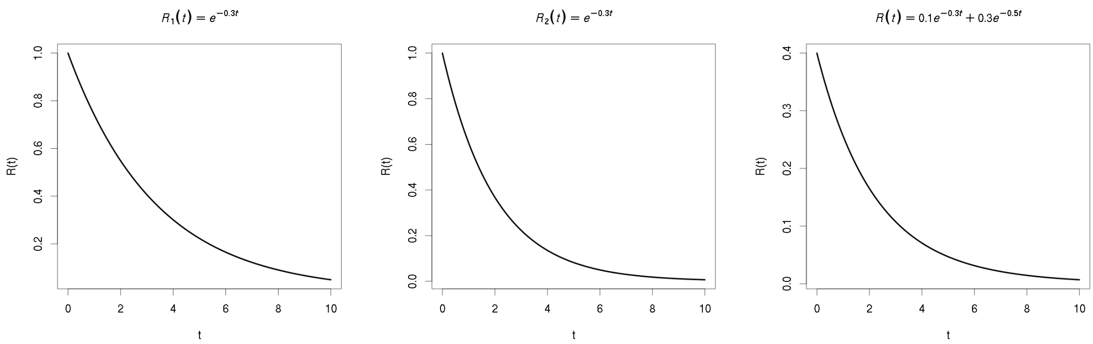
Statistika a spolehlivost v lékařství
2. cvičení, 1. dubna 2014

1 Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Využití: popis počátečního + normálního provozu



Obrázek 1: Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

$$R(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

▶ **Příklad 1** *Nalezněte vztah pro výpočet $f(t)$*

Řešení:

$$f(t) = -\frac{\partial R(t)}{\partial t} = \lambda_1 c_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

▶ **Příklad 2** *Nalezněte vztah pro výpočet $\lambda(t)$.*

Řešení: Vycházíme z definice intenzity

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

tedy

$$\lambda(t) = \frac{c_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}}$$

▶ **Příklad 3** *Jestliže platí $\int_0^\infty f(t) = 1$, pak platí $c_1 + c_2 = 1$. Dokažte.*

Řešení:

$$\int_0^\infty f(t)dt = [Q(t)]_0^\infty = [1 - R(t)]_0^\infty = \left[1 - c_1 e^{-\lambda_1 t} - c_2 e^{-\lambda_2 t}\right]_0^\infty = 1-(1-c_1-c_2) = c_1+c_2 = 1.$$

Lze také z $R(0) = 1$.

▶ **Příklad 4** *Jaká je intenzita poruch v čase 0?*

Řešení: Aplikujte výsledek příkladu 3 na výsledek příkladu 2 pro $\lambda(0)$:

$$\lambda(0) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$$

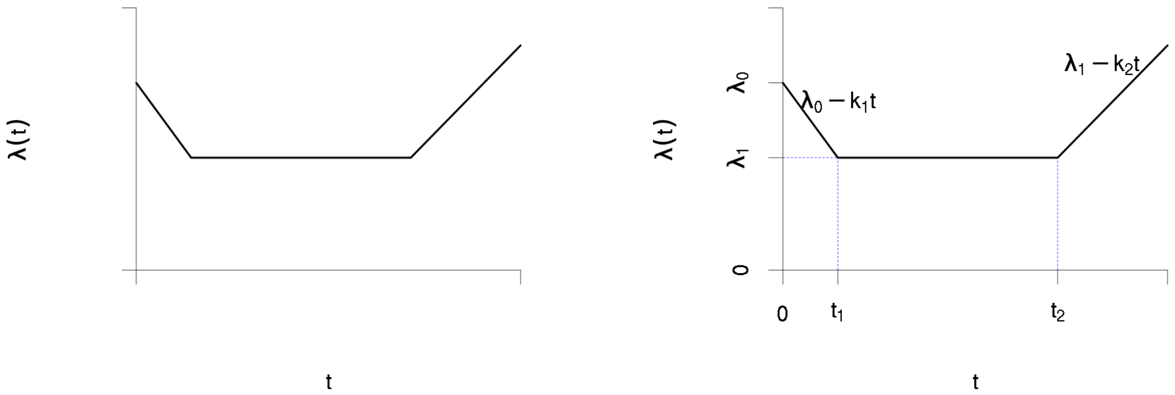
▶ **Příklad 5** *Nalezněte vztah pro výpočet T_s.*

Řešení:

$$T_s = \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2}$$

2 Rozdělení poruch s intenzitou po úsecích lineární

▶ **Příklad 6** *V praxi se často používá tzv. „vanová“ charakteristika. Nalezněte její parametrizaci.*



Obrázek 2: Obecný tvar „vanové křivky“ vlevo, vpravo její parametrizace.

