Statistika a spolehlivost v lékařství
1. cvičení, 1. dubna 2014

► **Příklad 1** *Tahová síla papíru používaného pro výrobu potravinových sáčků je důležitá charakteristika kvality. Je známo, že že síla (označme x) podléhá normálnímu rozložení se střední hodnotou $\mu = 40lb/in^2$ a standardní odchylku $\sigma = 2lb/in^2$, tj. $x \approx N(40, 2^2)$. Odběratel sáčků vyžaduje, aby sáčky měly sílu alespoň $\mu = 35lb/in^2$. Jaká je pravděpodobnost, že sáček vyhoví požadavkům odběratele?*

Řešení: Pravděpodobnost při normálním rozložení je dána vztahem:

$$P(x \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

Tento integrál nemůže být vyčíslen analyticky, nicméně můžeme provést substituci $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, čímž dostaneme funkci, která není závislá na μ a σ^2:

$$P(x \leq a) = P(z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}),$$

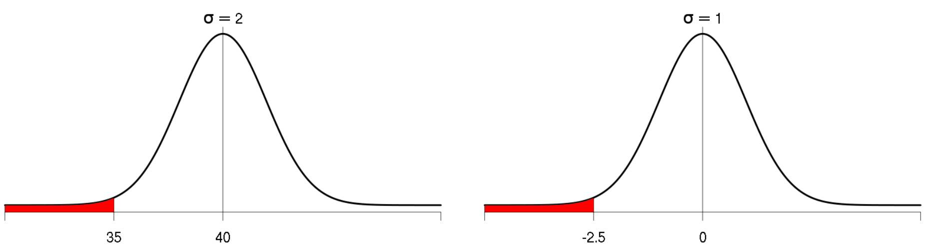
kde $\Phi(\dot{})$ standardnímu normálnímu rozložení ($N(0,1)$). My chceme vyjádřit $P(x \geq 35) = 1 - P(x \leq 35)$.

$$P(x \leq 35) = P(z \leq \frac{35-40}{2}) = P(z \leq -2.5) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) = 0.0062.$$

Požadovaná pravděpodobnost je tedy

$$P(x \geq 35) = 1 - P(x \leq 35) = 1 - 0.0032 = 0.9938.$$

Pozn: vyčíslení funkce Φ bývá součástí statistických tabulek (viz např. D. Montgomery: *Introduction to Statistical Quality Control*).



Obrázek 1: Standardizace normálního rozdělení.

1 Charakteristiky spolehlivosti

Mějme spojitou proměnnou (typicky čas $t \geq 0$) a uvažujme pravděpodobnost, že porucha, resp. čas poruchy, ξ (spojitá nezávislá veličina) nastane v čase t. **Pravděpodobnost poruchy** $Q(t)$ definujeme jako distribuční funkci spojité nezávislé veličiny ξ (čas poruchy):

$$Q(t) = F(t) = P(\xi \leq t).$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$ je definována jako doplněk k pravděpodobnosti poruchy:

$$R(t) = 1 - Q(t),$$

což je pravděpodobnost, že porucha nenastane dříve než v čase t:

$$R(t) = P(\xi > t).$$

Hustota pravděpodobnosti $f(t)$ je derivace distribuční funkce a tedy:

$$f(t) = \frac{\partial F(t)}{\partial t} = \frac{\partial(1 - R(t))}{\partial t} = -\frac{\partial R(t)}{\partial t}.$$

Další veličinou popisující spolehlivost je **intenzita poruch** $\lambda(t)$, kterou definujeme jako podíl hustoty a pravděpodobnosti bezporuchového provozu:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Střední doba bezporuchového provozu:

$$T_s = \int_0^\infty t f(t) \mathrm{d}t.$$

Rozptyl náhodné doby poruchy:

$$D = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \int_0^\infty t^2 f(t) \mathrm{d}t - T_s^2.$$

▶ **Příklad 2** *Nalezněte vztah pro výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu z intenzity, tj. funkční předpis*

$$R(t) = fce(\lambda(t)).$$

Řešení:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{\partial Q(t)}{\partial t}}{R(t)} = -\frac{\frac{\partial R(t)}{\partial t}}{R(t)}$$

