Statistika a spolehlivost v lékařství

22. listopadu 2011

Spolehlivost - 1. cvičení

1 Motivační

► **Příklad 1** *Tahová síla papíru používaného pro výrobu potravinových sáčků je důležitá charakteristika kvality. Je známo, že že síla (označme x) podléhá normálnímu rozložení se střední hodnotou $\mu = 40lb/in^2$ a standardní odchylku $\sigma = 2lb/in^2$, tj. $x \approx N(40, 2^2)$. Odběratel sáčků vyžaduje, aby sáčky měly sílu alespoň $\mu = 35lb/in^2$. Jaká je pravděpodobnost, že sáček vyhoví požadavkům odběratele?*

Řešení: Pravděpodobnost při normálním rozložení je dána vztahem:

$$P(x \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

Tento integrál nemůže být vyčíslen analyticky, nicméně můžeme provést substituci $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, čímž dostaneme funkci, která není závislá na μ a σ^2:

$$P(x \leq a) = P(z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}),$$

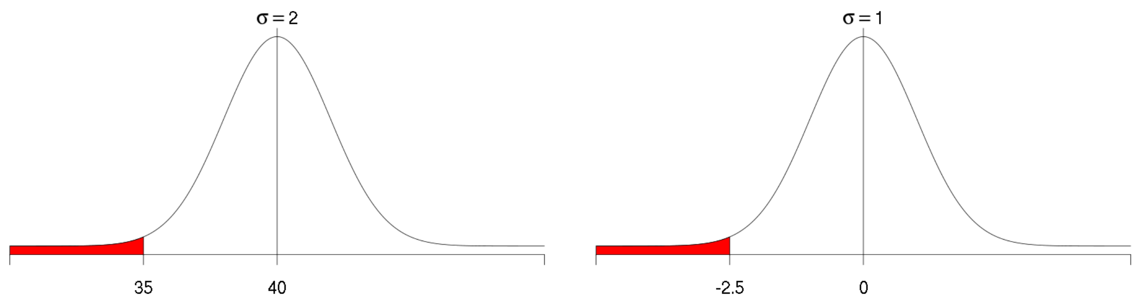
kde $\Phi(\dot{})$ standardnímu normálnímu rozložení ($N(0,1)$).
My chceme vyjádřit $P(x \geq 35) = 1 - P(x \leq 35)$.

$$P(x \leq 35) = P(z \leq \frac{35-40}{2}) = P(z \leq -2.5) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) = 0.0062.$$

Požadovaná pravděpodobnost je tedy

$$P(x \geq 35) = 1 - P(x \leq 35) = 1 - 0.0032 = 0.9938.$$

Pozn: vyčíslení funkce Φ bývá součástí statistických tabulek (viz např. D. Montgomery: *Introduction to Statistical Quality Control*).



Obrázek 1: Standardizace normálního rozdělení

2 Charakteristiky spolehlivosti

Mějme spojitou proměnnou (typicky čas $t \geq 0$) a uvažujme pravděpodobnost, že porucha, resp. čas poruchy, ξ (spojitá nezávislá veličina) nastane v čase t. **Pravděpodobnost poruchy** $Q(t)$ definujeme jako distribuční funkci spojité nezávislé veličiny ξ (čas poruchy):

$$Q(t) = F(t) = P(\xi \leq t).$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$ je definována jako doplněk k pravděpodobnosti poruchy:

$$R(t) = 1 - Q(t),$$

což je pravděpodobnost, že porucha nenastane dříve než v čase t:

$$R(t) = P(\xi > t).$$

Hustota pravděpodobnosti $f(t)$ je derivace distribuční funkce a tedy:

$$f(t) = \frac{\partial F(t)}{\partial t} = \frac{\partial(1 - R(t))}{\partial t} = -\frac{\partial R(t)}{\partial t}.$$

Další veličinou popisující spolehlivost je **intenzita poruch** $\lambda(t)$, kterou definujeme jako podíl hustoty a pravděpodobnosti bezporuchového provozu:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Střední doba bezporuchového provozu:

$$T_s = \int_0^\infty t f(t) dt.$$

Rozptyl náhodné doby poruchy:

$$D = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \int_0^\infty t^2 f(t) dt - T_s^2.$$

► **Příklad 2** *Nalezněte vztah pro výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu z intenzity, tj. funkční předpis*

$$R(t) = fce(\lambda(t)).$$

Řešení:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{\partial Q(t)}{\partial t}}{R(t)} = -\frac{\frac{\partial R(t)}{\partial t}}{R(t)}$$

Z toho po vynásobení ∂t dostáváme

$$-\lambda(t)\partial t = \frac{\partial R(t)}{R(t)}.$$

A po integraci[1] (uvědomte si, že integrál z podílu derivace funkce a této funkce je logaritmus dané funkce):

$$-\int_0^T \lambda(t)\partial t = [\ln R(t)]_0^T = \ln R(T) - \ln R(0).$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu v čase nula je $R(0) = 1$, tedy $\ln R(0) = 0$ a proto druhý člen z levého výrazu vypadne. Nakonec po úpravě získáváme výsledný vztah:

$$R(t) = e^{-\int_0^T \lambda(t)\partial t}.$$

▶ **Příklad 3** *Nalezněte vztah pro výpočet střední doby bezporuchového provozu T_s z pravděpodobnosti bezporuchového provozu $R(t)$.*

Řešení:

$$T_s = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty t(-\frac{dR(t)}{dt})dt = \left| \begin{array}{ll} u' = R' & u = R \\ v = t & v' = 1 \end{array} \right| = -[Rt]_0^\infty + \int_0^\infty Rdt = \int_0^\infty R(t)dt$$

První závorka $[Rt]_0^\infty$ je rovná nule, protože pro $t \to \infty$ platí typicky $R(\infty) \to 0$.

