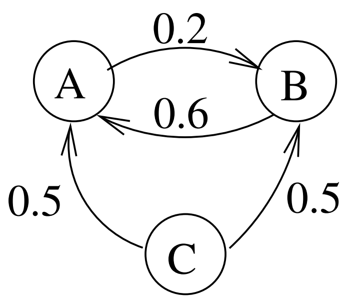
$$ax = \mathbb{P}x,$$

kde a je vlastní číslo matice $\mathbb{P}$ a x je její vlastní vektor. Lititní vektor Markovova modelu můžeme je tedy vlastním vektorem $\mathbb{P}$, který náleží vlastnímu číslu $a = 1$.

V tomto případě je $x = [0.9, 0.1]^{\mathrm{T}}$ je vlastním vektorem $\mathbb{P}$ a říká nám, že v 90% bude model ve stavu A, což není předvapivé, neboť pravděpodobnost setrvání ve stavu A je 0.9, navíc pravděpodobnost přechodu z B do A je taktéž 0.9.

▶ **Příklad 1 (Míče)** *Mějme tři hráče (A, B, C). Pokud má míč A, tak ho s pravděpodobností 0.2 hodí hráči B, pokud má míč B, tak ho hodí s pravděpodobností 0.6 hráči A. Hráč C hází míč ostatním dvěma se stejnou pravděpodobností. Jaká je pravděpodobnost, že hráči mají míče v čase $k = 1$, pokud v čase $k = 0$ budou mít stejnou pravděpodobnost, že míč mají? Jaký je limitní stav?*

Řešení:



Matice pravděpodobností předchodu je

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

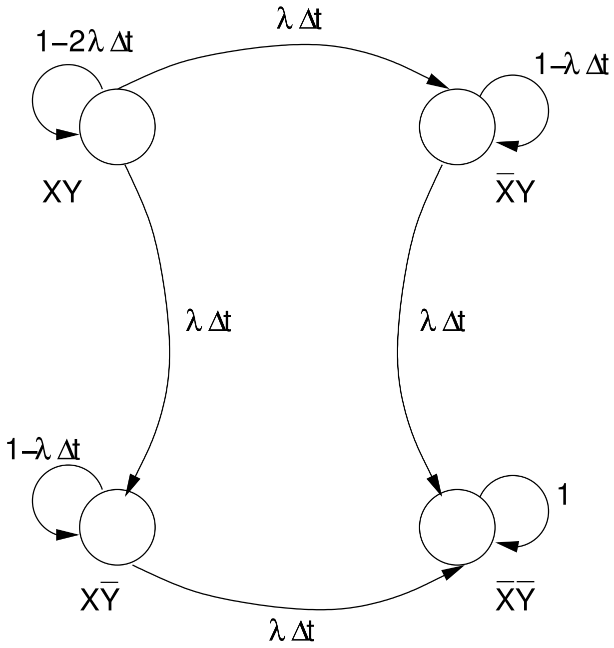
a počáteční vektor $p(0) = [1/3, 1/3, 1/3]^{\mathrm{T}}$.

$$p(1) = \mathbb{P}p(0) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.633 \\ 0.367 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Limitní vektor dostaneme jako vlastní vektor matice $\mathbb{P}$ náležící vlastnímu číslu 1. V tomto případě je limitní vektor $x = [0.75, 0.25, 0]^{\mathrm{T}}$. V 75% případů bude mít míč hráč A.

► **Příklad 2 (Soustava 2 prvky, každý prvek 2 stavy)** *Mějme soustavu se dvěma neopravitelnými prvky (X a Y), každý prvek má dva stavy (bezporuchový stav, porucha), intenzita poruch je pro oba prvky stejná a konstantní $\lambda_i(t) = \lambda$. Přechod ze stavu XY do stavu $\overline{XY}$ se nepředpokládá a prakticky nenastane. Nakreslete Markovův graf, sestavte matici pravděpodobností přechodu a matici intenzit.*

Řešení: Markovův graf



Matice pravděpodobností přechodu:

