

Statistika a spolehlivost v lékařství
3. cvičení, 1. dubna 2014

Soustavy s více stavy prvků

Pro elektrické obvody používáme tři stavy : **bezporuchový**, **porucha zkratem**, **porucha přerušením**.

- **Příklad 1 (Soustavy s více stavy prvků — sériové)** soustava je funkční když se celá chová jako dioda, pravděpodobnost zkratu pz , pravděpodobnost přerušení pp , pravděpodobnost správné funkčnosti p , $p + pz + pp = 1$, diody jsou identické.

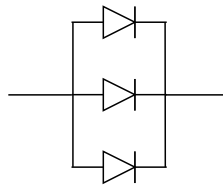


Řešení:

$$\begin{aligned} pp(s) &= 1 - (1 - pp)^3 \\ pz(s) &= p_z^3 \\ p &= 3 \cdot pz \cdot p^2 + 3 \cdot p^2 \cdot pz + p^3 \end{aligned}$$

ověření: $pp(s) + p(s) + pz(s) = 1$

- **Příklad 2 (Soustavy s více stavy prvků — paralelní)** soustava je funkční když se celá chová jako dioda, pravděpodobnost zkratu pz , pravděpodobnost přerušení pp , pravděpodobnost správné funkčnosti p , $p + pz + pp = 1$, diody jsou identické.



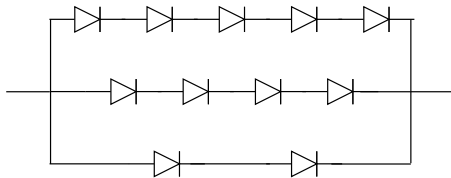
Řešení:

$$\begin{aligned} pp(s) &= pp^3 \\ pz(s) &= 1 - (1 - pz)^3 \\ p(s) &= (1 - pz - pp)^3 + 3pp(1 - pp - pz)^2 + 3pp^2(1 - pp - pz) \end{aligned}$$

ověření $pp(s) + p(s) + pz(s) = 1$:

$$pp(s) + pz(s) + p(s) = 1.$$

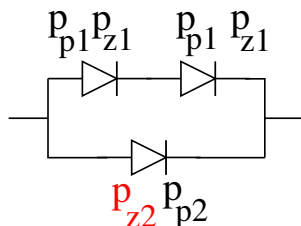
- **Příklad 3** Spočítejte pravděpodobnost, že se soustava diod na obrázku chová jako dioda, za předpokladu že pravděpodobnost přerušení jedné diody je $pp = 0,2$ a pravděpodobnost zkratu je $pz = 0,05$.



Řešení:

$$\begin{aligned}
 pp(s) &= (1 - (1 - pp)^5) \cdot (1 - (1 - pp)^4) \cdot (1 - (1 - pp)^2) = 0,143 \\
 pz(s) &= pz^5 + pz^4 + pz^2 - pz^{5+4} - pz^{4+2} - pz^{5+2} + pz^{11} = 2,5 \cdot 10^{-3} \\
 p(s) &= 1 - pp(s) - pz(s) = 0,8545
 \end{aligned}$$

- **Příklad 4** Soustava na obrázku je složena ze dvou typů diod: diody v horní řadě mají parametry $p_{p1} = 0.01$, $p_{z1} = 0.2$, spodní dioda má pravděpodobnost přerušení $p_{p2} = 0.3$. Vypočítejte, jaká musí být pravděpodobnost zkratu spodní diody p_{z2} tak, aby pravděpodobnost, že se celý obvod chová jako dioda byla $p_{celkova} = 0.9$.



Řešení:

Nejprve spočítáme horní větev:

$$\begin{aligned}
 p_{p,horni} &= 1 - (1 - p_{p1})^2 = 1 - (1 - 0.01)^2 = 0.0199 \\
 p_{z,horni} &= p_{z1}^2 = 0.2^2 = 0.04.
 \end{aligned}$$

Nyní určíme pravděpodobnost zkratu a přerušení paralelní kombinace:

$$\begin{aligned}
 p_{p,celkova} &= p_{p,horni} \cdot p_{p2} = 0.0199 \cdot 0.3 = 0.00597 \\
 p_{z,celkova} &= 1 - (1 - p_{z,horni})(1 - p_{z2}) = 1 - (1 - 0.04)(1 - p_{z2}) = 1 - 0.96(1 - p_{z2}).
 \end{aligned}$$

Ze zadání víme, že $p_{celkova} = 0.9$ a to je zároveň: $p_{celkova} = 1 - p_{p,celkova} - p_{z,celkova}$. Tedy:

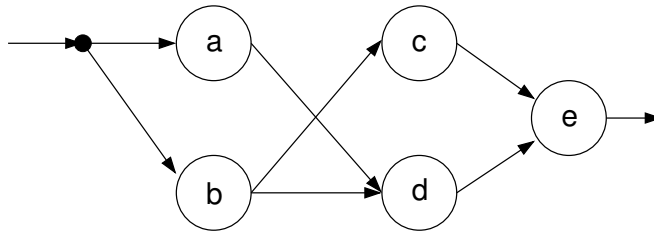
$$\begin{aligned}
 p_{celkova} = 0.9 &= 1 - p_{p,celkova} - p_{z,celkova} \\
 0.9 &= 1 - 0.00597 - (1 - 0.96(1 - p_{z2}))
 \end{aligned}$$

Odtud $p_{z2} = 0.056$.

