

A6M33SSL: Statistika a spolehlivost v lékařství

Teorie spolehlivosti

Vojta Vonásek
vonasek@labe.felk.cvut.cz

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra kybernetiky

Opakování

Poruchy jednotlivých prvků

- Zatím uvažujeme dvoustavové prvky (funguje/nefunguje)
- Poruchy jsou náhodné v čase
- Pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$
- Intenzita poruch $\lambda(t)$
- Umíme použít různá rozdělení poruch
- Jak je to v případě složitějších soustav/prvků?
 - soustavy prvků
 - vícestavové prvky
 - poruchy s opravami

Spolehlivost soustav

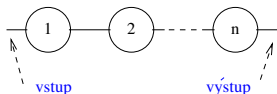
- Analýza spolehlivosti komplexního systému je náročná
- Analýza podsystémů je jednodušší
- Vyžadována znalost o propojení systémů
- Předpokládáme nezávislost poruch podsystémů

Značení:

- X_i : stav, že funguje prvek i ,
→ $P(X_i) = R_i(t)$ je pravděpodobnost, že prvek i funguje
- \bar{X}_i : je, kdy prvek i nefunguje
→ $P(\bar{X}_i) = Q_i(t)$ je pravděpodobnost, že prvek i nefunguje
- Porucha jednoho prvku ještě nemusí znamenat poruchu celého systému
- Sledujeme, zda soustava "přenáší signál ze vstupu na výstup"

Sériové zapojení

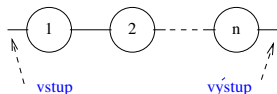
- dvoustavové prvky (buď funguje, nebo je porucha)
- prvky jsou bez oprav
- prvky jsou nezávislé
- celá soustava je funkční, když jsou funkční všechny prvky
- porucha alespoň jednoho prvku způsobí poruchu celé soustavy



$$R = P(X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n) = P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot \dots \cdot P(X_n)$$

Sériové zapojení

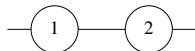
- dvoustavové prvky (buď funguje, nebo je porucha)
- prvky jsou bez oprav
- prvky jsou nezávislé
- celá soustava je funkční, když jsou funkční všechny prvky
- porucha alespoň jednoho prvku způsobí poruchu celé soustavy



$$R = P(X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n) = P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot \dots \cdot P(X_n)$$

Příklad: $P(X_1) = 0.9$, $P(X_2) = 0.8$

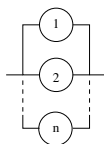
$$R = P(X_1) \cdot P(X_2) = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72$$



Celková pravděpodobnost, že soustava funguje je menší než spolehlivost nejhoršího prvku.

Paralelní zapojení

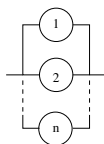
- dvoustavové prvky bez oprav, nezávislé
- celá soustava je funkční, pokud funguje alespoň jeden prvek



$$\begin{aligned}R &= P(X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n) \\&= 1 - P(\text{nefunguje ani jeden prvek}) \\&= 1 - P(\overline{X}_1)P(\overline{X}_2) \cdots P(\overline{X}_n) \\&= 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2)) \cdots (1 - P(X_n))\end{aligned}$$

Paralelní zapojení

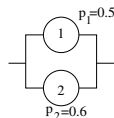
- dvoustavové prvky bez oprav, nezávislé
- celá soustava je funkční, pokud funguje alespoň jeden prvek



$$\begin{aligned}R &= P(X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n) \\&= 1 - P(\text{nefunguje ani jeden prvek}) \\&= 1 - P(\overline{X}_1)P(\overline{X}_2) \cdots P(\overline{X}_n) \\&= 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2)) \cdots (1 - P(X_n))\end{aligned}$$

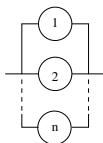
Příklad: $P(X_1) = 0.5$, $P(X_2) = 0.6$

$$R = 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2)) = 1 - 0.5 \cdot 0.4 = 0.8$$