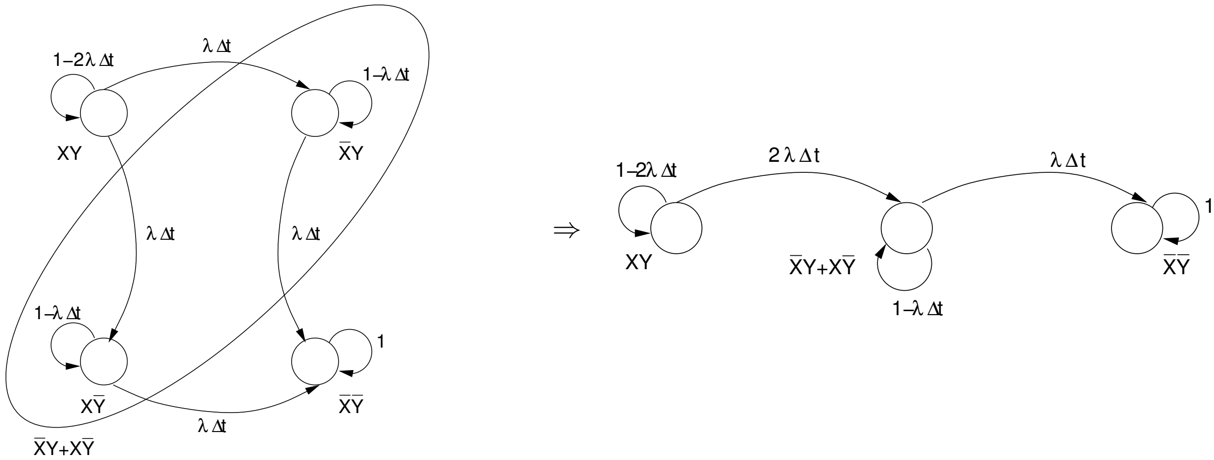
$$\begin{bmatrix} P_{XY} \\ P_{\overline{X}Y} \\ P_{X\overline{Y}} \\ P_{\overline{XY}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t & 0 & 0 \\ \lambda\Delta t & 0 & 1-\lambda\Delta t & 0 \\ 0 & \lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{XY} \\ P_{\overline{X}Y} \\ P_{X\overline{Y}} \\ P_{\overline{XY}} \end{bmatrix}.$$

Matice intenzit:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{XY} \\ \dot{P}_{\overline{X}Y} \\ \dot{P}_{X\overline{Y}} \\ \dot{P}_{\overline{XY}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{XY} \\ P_{\overline{X}Y} \\ P_{X\overline{Y}} \\ P_{\overline{XY}} \end{bmatrix}.$$

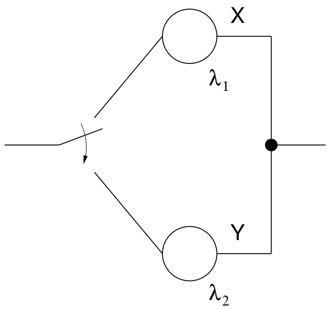
Slučování stavů

Složitost Markovova modelu závisí na počtu stavů soustavy. Soustava s m stavy bude popsána m diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Pro soustavu s n dvoustavovými prvky je počet stavů soustavy $m = 2^n$. Obecně pro prvky s k možnými stavy je $m = k^n$. Počet diferenciálních rovnic roste velmi rychle. Při výpočtu bezporuchovosti soustavy můžeme rozlišovat pouze stavy určené počtem porouchaných prvků a nezajímat se o to, které prvky mají poruchu. Počet stavů soustavy a počet diferenciálních rovnic se tím zmenší z 2^n na $n+1$. Zjednodušení ukážeme na předchozím příkladě. Stavy $X\overline{Y}$, $\overline{X}Y$ sloučíme do jediného stavu $X\overline{Y} + \overline{X}Y$.

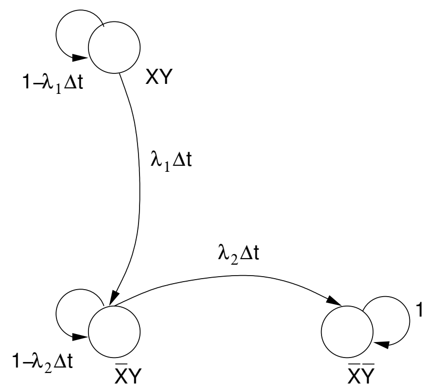


Ze stavu XY do stavu $X\overline{Y} + \overline{X}Y$ se lze dostat buď poruchou prvku X nebo poruchou prvku Y, proto pravděpodobnosti přechodu sčítáme. Ze stavu $X\overline{Y} + \overline{X}Y$ do stavu $\overline{XY}$ se dostane v případě, že zbylý prvek budu mít poruchu, proto je pravděpodobnost přechodu rovna $\lambda\Delta t$ (pouze jeden z nich může mít poruchu). Snadno lze nahlédnout, že aby došlo k zjednodušení musejí být intenzity ze stavů $\overline{X}Y$ nebo $X\overline{Y}$ do $\overline{XY}$ stejné. Intenzity ze stavu XY do stavu $\overline{X}Y$ a $X\overline{Y}$ mohou být různé.