Kombinované soustavy

► **Příklad 5 (Metoda seznamu)**

- a) $P(a) = \frac{3}{4}$; $P(b) = \frac{5}{6}$; $P(c) = P(d) = \frac{2}{3}$; $P(e) = \frac{7}{8}$; $R = ?$
 b) $P(a) = P(b) = \dots = P(e) = p$; $R = ?$



Řešení:

- | | | |
|----------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $a b c d e +$ | 5. $a \bar{b} c d e +$ | 9. $\bar{a} b c d e +$ |
| 2. $a b c \bar{d} e +$ | 6. $a \bar{b} c \bar{d} e$ | 10. $\bar{a} b c \bar{d} e +$ |
| 3. $a b \bar{c} d e +$ | 7. $a \bar{b} \bar{c} d e +$ | 11. $\bar{a} b \bar{c} d e +$ |
| 4. $a b \bar{c} \bar{d} e$ | 8. $a \bar{b} \bar{c} \bar{d} e$ | 12. $\bar{a} b \bar{c} \bar{d} e$ |
- ...

$$R = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) + P(A_9) + P(A_{10}) + P(A_{11})$$

vzájemně vylučující se jevy, pravděpodobnosti mohou sčítat

$$\begin{aligned} R &= P(A_1) + P(A_2) + \dots \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} + \dots \\ &= 0,6563. \end{aligned}$$

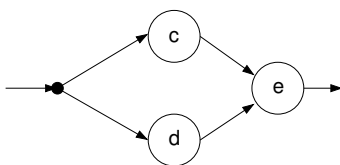
V případě, že jsou prvky stejné, je řešení:

$$R = p^5 + 4p^4(1-p) + 3p^3(1-p)^2 = p^5 + 4p^4 - 4p^5 + 3p^3 - 6p^4 + 3p^5 = -2p^4 + 3p^3 = p^3(3-2p).$$

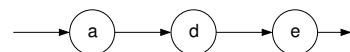
► **Příklad 6 (Metoda rozkladu)** zadání viz předchozí příklad, všechny prvky jsou stejné ($P(a) = P(b) = \dots = P(e) = p$).

Řešení:

$$R = P(b) \cdot P(\text{soustava funguje}|b) + P(\bar{b}) \cdot P(\text{soustava funguje}|\bar{b})$$



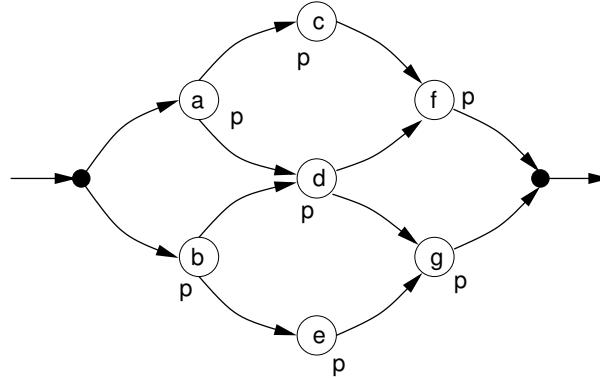
$P(\text{soustava funguje}|b)$



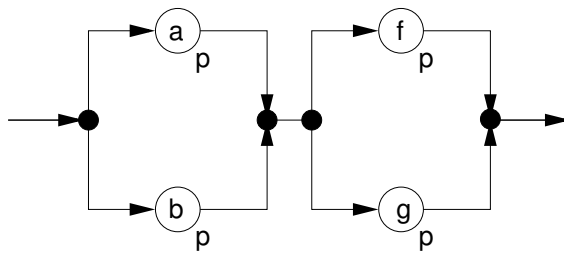
$P(\text{soustava funguje}|\bar{b})$

$$R = p \cdot (1 - (1 - p)^2) \cdot p + (1 - p) \cdot p^3 = 2p^3 - p^4 + p^3 - p^4 = p^3 \cdot (3 - 2p).$$

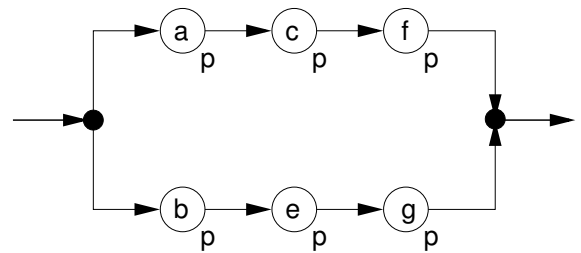
- **Příklad 7 (Kombinované soustavy - metoda rozkladu)** $R = ?$



Řešení:



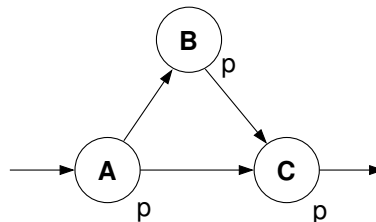
$P(\text{soustava funguje}|d)$



$P(\text{soustava funguje}|\bar{d})$

$$\begin{aligned} R &= P(d) \cdot P(\text{soustava}|d) + P(\bar{d}) \cdot P(\text{soustava}|\bar{d}) \\ &= p \cdot [1 - (1 - p^2)]^2 + (1 - p) \cdot [1 - (1 - p^3)]^2 \\ &= p \cdot (4p^2 - 4p^3 + p^4) + (1 - p) \cdot (2p^3 - p^6) \\ &= p^5 - 4p^4 + 4p^3 + p^7 - p^6 - 2p^4 - 2p^3 \\ &= p^7 - p^6 + p^5 - 6p^4 + 6p^3 \end{aligned}$$

- **Příklad 8 (Soustavy)** $R = ?$



Řešení:

$$R = P(AC \cup ABC) = P(AC) + P(ABC) - P(ABC) = P(AC) = p^2$$