Z toho po vynásobení ∂t dostáváme

$$-\lambda(t)\partial t = \frac{\partial R(t)}{R(t)}.$$

A po integraci[1] (uvědomte si, že integrál z podílu derivace funkce a této funkce je logaritmus dané funkce):

$$-\int_0^T \lambda(t)\mathrm{d}t = [\ln R(t)]_0^T = \ln R(T) - \ln R(0).$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu v čase nula je $R(0) = 1$, tedy $\ln R(0) = 0$ a proto druhý člen z levého výrazu vypadne. Nakonec po úpravě získáváme výsledný vztah:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

► **Příklad 3** *Nalezněte vztah pro výpočet střední doby bezporuchového provozu T_s z pravděpodobnosti bezporuchového provozu $R(t)$.*

Řešení:

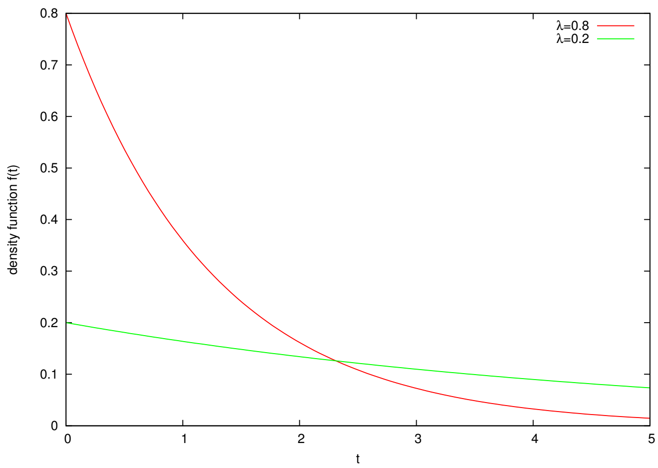
$$T_s = \int_0^\infty t f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty t(-\frac{dR(t)}{dt})\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} u' = R' & u = R \\ v = t & v' = 1 \end{array} \right| = -[Rt]_0^\infty + \int_0^\infty R\mathrm{d}t = \int_0^\infty R(t)dt$$

První závorka $[Rt]_0^\infty$ je rovná nule, protože pro $t \to \infty$ platí typicky $R(\infty) \to 0$.

[1] Určitým integrálem jako funkci horní meze, neboť nám jde také o určení (vyčíslení) konstatny, tu bychom jinak ztratity.

2 Exponenciální rozdělení

$$
\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lambda & \lambda > 0, t \geq 0 \\
R(t) &= e^{-\int \lambda dt} = e^{-\lambda t} \\
Q(t) &= 1 - e^{-\lambda t} \\
f(t) &= \lambda e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$



Obrázek 2: Distribuční funkce exponenciálního rozdělení pro dvě různé hodnoty λ.

▶ **Příklad 4** *Nalezněte vztah pro výpočet střední doby bezporuchového provozu T_s.*

Řešení:

$$
\begin{aligned}
T_s &= \int_0^\infty t f(t) \mathrm{d}t = \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u' = \lambda e^{-\lambda t} & u = -e^{\lambda t} \\ v = t & v' = 1 \end{vmatrix} = \left[\left(-\tfrac{1}{\lambda} - t\right) e^{-\lambda t}\right]_0^\infty = \\
&= \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{\lambda} - t\right) e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

▶ **Příklad 5** *Nalezněte vztah pro výpočet rozptylu náhodné doby poruchy D.*

Řešení:

$$
\begin{aligned}
D &= \int_0^\infty t^2 \lambda e^{\lambda t} \mathrm{d}t - T_s^2 = \begin{vmatrix} u' = \lambda e^{\lambda t} & u = -e^{\lambda t} \\ v = t^2 & v' = 2t \end{vmatrix} = \left[-t^2 e^{-\lambda t} + 2 \int t e^{-\lambda t} \mathrm{d}t\right]_0^\infty - T_s^2 = \\
&= \begin{vmatrix} u' = e^{-\lambda t} & u = -\frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \\ v' = t & v = 1 \end{vmatrix} = \left[-t^2 e^{-\lambda t} - \tfrac{2t}{\lambda} e^{-\lambda t} + \tfrac{2}{\lambda} \int e^{-\lambda t} \mathrm{d}t\right]_0^\infty - T_s^2 = \\
&= \lim_{t \to \infty} (-t^2 - 2t) e^{-\lambda t} + \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda t} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

Pozn.: Výměna neporušeného prvku s exponenciálním rozdělením poruch nepřinese zlepšení bezporuchovosti.

