Statistika a spolehlivost v lékařství
3. cvičení, 1. dubna 2014

Soustava m z n

Mějme soustavu s n prvky, přičemž alespoň m musí správně pracovat. Pokud jsou prvky shodné a nezávislé, pak lze spolehlivost soustavy popsat binomickým rozdělením.
Pravděpodobnost bezporuchového stavu právě m prvků z n je

$$f(m,n,p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

► **Příklad 1** *Jaká je pravděpodobnost bezporuchového stavu nejméně m prvků z n?*

Řešení:

$$R = \sum_{k=m}^{n} f(k,n,p) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

► **Příklad 2** *Pro kterou soustavu platí, že $m = 1$?*

Řešení: Paralelní soustava

► **Příklad 3** *Pro kterou soustavu platí, že $m = n$?*

Řešení: Sériová soustava

► **Příklad 4 (Ocelové lano - soustava m z n)** *Ocelové lano má 4 vlákna, správná funkčnost je zajištěná pokud nejsou přetržena alespoň dvě vlákna. $n = 4$; $m = 2$; Pravděpodobnost nepřetržení jednoho vlákna je $p = 0.9$; $R =$?*

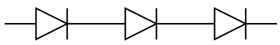
Řešení:

$$R = \binom{4}{2} 0,9^2 \cdot 0,1^2 + \binom{4}{3} 0,9^3 \cdot 0,1 + \binom{4}{4} 0,9^4 = 0,9963.$$

Soustavy s více stavy prvků

Pro elektrické obvody používáme tři stavy : **bezporuchový**, **porucha zkratem**, **porucha přerušením**.

► **Příklad 5 (Soustavy s více stavy prvků - sériové)** *soustava je funkční když se celá chová jako dioda, pravděpodobnost zkratu* pz*, pravděpodobnost přerušení* pp*, pravděpodobnost správné funkčnosti* p*,* $p + pz + pp = 1$*, diody jsou identické.*

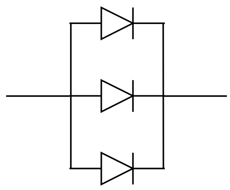


Řešení:

$$\begin{aligned} pp(s) &= 1 - (1 - pp)^3 \\ pz(s) &= p_z^3 \\ p &= 3 \cdot pz \cdot p^2 + 3 \cdot p^2 \cdot pz + p^3 \end{aligned}$$

ověření: $pp(s) + p(s) + pz(s) = 1$

► **Příklad 6 (Soustavy s více stavy prvků - paralelní)** *soustava je funkční když se celá chová jako dioda, pravděpodobnost zkratu* pz*, pravděpodobnost přerušení* pp*, pravděpodobnost správné funkčnosti* p*,* $p + pz + pp = 1$*, diody jsou identické.*



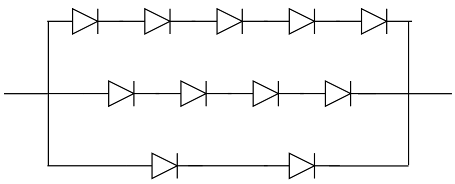
Řešení:

$$\begin{aligned} pp(s) &= pp^3 \\ pz(s) &= 1 - (1 - pz)^3 \\ p(s) &= (1 - pz - pp)^3 + 3pp(1 - pp - pz)^2 + 3pp^2(1 - pp - pz) \end{aligned}$$

ověření $pp(s) + p(s) + pz(s) = 1$:

$$pp(s) + pz(s) + p(s) = 1.$$

► **Příklad 7 (Soustavy s více stavy prvků - složitější soustava)** *Spočítejte pravděpodobnost, že se soustava diod na obrázku chová jako dioda, za předpokladu že pravděpodobnost přerušení jedné diody je* $pp = 0,2$ *a pravděpodobnost zkratu je* $pz = 0,05$.



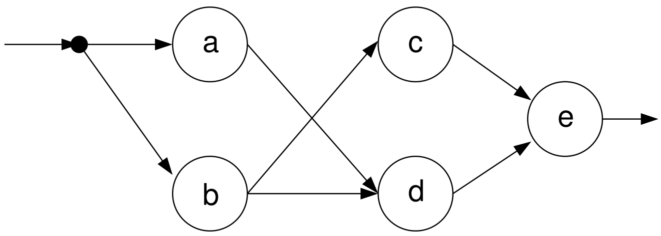
Řešení:

$$\begin{aligned} pp(s) &= \left(1-(1-pp)^5\right)\cdot\left(1-(1-pp)^4\right)\cdot\left(1-(1-pp)^2\right) = 0,143 \\ pz(s) &= pz^5 + pz^4 + pz^2 - pz^{5+4} - pz^{4+2} - pz^{5+2} + pz^{11} = 2,5\cdot 10^{-3} \\ p(s) &= 1 - pp(s) - pz(s) = 0,8545 \end{aligned}$$

Kombinované soustavy

▶ **Příklad 8 (Metoda seznamu)**

$$\begin{aligned} &a) \quad P(a) = \frac{3}{4};\ P(b) = \frac{5}{6};\ P(c) = P(d) = \frac{2}{3};\ P(e) = \frac{7}{8}; R = ? \\ &b) \quad P(a) = P(b) = \ldots = P(e) = p; R = ? \end{aligned}$$



