Statistika a spolehlivost v lékařství
4. cvičení, 1. dubna 2014

Markovovy modely

Výpočet spolehlivosti opravovaných soustav nebo soustav se zálohováním bývá složitý. Pokud mají doby poruch a doby obnov exponenciální rozdělení, je výhodné použít Markovův model. V teorii Markovových procesů se omezíme na základní vlastnosti potřebné pro výpočet spolehlivosti soustav, teorie Markovových procesů je popsána v početné literatuře.

Markovovy modely jsou funkce dvou náhodných proměnných, stavu soustavy a doby nebo jiné veličiny, v závislosti na které stav sledujeme. Obě veličiny mohou být spojité nebo diskrétní, tomu odpovídají čtyři druhy modelů.

Def: Markovův řetězec : model s diskrétními stavy a diskrétním časem.

Def: Markovův proces : model s diskrétními stavy a spojitým časem.

Def: Markovův model : množina pravděpodobností udávajících pravděpodobnost přechodu z nějakého výchozího stavu do nějakého následujícího stavu. Pravděpodobnost závisí pouze na těchto dvou stavech a je zcela nezávislá na všech minulých stavech, kterými proces prošel.

Pro sestavení Markovova modelu se nejprve definují vzájemně se vylučující stavy soustavy. Soustava Markovových stavových rovnic popisuje pravděpodobnostní přechody z počátečních stavů do konečných stavů. Za předpokladů :

1. Pravděpodobnost přechodu z jednoho stavu do jiného v časovém intervalu Δt je rovna součinu $\lambda_i(t) \cdot \Delta t$, kde $\lambda_i(t)$ je intenzita pravděpodobnosti přechodu (hazard) příslušná ke dvěma stavům, mezi kterými přechod probíhá.

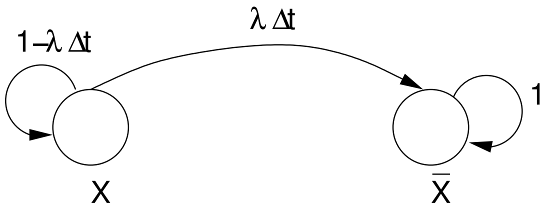
2. Pravděpodobnosti více než jednoho přechodu v časovém intervalu Δt jsou řádově menší a lze je zanedbat.

Def: Homogenní model : všechna $\lambda_i(t) = \lambda_i$ jsou konstantní.

Def: Nehomogenní model : některá $\lambda_i(t)$ je funkcí času.

Markovovy modely lze názorně vyjádřit orientovaným grafem (Markovův graf). Uzly grafu představují stavy soustavy, orientované hrany grafu označené pravděpodobnostmi přechodu udávají možné přechody.

Mějme soustavu s jediným neopravitelným prvkem. Pravděpodobnost bezporuchového stavu x v čase $t + \Delta t$ označme $P_x(t + \Delta t)$. Podobně pravděpodobnost, že soustava bude v poruchovém stavu $\overline{x}$ označíme $P_{\overline{x}}(t + \Delta t)$.



Markovův graf

Pro pravděpodobnosti jednotlivých stavů napíšeme rovnice

$$\begin{aligned} P_x(t+\Delta t) &= (1-\lambda(t)\Delta t)\cdot P_x(t), \\ P_{\overline{x}}(t+\Delta t) &= \lambda(t)\Delta t\cdot P_x(t)+P_{\overline{x}}(t), \end{aligned}$$

které přepíšeme do maticové rovnice

$$\begin{bmatrix} P_x(t+\Delta t) \\ P_{\overline{x}}(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda(t)\Delta t & 0 \\ \lambda(t)\Delta t & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_{\overline{x}}(t) \end{bmatrix}.$$

Získáme *matici pravděpodobností přechodu*, kterou lze sestavit přímo z Markovova grafu. Rovnice lze upravit na tvar :

$$\begin{aligned} \frac{P_x(t+\Delta t)-P_x(t)}{\Delta t} &= -\lambda(t)P_x(t), \\ \frac{P_{\overline{x}}(t+\Delta t)-P_{\overline{x}}(t)}{\Delta t} &= \lambda(t)P_x(t). \end{aligned}$$