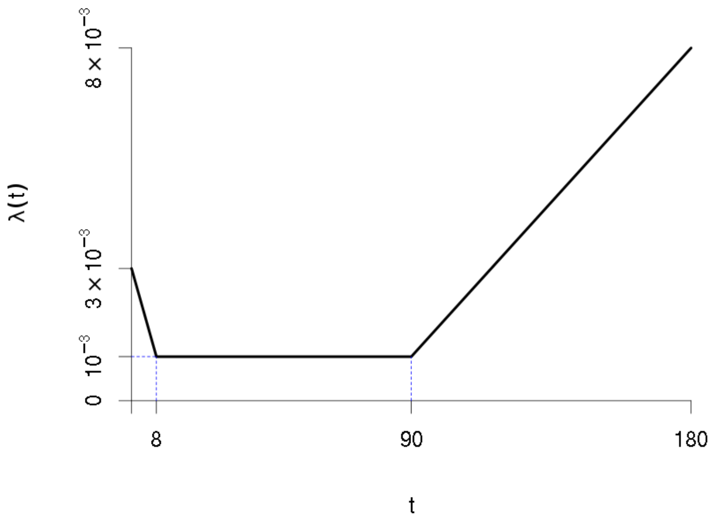
Řešení:

1) $t < t_1$: $\lambda(t) = \lambda_0 + k_1 t$ $\left(k_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{t_1}\right)$
2) $t_1 < t < t_2$: $\lambda(t) = \lambda_1$
3) $t > t_2$: $\lambda(t) = \lambda_1 + k_2(t - t_2)$

▶ **Příklad 7** *Intenzita poruch daného systému je po částech lineární, viz obrázek, přičemž:*

$$\lambda(0) = 3.10^{-3}$$
$$\lambda(50) = 10^{-3}$$
$$\lambda(180) = 8.10^{-3}$$

Spočítejte pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$ v čase t=150.



Řešení: Pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$ je dána

$$R(t) = R(0)e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}.$$

Integrál v exponentu můžeme spočítat jako součet tří integrálů (v dalším uvažujme $R(0) = 1$):

$$\int_0^{150} \lambda(\tau)d\tau = \int_0^8 \lambda(\tau)d\tau + \int_8^{90} \lambda(\tau)d\tau + \int_{90}^{150} \lambda(\tau)d\tau$$

a $R(t)$ je pak

$$e^{-\int_0^{150} \lambda(\tau)d\tau} = e^{-\int_0^8 \lambda(\tau)d\tau - \int_8^{90} \lambda(\tau)d\tau - \int_{90}^{150} \lambda(\tau)d\tau} = e^{-\int_0^8 \lambda(\tau)d\tau}e^{-\int_8^{90} \lambda(\tau)d\tau}e^{-\int_{90}^{150} \lambda(\tau)d\tau}$$

Integrál v exponentu odpovídá ploše pod grafem intenzity poruch $\lambda(t)$, proto můžeme jednoduše počítat $R(t) = e^{-S}$, kde S je právě plocha pod grafem. $\lambda(t)$.
Nejprve tedy spočítejme plochy tak, aby $R(t) = e^{-S_1}e^{-S_2}e^{-S_3}$:

$$S_1 = \frac{3.10^{-3} + 10^{-3}}{2}(8 - 0)1,6.10^{-2} \qquad \left[\frac{f(x_1) + f(x_0)}{2}(x_1 - x_0)\right]$$
$$S_2 = 10^{-3}(90 - 8) = 8,2.10^{-2}$$

