

Statistika a spolehlivost v lékařství

7. prosince 2011

Spolehlivost - 3. cvičení

Soustava m z n

Mějme soustavu s n prvky, přičemž alespoň m musí správně pracovat. Pokud jsou prvky shodné a nezávislé, pak lze spolehlivost soustavy popsat binomickým rozdělením:

- Pravděpodobnost bezporuchového stavu právě m prvků z n

$$f(m, n, p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

- **Příklad 1** *Jaká je pravděpodobnost bezporuchového stavu nejméně m prvků z n ?*

Řešení:

$$R = \sum_{k=m}^n f(k, n, p) = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- **Příklad 2** *Pro kterou soustavu platí, že $m = 1$?*

Řešení: Paralelní soustava

- **Příklad 3** *Pro kterou soustavu platí, že $m = n$?*

Řešení: Sériová soustava

- **Příklad 4 (Ocelové lano - soustava m z n)** *Ocelové lano má 4 vlákna, správná funkčnost je zajištěná pokud nejsou přetržena alespoň dvě vlákna. $n = 4$; $m = 2$; Pravděpodobnost nepřetržení jednoho vlákna je $p = 0.9$; $R = ?$*

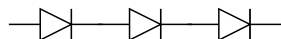
Řešení:

$$R = \binom{4}{2} 0,9^2 \cdot 0,1^2 + \binom{4}{3} 0,9^3 \cdot 0,1 + \binom{4}{4} 0,9^4 = 0,9963.$$

Soustavy s více stavy prvků

Pro elektrické obvody používáme tři stavy : **bezporuchový, porucha zkratem, porucha přerušením.**

- **Příklad 5 (Soustavy s více stavy prvků - sériové)** *soustava je funkční když se celá chová jako dioda, pravděpodobnost zkratu pz , pravděpodobnost přerušení pp , pravděpodobnost správné funkčnosti p , $p + pz + pp = 1$, diody jsou identické.*

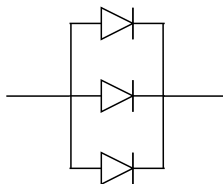


Řešení:

$$\begin{aligned} pp(s) &= 1 - (1 - pp)^3 \\ pz(s) &= p_z^3 \\ p &= 3 \cdot pz \cdot p^2 + 3 \cdot p^2 \cdot pz + p^3 \end{aligned}$$

ověření: $pp(s) + p(s) + pz(s) = 1$

- **Příklad 6 (Soustavy s více stavy prvků - paralelní)** *soustava je funkční když se celá chová jako dioda, pravděpodobnost zkratu pz , pravděpodobnost přerušení pp , pravděpodobnost správné funkčnosti p , $p + pz + pp = 1$, diody jsou identické.*



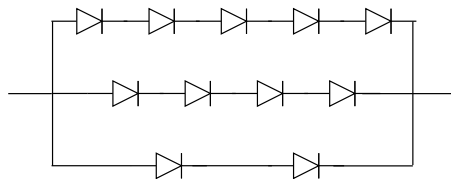
Řešení:

$$\begin{aligned} pp(s) &= pp^3 \\ pz(s) &= 1 - (1 - pz)^3 \\ p(s) &= (1 - pz - pp)^3 + 3pp(1 - pp - pz)^2 + 3pp^2(1 - pp - pz) \end{aligned}$$

ověření $pp(s) + p(s) + pz(s) = 1$:

$$pp(s) + pz(s) + p(s) = 1.$$

- **Příklad 7 (Soustavy s více stavy prvků - složitější soustava)** *Spočítejte pravděpodobnost, že se soustava diod na obrázku chová jako dioda, za předpokladu že pravděpodobnost přerušení jedné diody je $pp = 0,2$ a pravděpodobnost zkratu je $pz = 0,05$.*



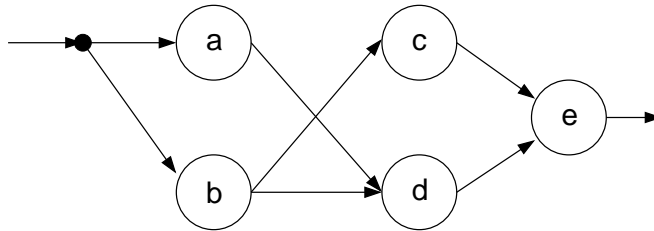
Řešení:

$$\begin{aligned}
 pp(s) &= (1 - (1 - pp)^5) \cdot (1 - (1 - pp)^4) \cdot (1 - (1 - pp)^2) = 0,143 \\
 pz(s) &= pz^5 + pz^4 + pz^2 - pz^{5+4} - pz^{4+2} - pz^{5+2} + pz^{11} = 2,5 \cdot 10^{-3} \\
 p(s) &= 1 - pp(s) - pz(s) = 0,8545
 \end{aligned}$$