▶ **Příklad 4** *Předpokládejme nyní stroj, který se porouchá čtyřikrát za týden. Jaká je doba T_β zaručující, že pravděpodobnost bezporuchového provozu je $\beta = R(T_\beta) = 0.99$?*

Řešení: V našem případě je intenzita poruch konstantní a rovna $\lambda = 4\text{týden}^{-1} = $ $= \frac{4}{7\cdot 24\cdot 60}\text{min}^{-1} \doteq 4\cdot 10^{-4}\text{min}^{-1}$. Nyní hledáme t takové, že $R(T_\beta) = \beta$. Po dosazení

$$R(t) = e^{-\int_0^T \lambda(t)dt} = e^{-\lambda T_\beta} = \beta. \tag{1}$$

dostáváme

$$-\lambda T_\beta = \ln\beta \tag{2}$$

a tedy

$$T_\beta = -\frac{1}{\lambda}\ln\beta = -\frac{1}{4\cdot 10^{-4}}\ln 0.99 = 25\text{min}.$$

Je dobré si uvědomit, že doba bezporuchového provozu T_β je velmi citlivá na volbu β. To je způsobeno logaritmem ve vzorci 2. Už při volbě $\beta = 0.90$ (tedy změně o 0.09) vzroste T_β zhruba desetkrát na $T_\beta = 263$ minut.

[1] Určitým integrálem jako funkci horní meze, neboť nám jde také o určení (vyčíslení) konstatny, tu bychom jinak ztratity.

3 Exponenciální rozdělení

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lambda & \lambda > 0, t \geq 0\\
R(t) &= e^{-\int \lambda dt} = e^{-\lambda t}\\
Q(t) &= 1 - e^{-\lambda t}\\
f(t) &= \lambda e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

▶ **Příklad 5** *Nalezněte vztah pro výpočet střední doby bezporuchového provozu T_s.*

Řešení:

$$\begin{aligned}
T_s &= \int_0^\infty t f(t) dt = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = \left| \begin{array}{ll} u' = \lambda e^{-\lambda t} & u = -e^{\lambda t} \\ v = t & v' = 1 \end{array} \right| = \left[\left(-\tfrac{1}{\lambda} - t\right) e^{-\lambda t}\right]_0^\infty = \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{\lambda} - t\right) e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

▶ **Příklad 6** *Nalezněte vztah pro výpočet rozptylu náhodné doby poruchy D.*

Řešení:

$$\begin{aligned}
D &= \int_0^\infty t^2 \lambda e^{\lambda t} dt - T_s^2 = \left| \begin{array}{ll} u' = \lambda e^{\lambda t} & u = -e^{\lambda t} \\ v = t^2 & v' = 2t \end{array} \right| = \left[-t^2 e^{-\lambda t} + 2\int t e^{-\lambda t} dt\right]_0^\infty - T_s^2 = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u' = e^{-\lambda t} & u = -\frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \\ v' = t & v = 1 \end{array} \right| = \left[-t^2 e^{-\lambda t} - \tfrac{2t}{\lambda} e^{-\lambda t} + \tfrac{2}{\lambda}\int e^{-\lambda t}\right]_0^\infty - T_s^2 = \\
&= \lim_{t\to\infty} (-t^2 - 2t) e^{-\lambda t} + \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda t} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Pozn.: Výměna neporušeného prvku s exponenciálním rozdělením poruch nepřinese zlepšení bezporuchovosti.

▶ **Příklad 7** *Předpokládejme součástku, jejíž spolehlivost má exponenciální rozdělení. Jaká je pravděpodobnost, že se součástka porouchá před očekávanou životností?*

Řešení: Intenzita poruch je λ a očekávaná životnost (střední doba bezporuchového provozu) je $\frac{1}{\lambda}$. Chceme tedy vyčíslit:

$$P(x \leq \frac{1}{\lambda}) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-1} = 0.63212$$

▶ **Příklad 8** *Výrobce kalkulaček nabízí jednoroční záruku. Pokud je kalkulačka v záruce vadná, je zákazníkovi vyměněna za novou. Spolehlivost kalkulačky je popsána následující hustotou pravděpodobnosti:*

$$f(x) = 0.125 e^{-0.125x}, x > 0$$

(a) Kolik procent kalkulaček se rozbije během záruční doby?
(b) Výrobní cena kalkulačky je \$50 a zisk z jedné kalkulačky je \$25. Jaký je efekt výměny kalkulačky na čistý zisk?
(c) Jaká musí být prodejní cena kalkulačky, abychom při výrobní ceně kalkulačky \$50 měli čistý zisk (po započítání ztráty z výměny vadné kalkulačky) \$25.

Řešení: (a) Dle hustoty pravděpodobnosti podléhá spolehlivost kalkulačky exponenciálnímu rozdělení s $\lambda = 0.125$. Pravděpodobnost poruchy v čase $t = 1$ rok je tedy dána takto:

$$F(1) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0.125} \approx 1 - 0.8825 = 0.1175,$$

tj. rozbije se cca 11.75% kalkulaček.
(b) Za každou rozbitou kalkulačku je nutno k nákladům přičíst \$50, což jsou výrobní náklady na výměnu kalkulačky. To sníží profit z jedné kalkulačky o $0.1175 \times 50 = 5.875$\$.
(c) Výsledná cena je součtem výrobní ceny, ceny za výměnu kalkulačky a požadovaného zisku: $cena = 50 + 5.875 + 25 = \$80.875$