Pro výpočet S_3 musíme spočítat $\lambda(150)$. Interpolací:

$$\lambda(t) = \lambda(t_0) + \frac{\lambda(t_1) - \lambda(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0)$$

dostaneme

$$\lambda(150) = \frac{\lambda(180) - \lambda(90)}{180 - 90}(150 - 90) = \frac{7.10^{-3}}{90}60 \approx 5,66.10^{-3},$$

potom

$$S_3 = \frac{10^{-3} + 4,66.10^{-3}}{2}(150 - 90) \approx 0.2$$

Konečně

$$R(t) = e^{-1,6.10^{-2}}e^{-8,2.10^{-2}}e^{-0,2} \approx 0,742.$$

► **Příklad 8** *Pro systém se stejnou intenzitou poruch jako v předchozím příkladu určete čas τ, pro který $R(\tau) = 0.6$.*

Řešení: Z předchozího příkladu víme, že $R(90) = e^{-S_1}e^{-S_2} = 0,907$. Proto bude τ pro $R(\tau) = 0,6$ určitě větší než 90 a pro výpočet budeme vycházet ze vztahu pro třetí interval $t \in (90;\infty)$. Nejprve nalezneme parametrický tvar polopřímky popisující intenzitu poruch pro $t > 90$: ve tvaru $\lambda(t) = \lambda_0 + kt$. Pro zjednodušení uvažujme substituci $\tau = t - 90$, pak

$$\lambda_0 = \lambda(90) = 10^{-3}$$

$$k = \frac{\lambda(t_1) - \lambda(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0) = \frac{7.10^{-3}}{180 - 90} = 7,7.10^{-5}$$

Ze vztahů pro pp. bezporuchového provozu

$$R(90 + \tau_2) = R(90)e^{-\int_0^{\tau_2} 10^{-3} + 7,7.10^{-5}tdt} = R(90)e^{-(10^{-3}\tau_2 + 3,8.10^{-5}\tau_2^2)} = 0,6$$

z toho

$$e^{-(10^{-3}\tau_2) + 3,8.10^{-5}\tau_2^2} = \frac{0,6}{R(90)} = \frac{0,6}{0,907}$$

po zlogaritmování

$$3,8.10^{-5}\tau_2^2 + 10^{-3}\tau_2 = 0,4165$$

$$3,8.10^{-5}\tau_2^2 + 10^{-3}\tau_2 - 0,4165 = 0$$

$$\tau_2 = \frac{-10^{-3} \pm \sqrt{10^{-6} - 4.3,88.10^{-5}.(-0,4165)}}{2.3,88.10^{-5}} = 91,43s$$

$$\tau = 90 + \tau_2 = 181,43s$$

Pozn.: Pozor! Kvadratická rovnice má obecně dvě řešení. Protože jsme počítali s funkcí λ začínající v čase $t = 90$, je druhé řešení záporné $\Rightarrow$ bereme kladné řešení. Pokud bychom ale počítali s funkcí λ vyjádřenou vzhledem k počátečnímu času $t = 0$, vyjdou obě řešení kladná, ale druhé řešení bude $\tau < 90$. Protože víme, že musí platit $\tau > 90$, bereme za výsledek větší z obou hodnot.
Pozn.: kvadratická rovnice při alternativním výpočtu – integrál v intervalu $\langle 90; \tau\rangle$:
$3,8.10^{-5}\tau^2 - 6 \cdot 10^{-3}\tau - 0,188 = 0$

3 Spolehlivost soustav

Předpoklad : každý prvek i každá soustava se nacházejí vždy v jednom ze stavů : **bezporuchovém stavu** nebo **ve stavu poruchy**.

► **Příklad 9 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sériová soustava)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy, R = ? Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p, prvky jsou stejné.*

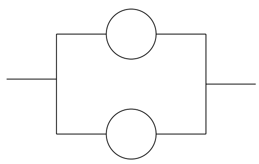
Řešení:

$$\begin{aligned} q &= 1-p, \\ R &= P(X_1 \bigcap X_2) = P(X_1|X_2)\cdot P(X_2) = P(X_1)\cdot P(X_2) = p^2, \\ Q &= 1-R = P(\overline{X_1}\bigcup \overline{X_2}) = P(\overline{X_1}) + P(\overline{X_2}) - P(\overline{X_1}\cdot \overline{X_2}) = 2(1-p)-(1-p)^2 = 1-p^2. \end{aligned}$$

obecné vztahy R, Q, pro n prvků :

$$\begin{aligned} R &= p^n \\ Q &= 1-p^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\binom{n}{i}(1-p)^i \end{aligned}$$