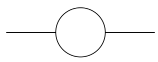
► **Příklad 3 (Zálohování s přepínáním)** *Mějme soustavu se zálohováním přepínáním, prvek v záloze nestárne. Při poruše prvku X dojde k přepnutí na prvek Y. U prvku Y tedy nenastane porucha dříve než u prvku X. Intenzita poruchy prvku X je λ_1 a intenzita poruchy prvku Y je λ_2. Nakreslete Markovův graf.*



Řešení:

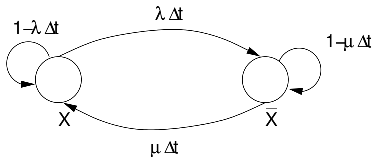


▶ **Příklad 4 (Soustava s opravou)** *Mějme jedno prvkovou soustavu s opravou. Porucha nastává s intenzitou λ a porouchaný prvek je opraven s intenzitou μ. Nakreslete Markovův graf, sestavte matici intenzit a vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu a pravděpodobnost poruchy v čase t $P_x(t) =?$ a $P_{\overline{x}} =?$ pro počáteční podmínky $P_x(0) = 1$ a $P_{\overline{x}}(0) = 0$.*



μ ... *oprava*
λ ... *porucha*

Řešení:



$$\begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_{\overline{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_{\overline{x}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} P_x \\ P_{\overline{x}} \end{bmatrix}$$

výpočet vlastních čísel $det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}) = 0$:

$$\begin{bmatrix} -\lambda - s & \mu \\ \lambda & -\mu - s \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow s(s + \lambda + \mu) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} s_1 = -(\lambda + \mu) \\ s_2 = 0 \end{array}$$

výpočet vlastních vektorů

s_1 :

$$\begin{bmatrix} -\lambda + \mu + \lambda & \mu \\ \lambda & -\mu + \mu - \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mu & \mu \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t.$$

s_2 :

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda} \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

$$\begin{aligned} P_x &= C_1 e^{-(\mu+\lambda)t} + C_2 \frac{\mu}{\lambda} \\ P_{\overline{x}} &= -C_1 e^{-(\mu+\lambda)t} + C_2 \end{aligned}$$

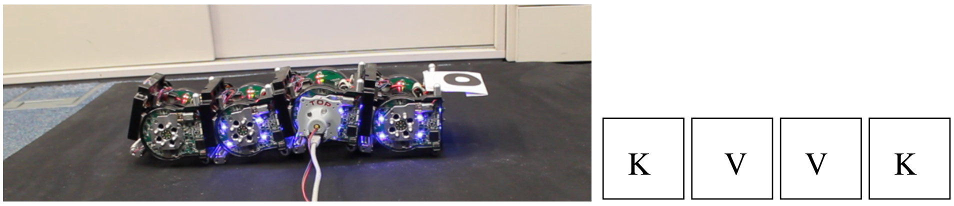
počáteční podmínky :

$$\begin{array}{lll} P_{\overline{x}}(0)=0 & C_2-C_1=0 & \Rightarrow \quad C_1=C_2 \\ P_x(t)=1 & C_2\frac{\mu}{\lambda}+C_1=0 \sim C_1(\frac{\mu+\lambda}{\lambda})=1 & \Rightarrow \quad C_1=\frac{\lambda}{\mu+\lambda} \end{array}$$

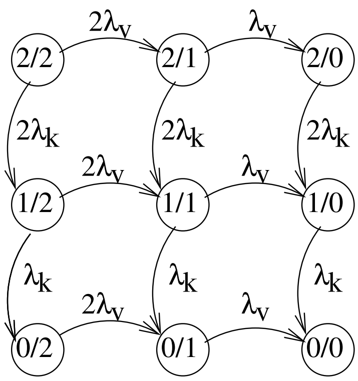
$$\begin{aligned} P_x(t) &= \frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda} \\ P_{\overline{x}}(0) &= -\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}. \end{aligned}$$