Zavedením limity pro $\Delta t \to 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_x(t+\Delta t)-P_x(t)}{\Delta t} &= -\lambda(t)P_x(t), \\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{\overline{x}}(t+\Delta t)-P_{\overline{x}}(t)}{\Delta t} &= \lambda(t)P_x(t), \end{aligned}$$

získáme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{P}_x &= -\lambda(t)P_x(t), \\ \dot{P}_{\overline{x}} &= \lambda(t)P_x(t). \end{aligned}$$

Obvyklé počáteční podmínky jsou $P_x(0)=1$ a $P_{\overline{x}}(0)=0$. První rovnici lze řešit samostatně

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= -\lambda(t)P_x(t), \\ \frac{1}{P_x(t)}dP_x &= -\lambda(t)dt, \\ \ln P_x(t) &= K\int_0^t -\lambda(t)dt, \\ P_x(t) &= Ke^{-\int_0^t \lambda(t)dt}. \end{aligned}$$

Dosazením $P_x(0) = 1$ získáme vztah pro pravděpodobnost bezporuchového provozu

$$R(t) = P_x(t) = e^{\int_0^t -\lambda(t)dt}.$$

Řešením druhé rovnice dostaneme

$$Q(t) = P_{\overline{x}}(t) = 1 - e^{\int_0^t -\lambda(t)dt}.$$

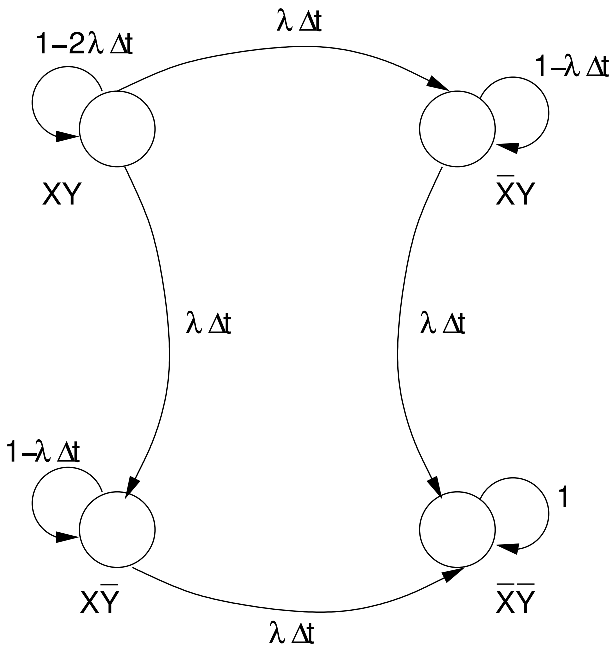
Pro $\lambda(t) = \lambda$ vyjádříme soustavu diferenciálních rovnic maticovým zápisem

$$\left[\begin{array}{c} \dot{P_x}(t) \\ \dot{P_{\overline{x}}}(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} P_x(t) \\ P_{\overline{x}}(t) \end{array} \right].$$

Získáme *matici intenzit*. Matice intenzit není stochastická, součet prvků v každém sloupci je roven nule. Matici intenzit lze také napsat přímo z Markovova grafu.