► **Příklad 10 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - paralelní soustava)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p, prvky jsou stejné.*



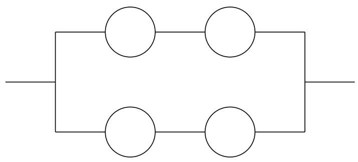
Řešení:

$$\begin{aligned} R &= P(X_1 \bigcup X_2) = 1-Q = P(X_1)+P(X_2)-P(X_1\cdot X_2) = 2p-p^2, \\ Q &= P(\overline{X_1}\bigcap \overline{X_2}) = (1-p)(1-p) = 1-2p+p^2. \end{aligned}$$

obecné vztahy R, Q, pro n prvků :

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}p^i \\ Q &= (1-p)^n \end{aligned}$$

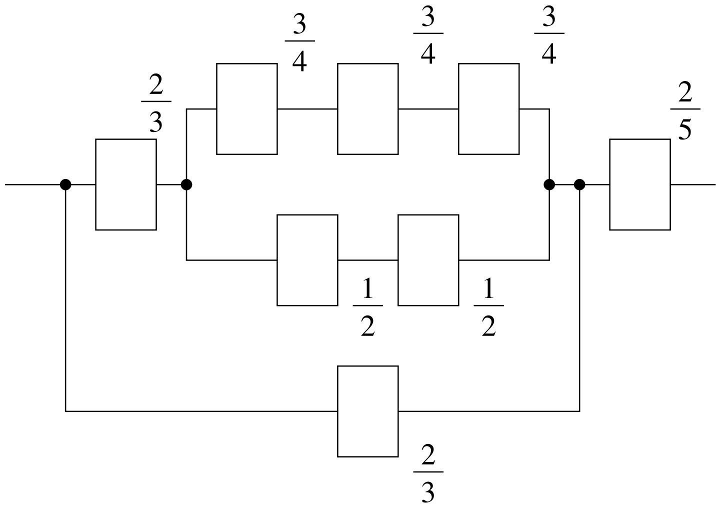
► **Příklad 11 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sérioparalelní soustava)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p, všechny prvky jsou stejné.*



Řešení:

$$\begin{aligned} R &= 2p^2 - p^4, \\ Q &= (1-p^2)(1-p^2) = 1 - 2p^2 + p^4. \end{aligned}$$

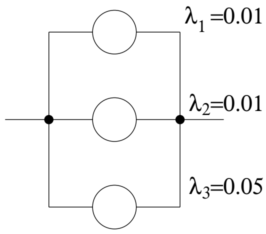
► **Příklad 12 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sérioparalelní)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy.*



Řešení:

$$R = \left\{1 - \left[1 - \left(1 - \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3\right] \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\right) \cdot \frac{2}{3}\right] \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)\right\} \cdot \frac{2}{5} = \frac{913}{2888} = 0,317.$$

► **Příklad 13 (Paralelní soustava se třemi prvky)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy na Obr. 3 složené z prvků se známými intenzitami poruch. (Pravděpodobnost počítejte v čase t=50.)*



Obrázek 3:

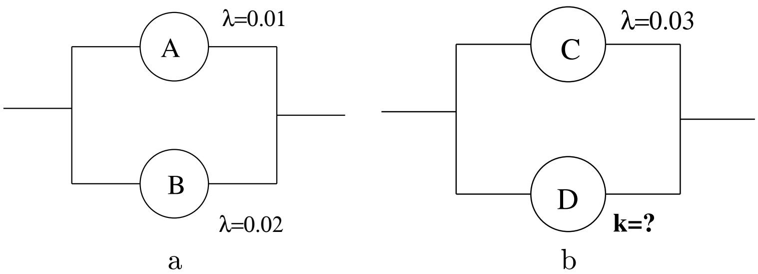
Řešení: Je nutné si uvědomit že pravděpodobnost bezporuchového provozu je funkce času – budeme hledat pravděpodobnost v konkrétním čase $t = 50$. Dále je nutné si ujasnit, jakému rozdělení pravděpodobnosti podléhají prvky soustavy. Jejich intenzity jsou zadány jako konstanty a proto se jedná o exponenciální rozdělení poruch. Pro jednotlivé prvky v čase t=50 platí:

$$\begin{aligned} R_1(50) &= e^{-\lambda_1 \cdot 50} = e^{-0,5} = 0,607, \\ R_2(50) &= R_1(50) = e^{-0,5} = 0,607, \\ R_3(50) &= e^{-\lambda_3 \cdot 50} = e^{-2,5} = 0,082. \end{aligned}$$