Kombinované soustavy

► **Příklad 8 (Metoda seznamu)**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(a) &= \frac{3}{4}; P(b) = \frac{5}{6}; P(c) = P(d) = \frac{2}{3}; P(e) = \frac{7}{8}; R = ? \\
 \text{b) } P(a) &= P(b) = \dots = P(e) = p; R = ?
 \end{aligned}$$



Řešení: a)

- | | | |
|----------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $a b c d e +$ | 5. $a \bar{b} c d e +$ | 9. $\bar{a} b c d e +$ |
| 2. $a b c \bar{d} e +$ | 6. $a \bar{b} c \bar{d} e$ | 10. $\bar{a} b c \bar{d} e +$ |
| 3. $a b \bar{c} d e +$ | 7. $a \bar{b} \bar{c} d e +$ | 11. $\bar{a} b \bar{c} d e +$ |
| 4. $a b \bar{c} \bar{d} e$ | 8. $a \bar{b} \bar{c} \bar{d} e$ | 12. $\bar{a} b \bar{c} \bar{d} e$ |
- ...

$$R = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) + P(A_9) + P(A_{10}) + P(A_{11})$$

vzájemně vylučující se jevy, pravděpodobnosti mohou sčítat

$$\begin{aligned}
 R &= P(A_1) + P(A_2) + \dots \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} + \dots \\
 &= 0,6563.
 \end{aligned}$$

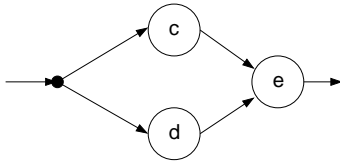
b)

$$R = p^5 + 4p^4(1-p) + 3p^3(1-p)^2 = p^5 + 4p^4 - 4p^5 + 3p^3 - 6p^4 + 3p^5 = -2p^4 + 3p^3 = p^3(3-2p).$$

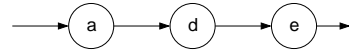
► **Příklad 9 (Metoda rozkladu)** zadání viz předchozí příklad b)

Řešení:

$$R = P(b) \cdot P(\text{soustava funguje}|b) + P(\bar{b}) \cdot P(\text{soustava funguje}|\bar{b})$$



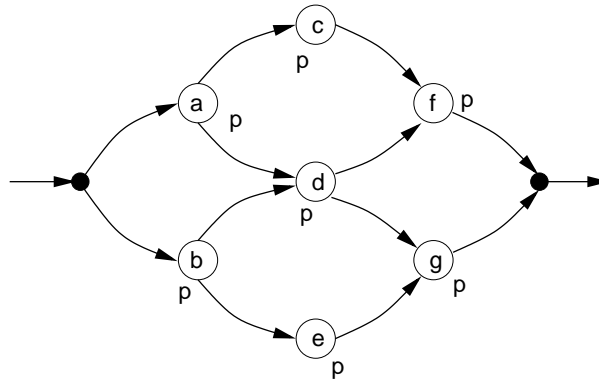
$P(\text{soustava funguje}|b)$



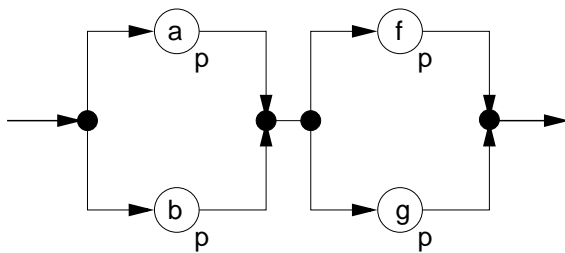
$P(\text{soustava funguje}|\bar{b})$

$$R = p \cdot (1 - (1 - p)^2) \cdot p + (1 - p) \cdot p^3 = 2p^3 - p^4 + p^3 - p^4 = p^3 \cdot (3 - 2p).$$

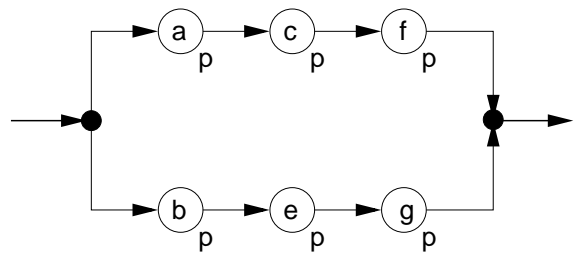
► Příklad 10 (Kombinované soustavy - metoda rozkladu) $R = ?$



Řešení:



$P(\text{soustava funguje}|d)$



$P(\text{soustava funguje}|\bar{d})$

$$\begin{aligned} R &= P(d) \cdot P(\text{soustava}|d) + P(\bar{d}) \cdot P(\text{soustava}|\bar{d}) \\ &= p \cdot [1 - (1 - p^2)]^2 + (1 - p) \cdot [1 - (1 - p^3)]^2 \\ &= p \cdot (4p^2 - 4p^3 + p^4) + (1 - p) \cdot (2p^3 - p^6) \\ &= p^5 - 4p^4 + 4p^3 + p^7 - p^6 - 2p^4 - 2p^3 \\ &= p^7 - p^6 + p^5 - 6p^4 + 6p^3 \end{aligned}$$