► **Příklad 1 (Soustava 2 prvky, každý prvek 2 stavy)** *Mějme soustavu se dvěma neopravitelnými prvky (X a Y), každý prvek má dva stavy (bezporuchový stav, porucha), intenzita poruch je pro oba prvky stejná a konstantní $\lambda_i(t) = \lambda$. Přechod ze stavu XY do stavu $\overline{XY}$ se nepředpokládá a prakticky nenastane. Nakreslete Markovův graf, sestavte matici pravděpodobností přechodu a matici intenzit.*

Řešení: Markovův graf



Matice pravděpodobností přechodu:

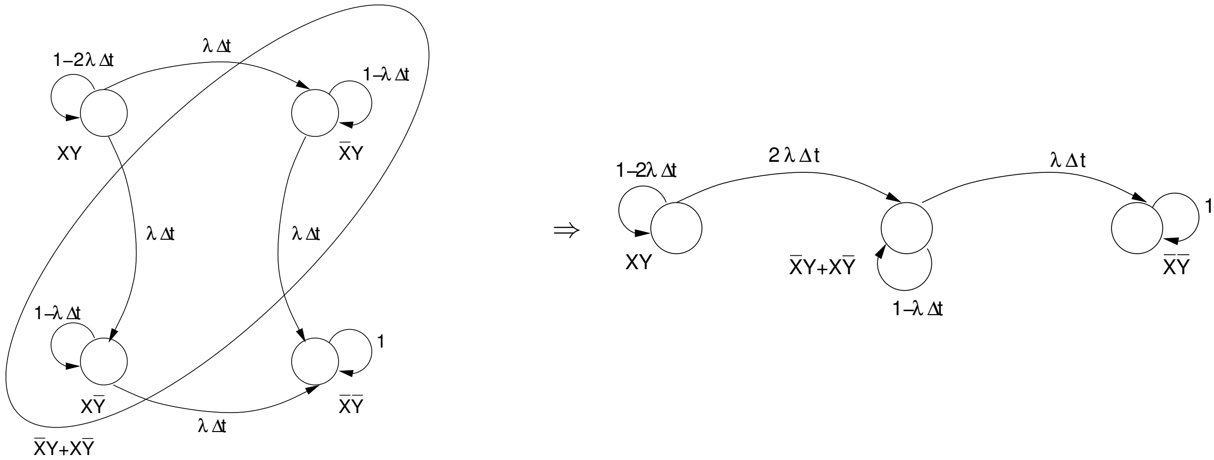
$$\begin{bmatrix} P_{XY} \\ P_{\overline{X}Y} \\ P_{X\overline{Y}} \\ P_{\overline{XY}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t & 0 & 0 \\ \lambda\Delta t & 0 & 1-\lambda\Delta t & 0 \\ 0 & \lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{XY} \\ P_{\overline{X}Y} \\ P_{X\overline{Y}} \\ P_{\overline{XY}} \end{bmatrix}.$$

Matice intenzit:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{XY} \\ \dot{P}_{\overline{X}Y} \\ \dot{P}_{X\overline{Y}} \\ \dot{P}_{\overline{XY}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{XY} \\ P_{\overline{X}Y} \\ P_{X\overline{Y}} \\ P_{\overline{XY}} \end{bmatrix}.$$

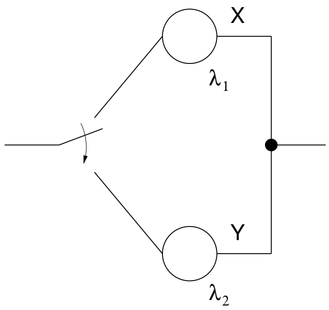
Slučování stavů

Složitost Markovova modelu závisí na počtu stavů soustavy. Soustava s m stavy bude popsána m diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Pro soustavu s n dvoustavovými prvky je počet stavů soustavy $m = 2^n$. Obecně pro prvky s k možnými stavy je $m = k^n$. Počet diferenciálních rovnic roste velmi rychle. Při výpočtu bezporuchovosti soustavy můžeme rozlišovat pouze stavy určené počtem porouchaných prvků a nezajímat se o to, které prvky mají poruchu. Počet stavů soustavy a počet diferenciálních rovnic se tím zmenší z 2^n na $n+1$. Zjednodušení ukážeme na předchozím příkladě. Stavy $X\overline{Y}$, $\overline{X}Y$ sloučíme do jediného stavu $X\overline{Y} + \overline{X}Y$.