▶ **Příklad 5** *Modulární robot typu "had" je složen ze 4 modulů. Krajní moduly (označené k) jsou vybaveny kamerou a mohou tak sloužit k navigace směrem k napájecím zásuvkám. Robot je schopen pohybovat se v prostředí i bez těchto modulů, ale pro navigaci směrem k napájecím zásuvkám (=zdroj energie) je nezbytný alespoň jeden k-modul. Moduly jsou dvoustavové (funfuje/nefunguje). Vytvořte Markovův graf a určete*

- *Jaká je pravděpodobnost, že se robot může hýbat (musí být funkční alespon 2 moduly)?*
- *Jaká je pravděpodobnost, že robot může dosáhnout zásuky (musí být funkční alespoň 2 moduly a alespoň jeden z nich musí být k-modul)?*



Řešení: V tomto případě stačí rozlišovat mezi vnitřními v-moduly a krajními moduly k-moduly. Každý stav Markova grafu bude obsahovat počet funkčních modulu každého typu, stavy ónáčíme stylem "počet k-modulů/ počet v-modulů", např. stav 2/1 značí, že fungují 2 krajní roboty a 1 vnitřní robot. Graf pak bude vypadat takto:

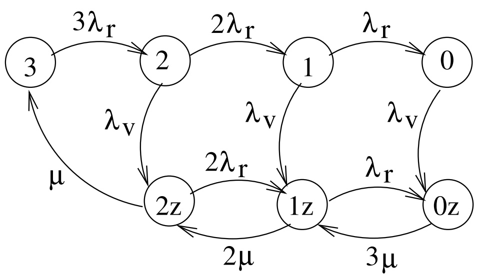


Pravděpodobnost, že se robot hýbe: $P(t) = P_{2/2}(t) + P_{2/1}(t) + P_{2/0}(t) + P_{1/2}(t) + P_{1/1}(t) + P_{0/2}(t)$. Pravděpodobnost, že může dosáhnout zásuvky: $P(t) = P_{2/2}(t) + P2/1(t) + P_{2/0}(t) + P_{1/2}(t) + P_{1/1}(t)$

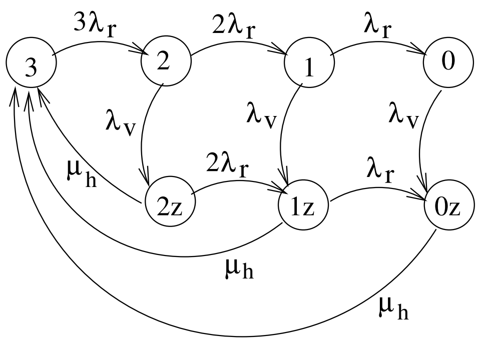
▶ **Příklad 6** *V místnosti jsou tři radiátory (λ_r je intenzita poruchy jednoho radiátoru). Do místnosti chodí vrátný. V případě, že je některý radiátor rozbitý, provede záznam v knize závad. Tuto knihu čte opravář a v případě, kdy je v knize záznam, jde do místosti radiátory opravit.*

- *Sestavte Markovův graf pro případ, že opravář opravuje radiátory postupně s intenzitou μ*
- *Sestavte Markovův graf s uvažováním hromadných oprav (s intenzitou μ_h).*

Řešení: Není třeba rozlišovat mezi jednotlivými radiátory, můžeme tedy jen počítat, kolik je funkčních a kolik rozbitých. Označíme stavy buď jen číslem, které vyjadřuje počet funkčních radiátorů, nebo přidáme 'z', což značí, že jsou existuje záznam v knize závad. Např. $2z$ označuje stav, ve které jsou 2 radiátory funkční a existuje záznam v knize závad.
Poznámky:
1. při postupných opravách (levý obrázek) se zvyšuje pravděpodobnost opravy při více rozbitých radiátorech (3μ, 2μ), což lze interpretovat tak, že pravděpodobnost, že opravář přijde do místnosti je závislá na počtu záznamů (relevantních k dané místnosti) v knize závad.
2. při hromadné opravě jsou vyměněny všechny rozbité radiátory najednou, pravděpodobnost opravy je tedy nezávislá na jejich počtu (proto jsou na hranách pouze μ_h).