▶ **Příklad 6** *Předpokládejme nyní stroj, který se porouchá čtyřikrát za týden. Jaká je doba T_β zaručující, že pravděpodobnost bezporuchového provozu je $\beta = R(T_\beta) = 0.99$?*

Řešení: V našem případě je intenzita poruch konstantní a rovna $\lambda = 4$týden^{-1} $=$ $= \frac{4}{7 \cdot 24 \cdot 60}min^{-1} \doteq 4 \cdot 10^{-4}$min^{-1}. Nyní hledáme t takové, že $R(T_\beta) = \beta$. Po dosazení

$$R(t) = e^{-\int_0^T \lambda(t)\mathrm{d}t} = e^{-\lambda T_\beta} = \beta. \qquad (1)$$

dostáváme

$$-\lambda T_\beta = \ln \beta \qquad (2)$$

a tedy

$$T_\beta = -\frac{1}{\lambda} \ln \beta = -\frac{1}{4 \cdot 10^{-4}} \ln 0.99 = 25\text{min}.$$

Je dobré si uvědomit, že doba bezporuchového provozu T_β je velmi citlivá na volbu β. To je způsobeno logaritmem ve vzorci 2. Už při volbě $\beta = 0.90$ (tedy změně o 0.09) vzroste T_β zhruba desetkrát na $T_\beta = 263$ minut.

▶ **Příklad 7** *Předpokládejme součástku, jejíž spolehlivost má exponenciální rozdělení. Jaká je pravděpodobnost, že se součástka porouchá před očekávanou životností?*

Řešení: Intenzita poruch je λ a očekávaná životnost (střední doba bezporuchového provozu) je $\frac{1}{\lambda}$. Chceme tedy vyčíslit:

$$P(x \leq \frac{1}{\lambda}) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = 1 - e^{-1} = 0.63212$$

▶ **Příklad 8** *Výrobce kalkulaček nabízí jednoroční záruku. Pokud je kalkulačka v záruce vadná, je zákazníkovi vyměněna za novou. Spolehlivost kalkulačky je popsána následující hustotou pravděpodobnosti:*

$$f(x) = 0.125e^{-0.125x}, x > 0$$

(a) Kolik procent kalkulaček se rozbije během záruční doby?
(b) Výrobní cena kalkulačky je \$50 a zisk z jedné kalkulačky je \$25. Jaký je efekt výměny kalkulačky na čistý zisk?
(c) Jaká musí být prodejní cena kalkulačky, abychom při výrobní ceně kalkulačky \$50 měli čistý zisk (po započítání ztráty z výměny vadné kalkulačky) \$25.

Řešení: (a) Dle hustoty pravděpodobnosti podléhá spolehlivost kalkulačky exponenciálnímu rozdělení s $\lambda = 0.125$. Pravděpodobnost poruchy v čase $t = 1$ rok je tedy dána takto:

$$F(1) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0.125} \approx 1 - 0.8825 = 0.1175,$$

tj. rozbije se cca 11.75% kalkulaček.
(b) Za každou rozbitou kalkulačku je nutno k nákladům přičíst \$50, což jsou výrobní náklady na výměnu kalkulačky. To sníží profit z jedné kalkulačky o $0.1175 \times 50 = 5.875\$$.
(c) Výsledná cena je součtem výrobní ceny, ceny za výměnu kalkulačky a požadovaného zisku: $cena = 50 + 5.875 + 25 = \$80.875$

▶ **Příklad 9** *Vypočtětě hodnotu mediánu pro exponenciální rozdělení s parametrem* $\lambda = 0.125$.

Řešení: Pro medián t_m platí:

$$\int_{-\infty}^{t_m} \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = 0.5$$

Po integraci

$$|-e^{-\lambda t}|_0^{t_m} = 0.5$$

Dosadíme meze:

$$-e^{-\lambda t_m} + 1 = 0.5$$

a vypočteme medián t_m:

$$t_m = \frac{-\ln 0.5}{\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Po dosazení:

$$t_m = \frac{\ln 2}{0.125} = 5.54.$$

► **Příklad 10** *Výrobce HDD uvádí hodnotu MTBF=10^6 hodin. Kolik procent disků se porouchá v prvním roce?*

Řešení:

MTFB (Mean Time Between Failures) je střední doba mezi poruchami, tj. $T_s = MTBF$, tedy $\lambda = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$. Pravděpodobnost poruchy v 1. roce je:

$$Q(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-10^{-6} 8760} = 1 - 0.9913 = 0.0087.$$

Pozn: počet hodin v roce je $24 \cdot 365 = 8760$.