Řešení: a)

1.	a	b	c	d	e	+	5.	a	$\bar{b}$	c	d	e	+	9.	$\bar{a}$	b	c	d	e	+	
2.	a	b	c	$\bar{d}$	e	+	6.	a	$\bar{b}$	c	$\bar{d}$	e		10.	$\bar{a}$	b	c	$\bar{d}$	e	+	
3.	a	b	$\bar{c}$	d	e	+	7.	a	$\bar{b}$	$\bar{c}$	d	e	+	11.	$\bar{a}$	b	$\bar{c}$	d	e	+	$\ldots$
4.	a	b	$\bar{c}$	$\bar{d}$	e		8.	a	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$	e		12.	$\bar{a}$	b	$\bar{c}$	$\bar{d}$	e		

$$R = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) + P(A_9) + P(A_{10}) + P(A_{11})$$

vzájemně vylučující se jevy, pravděpodobnosti mohu sčítat

$$\begin{aligned} R &= P(A_1) + P(A_2) + \ldots \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} + \ldots \\ &= 0,6563. \end{aligned}$$

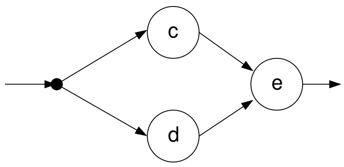
b)

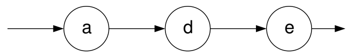
$$R = p^5 + 4p^4(1-p) + 3p^3(1-p)^2 = p^5 + 4p^4 - 4p^5 + 3p^3 - 6p^4 + 3p^5 = -2p^4 + 3p^3 = p^3(3-2p).$$

▶ **Příklad 9 (Metoda rozkladu)** *zadání viz předchozí příklad b)*

Řešení:

$$R = P(b) \cdot P(soustava\ funguje|b) + P(\bar{b}) \cdot P(soustava\ funguje|\bar{b})$$

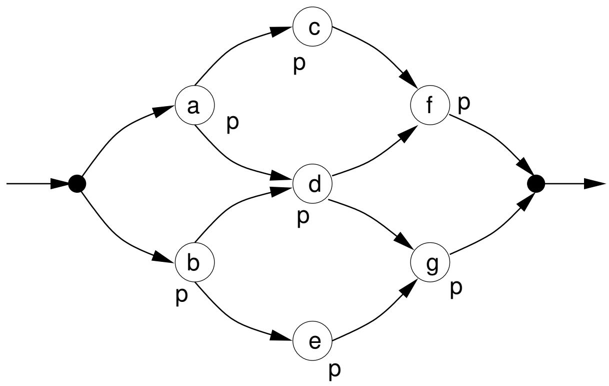




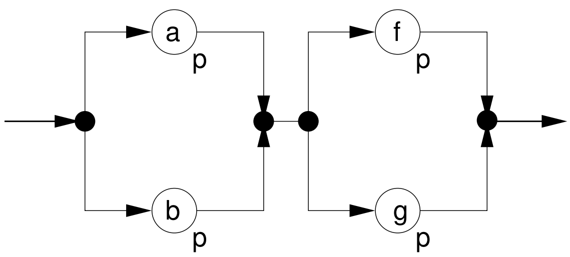
$P(soustava\ funguje|b)$ $\qquad$ $P(soustava\ funguje|\bar{b})$

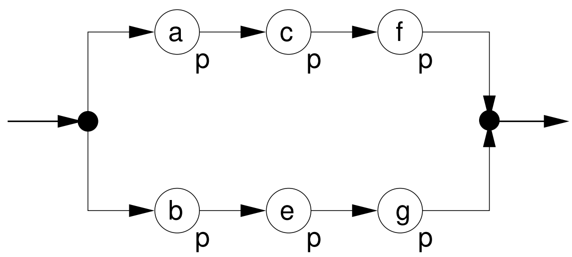
$$R = p \cdot (1 - (1-p)^2) \cdot p + (1-p) \cdot p^3 = 2p^3 - p^4 + p^3 - p^4 = p^3 \cdot (3 - 2p).$$

► **Příklad 10 (Kombinované soustavy - metoda rozkladu)** $R = ?$



Řešení:





$P(soustava\ funguje|d)$ $\qquad$ $P(soustava\ funguje|\bar{d})$

$$\begin{aligned}
R &= P(d) \cdot P(soustava|d) + P(\bar{d}) \cdot P(soustava|\bar{d}) \\
&= p \cdot \left[1 - (1-p^2)\right]^2 + (1-p) \cdot \left[1 - (1-p^3)\right]^2 \\
&= p \cdot (4p^2 - 4p^3 + p^4) + (1-p) \cdot (2p^3 - p^6) \\
&= p^5 - 4p^4 + 4p^3 + p^7 - p^6 - 2p^4 - 2p^3 \\
&= p^7 - p^6 + p^5 - 6p^4 + 6p^3
\end{aligned}$$