Postupné opravy

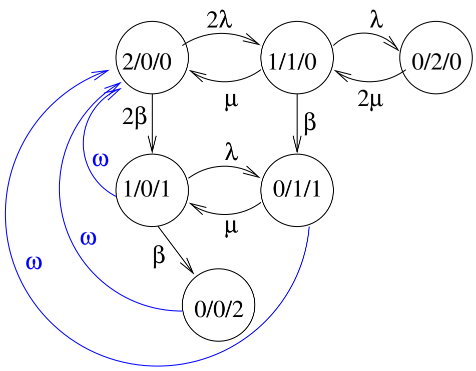


Hromadné opravy

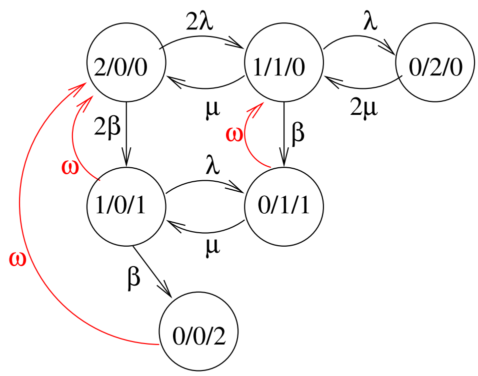
▶ **Příklad 7** *Jedinou možností pro útěk z vězení je ventilační šachta, ve které jsou umístěny dva ventilátory. Utéci lze pouze v případě, kdy oba ventilátory stojí. Každý z ventilátorů se s intenzitou λ, nezávisle na druhém ventilátoru zastavuje a poté se s intenzitou μ zase rozeběhne (zastavování a rozběh je dáno potřebou regulovat výměnu vzduchu v celách na základě teploty a obsahuje CO_2). Běžící ventilátor se může s intenzitou β porouchat, tj. trvale zastavit. Ventilátory jsou opravovány technikem, který s intenzitou ω opraví všechny porouchané ventilátory najednou.*

- *Sestrojte Markovův graf.*
- *Napiště soustavu diferenciálních rovnic.*
- *Vyjádřete pravděpodobnost, že je jeden ventilátor funkční (tj, že běží).*
- *Jaká je pravděpodobnost, že je vězňům podaří utéct ventilační šachtou, pokud víme, že pravděpodobnost útěku z areálu veznice je $p_{\text{útěk}} = 0.01$?*

Řešení: Před řešením je dobré si ujasnit, jaké stavy může jeden ventilátor nabývat: buď je funkční a beží (fouká vzduch), nebo je funkční a je pozastaven (nefouká vzduch), nebo je rozbitý. Ventilátor, který je funkční, ale nefouká, se nemuže rozbít. Opravář opravuje jen rozbité ventilátory, tedy ne ty pozastavené.
K řešení můžeme přistoupit buď tak, že budeme mezi ventilátory rozlišovat, nebo budeme pouze uvažovat počet ventilátorů v daném stavu. Druhý způsob vede na menší počet stavů a současně stačí k zodpovězení otázek, proto jej použijeme. Stavy budeme značit $(A/B/C)$, kde A je počet běžících ventilátorů, B je počet pozastavených a C je počet rozbitých.
Ze zadání není jasné, jak se s opravenými ventilátory naloží. Můžeme tedy uvažovat dvě situace: a) po opravě budou oba dva ventilátory zapnuty (budou foukat), b) po opravě se zapne jen ten, který byl před opravou zapnut. Těmto uvažovaným scénářům odpovídají následující grafy:



Sitauce a



Sitauce b

Pravděpodobnost, že je jeden ventilátor funkční je pak pravděpodobnost stavů $P_{1/1/0}(t) + P_{1/0/1}(t) + P_{0/1/1}(t)$.
Vězni mohou ventilační šachtou utéct pouze tehdy, stojí-li oba ventilátory, což nastane s pravděpodobností $P_{0/2/0}(t)+P_{0/1/1}(t)+P_{0/0/2}(t)$. Tato pravděpodobnost však vyjadřuje jen možnost úniku šachtou. Vezni mohou uniknout z celého vezení s pravděpodobností: $(P_{0/2/0}(t) + P_{0/1/1}(t) + P_{0/0/2}(t)) \cdot P_{\text{útěk}}$.