U HDD se často jako parametr spolehlivosti uvádí AFR (Annualized failure rate), který je definován jako

$$AFR = 1 - e^{-8760/MTBF},$$

kde $MTBF$ je střední doba mezi poruchami v hodinách. AFR tedy není nic jiného než nám známá pravděpodobnost poruchy $ARF = Q(1rok)$.

3 Rayleighovo rozdělení

$$\begin{array}{rcl} \lambda(t) & = & kt \qquad\qquad k \geq 0, t \geq 0 \\ R(t) & = & e^{\int ktdt} = e^{-\frac{k}{2}t^2} \\ Q(t) & = & 1 - e^{-\frac{k}{2}t^2} \\ f(t) & = & kte^{-\frac{k}{2}t^2} \\ D & = & (2 - \frac{\pi}{2})\frac{1}{k} \end{array}$$

▶ **Příklad 11** *Nalezněte vztah pro výpočet střední doby bezporuchového provozu T_s.*

Řešení: Postup, při kterém bychom se snažili aplikovat *per partes* není shůdný, neboť mocnina t se nesníží, proto výraz upravíme na vztah $\int e^{\frac{kt^2}{2}}$.

$$T_s = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty t\frac{d(1-R(t))}{dt}dt = -\int_0^\infty t\frac{dR}{dt}dt = \left| \begin{array}{ll} u' = R' & u = R \\ v = t & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$-\left[tR(t)\right]_0^\infty + \int_0^\infty R(t)dt == -\left[te^{-\frac{kt^2}{2}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{kt^2}{2}}dt$$

První závorka je nulová pro oba limitní případy ($t \to 0, t \to \infty$). K výpočtu integrálu použijeme následující vztah:

$$N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty N(0,1)dx = 1 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Abychom mohli tento výsledek použít, musíme provést následující substituci: $\left| \begin{array}{l} \sqrt{k}t = a \\ t = \frac{1}{\sqrt{k}}a \\ dt = \frac{1}{\sqrt{k}}da \end{array} \right|$.

Potom

$$T_s = \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{2}}da = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

4 Weibullovo rozdělení

$$\lambda(t) \quad = \quad \frac{m}{t_0}t^{m-1} \qquad m > 0, t_0 > 0, t \geq 0,$$

kde t_0 je tzv. *scale*, normalizační konstanta (časová) a m je bezrozměrný parametr, reprezentující tvar charakteristiky, tzv. *shape*.

$$\begin{array}{rcl} R(t) & = & e^{-\frac{t^m}{t_0}}, \\ Q(t) & = & 1 - e^{-\frac{t^m}{t_0}}, \\ f(t) & = & \frac{m}{t_0}t^{m-1}e^{-\frac{t^m}{t_0}}, \\ T_s & = & t_0^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right), \\ D & = & t_0^{\frac{2}{m}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)\right], \end{array}$$

kde

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Pro $x \in N$ platí:

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$

Pozn.:

Pro $m = 1$ $\rightarrow$ exponenciální rozdělení.

Pro $m = 2$ $\rightarrow$ Rayleighovo rozdělení,

Pro $m < 1$ $\rightarrow$ průběh $\lambda(t)$ klesající průběh, což je vhodné pro popis počátečních fází provozu.

► **Příklad 12** *Máme systém s intenzitou poruch danou Weibullovým rozdělením s $m = \frac{1}{4}$. Intenzita poruch v čase $t = 1$ je $\lambda(1) = \frac{1}{5}$. Určete střední dobu poruch tohoto systému.*

Řešení: Nejprve je nutné určit parametr t_0 Weibullova rozdělení:

$$\lambda(1) = \frac{1}{4t_0} 1^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow t_0 = \frac{5}{4}.$$

Střední doba bezporuchového provozu je potom dána

$$T_s = t_0^{1/m} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^4 \Gamma(5) = \frac{625}{256} 4! = 58.6.$$