Pro soustavu potom bude platit

$$R(50) = 1 - [(1 - R_1(50))(1 - R_2(50))(1 - R_3(50))] = 1 - [0,393 \cdot 0,393 \cdot 0,918] = 0,858.$$

► **Příklad 14 (Paralelní soustava se třemi prvky)** *Uvažujme obvody na obr.4. Prvky, jejichž poruchy podléhají exponenciálnímu rozdělení, jsou označeny parametrem λ. Spodní prvek na obr.4 vykazuje poruchy podléhající Rayleighovu rozdělení s parametrem k. Určete tento parametr tak, aby pravděpodobnost bezporuchového provozu obou soustav byla v čase $t = 10$ s stejná.*



Obrázek 4:

Řešení: Nejprve si spočítáme pravděpodobnost bezporuchového provozu jednotlivých prvků:

$$\begin{aligned}
R_A(t) &= e^{-\lambda_A t} \rightarrow R_A(10) = e^{-0.01\cdot 10} = 0.904 \\
R_B(t) &= e^{-\lambda_A t} \rightarrow R_B(10) = e^{-0.02\cdot 10} = 0.818 \\
R_C(t) &= e^{-\lambda_C t} \rightarrow R_C(10) = e^{-0.03\cdot 10} = 0.740 \\
R_D(t) &= e^{\frac{-kt^2}{2}}
\end{aligned}$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu levé soustavy v čase $t = 10$ s je:

$$R_1(10) = R_A(10) + R_B(10) - R_A(10)R_B(10) = 0.904 + 0.818 - 0.904 \cdot 0.818 = 0.983$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu pravé soustavy v čase $t = 10$ s je:

$$R_2(10) = R_C(10) + R_D(10) - R_C(10)R_D(10) = 0.740 + R_D(10) - 0.740 R_D(10)$$

Určíme $R_D(10)$:

$$R_D(10) = \frac{R_2(10) - R_C(10)}{1 - R_C(10)} = \frac{0.983 - 0.740}{1 - 0.740} = 0.934.$$

Teď můžeme vypočítat hodnodu k:

$$R_D(t) = e^{\frac{-kt^2}{2}} \rightarrow k = \frac{-2\ln R_D(t)}{t^2} = \frac{-2\ln 0.934}{10^2} = 0.00136.$$

Soustava m z n

Mějme soustavu s n prvky, přičemž alespoň m musí správně pracovat. Pokud jsou prvky shodné a nezávislé, pak lze spolehlivost soustavy popsat binomickým rozdělením.
Pravděpodobnost bezporuchového stavu právě m prvků z n je

$$f(m, n, p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

▶ **Příklad 15** *Jaká je pravděpodobnost bezporuchového stavu nejméně m prvků z n?*

Řešení:

$$R = \sum_{k=m}^{n} f(k, n, p) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

▶ **Příklad 16** *Pro kterou soustavu platí, že $m = 1$?*

Řešení: Paralelní soustava

▶ **Příklad 17** *Pro kterou soustavu platí, že $m = n$?*

Řešení: Sériová soustava

► **Příklad 18 (Ocelové lano - soustava m z n)** *Ocelové lano má 4 vlákna, správná funkčnost je zajištěná pokud nejsou přetržena alespoň dvě vlákna.* $n = 4$; $m = 2$; *Pravděpodobnost nepřetržení jednoho vlákna je* $p = 0.9$; $R =$*?*

Řešení:

$$R = \binom{4}{2} 0,9^2 \cdot 0,1^2 + \binom{4}{3} 0,9^3 \cdot 0,1 + \binom{4}{4} 0,9^4 = 0,9963.$$