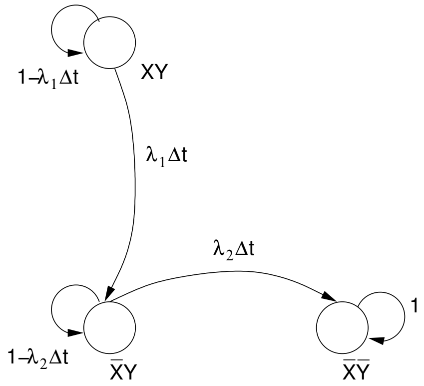


Ze stavu XY do stavu $X\overline{Y} + \overline{X}Y$ se lze dostat buď poruchou prvku X nebo poruchou prvku Y, proto pravděpodobnosti přechodu sčítáme. Ze stavu $X\overline{Y} + \overline{X}Y$ do stavu $\overline{XY}$ se dostane v případě, že zbylý prvek budu mít poruchu, proto je pravděpodobnost přechodu rovna $\lambda\Delta t$ (pouze jeden z nich může mít poruchu). Snadno lze nahlédnout, že aby došlo k zjednodušení musejí být intenzity ze stavů $\overline{X}Y$ nebo $X\overline{Y}$ do $\overline{XY}$ stejné. Intenzity ze stavu XY do stavu $\overline{X}Y$ a $X\overline{Y}$ mohou být různé.

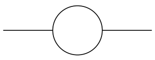
► **Příklad 2 (Zálohování s přepínáním)** *Mějme soustavu se zálohováním přepínáním, prvek v záloze nestárne. Při poruše prvku X dojde k přepnutí na prvek Y. U prvku Y tedy nenastane porucha dříve než u prvku X. Intenzita poruchy prvku X je λ_1 a intenzita poruchy prvku Y je λ_2. Nakreslete Markovův graf.*



Řešení:

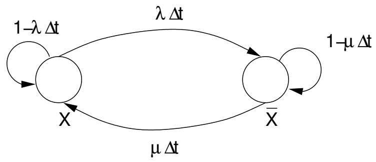


► **Příklad 3 (Soustava s opravou)** *Mějme jedno prvkovou soustavu s opravou. Porucha nastává s intenzitou λ a porouchaný prvek je opraven s intenzitou μ. Nakreslete Markovův graf, sestavte matici intenzit a vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu a pravděpodobnost poruchy v čase t $P_x(t)$ =? a $P_{\overline{x}}$ =? pro počáteční podmínky $P_x(0) = 1$ a $P_{\overline{x}}(0) = 0$.*



μ ... *oprava*
λ ... *porucha*

Řešení:



$$\begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_{\overline{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_{\overline{x}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} P_x \\ P_{\overline{x}} \end{bmatrix}$$

výpočet vlastních čísel $det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}) = 0$:

$$\begin{bmatrix} -\lambda - s & \mu \\ \lambda & -\mu - s \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow s(s + \lambda + \mu) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} s_1 = -(\lambda + \mu) \\ s_2 = 0 \end{array}$$

výpočet vlastních vektorů

s_1 :

$$\begin{bmatrix} -\lambda + \mu + \lambda & \mu \\ \lambda & -\mu + \mu - \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mu & \mu \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t.$$

s_2 :

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda} \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

$$\begin{aligned} P_x &= C_1 e^{-(\mu+\lambda)t} + C_2 \frac{\mu}{\lambda} \\ P_{\overline{x}} &= -C_1 e^{-(\mu+\lambda)t} + C_2 \end{aligned}$$

počáteční podmínky :

$$\begin{array}{lll} P_{\overline{x}}(0) = 0 & C_2 - C_1 = 0 & \Rightarrow \quad C_1 = C_2 \\ P_x(t) = 1 & C_2 \frac{\mu}{\lambda} + C_1 = 0 \sim C_1(\frac{\mu+\lambda}{\lambda}) = 1 & \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \end{array}$$

$$\begin{aligned} P_x(t) &= \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \\ P_{\overline{x}}(0) &= -\frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}. \end{aligned}$$