Paralelní zapojení

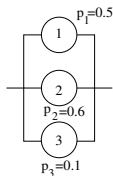
- dvoustavové prvky bez oprav, nezávislé
- celá soustava je funkční, pokud funguje alespoň jeden prvek



$$\begin{aligned}R &= P(X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n) \\&= 1 - P(\text{nefunguje ani jeden prvek}) \\&= 1 - P(\overline{X}_1)P(\overline{X}_2) \cdots P(\overline{X}_n) \\&= 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2)) \cdots (1 - P(X_n))\end{aligned}$$

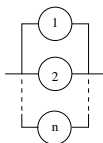
Příklad: $P(X_1) = 0.5$, $P(X_2) = 0.6$, $P(X_3) = 0.1$

$$\begin{aligned}R &= 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2))(1 - P(X_3)) = \\&= 1 - 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.9 = 0.82\end{aligned}$$



Paralelní zapojení

- dvoustavové prvky bez oprav, nezávislé
- celá soustava je funkční, pokud funguje alespoň jeden prvek



$$\begin{aligned}R &= P(X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n) \\&= 1 - P(\text{nefunguje ani jeden prvek}) \\&= 1 - P(\overline{X}_1)P(\overline{X}_2) \cdots P(\overline{X}_n) \\&= 1 - (1 - P(X_1))(1 - P(X_2)) \cdots (1 - P(X_n))\end{aligned}$$

Celková pravděpodobnost, že soustava funguje je větší než spolehlivost nejlepšího prvku.

Sériová/paralelní soustava pro závislé prvky

- Nezávislé prvky: $P(X_1 \wedge X_2) = P(X_1)P(X_2)$
- Závislé prvky: $P(X_1 \wedge X_2) = P(X_1)P(X_2|X_1)$

Sériová soustava:

$$\begin{aligned}R &= P(X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n) \\ &= P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1X_2) \cdots P(X_n|X_1X_2 \dots X_{n-1})\end{aligned}$$

Paralelní soustava:

$$\begin{aligned}Q &= P(\overline{X}_1 \wedge \overline{X}_2 \wedge \dots \wedge \overline{X}_n) \\ &= P(\overline{X}_1)P(\overline{X}_2|\overline{X}_1)P(\overline{X}_3|\overline{X}_1\overline{X}_2) \cdots P(\overline{X}_n|\overline{X}_1 \dots \overline{X}_{n-1})\end{aligned}$$

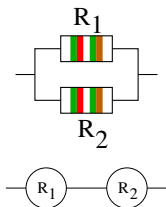
Zapojení prvků ve spolehlivosti

Zapojení prvků z hlediska spolehlivosti nemusí odpovídat jejich fyzickému zapojení!

- Je nutné rozlišovat fyzické zapojení a zapojení z hlediska spolehlivosti
- Záleží na poruchách prvků a na celkové požadované funkci obvodu

Příklad: paralelní zapojení rezistorů

- Rezistor je funkční, pokud má odpor R
- Celý systém je funkční, pokud má odpor $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$
- Porucha jednoho rezistoru vede na změnu odporu celé soustavy
- Z hlediska spolehlivosti jsou prvky v sérii



Zapojení prvků ve spolehlivosti

Schéma spolehlivosti také závisí na jejich funkci a požadované funkčnosti celého systému

- Hydraulický ventil je pod tlakem otevřen
- Pokud není tlak, ventil se automaticky zavře ("fail-safe-close")



Případ I

- Ventil funguje, pokud se při výpadku tlaku automaticky zavře
- Systém funguje, pokud ventily fungují jako bezpečnostní bariéra
- Z hlediska spolehlivosti jsou zapojeny paralelně



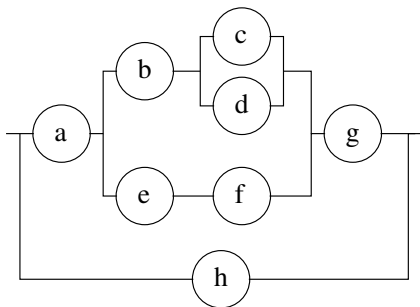
Případ I

- Ventil funguje, pokud je při tlaku otevřený a při ne-tlaku zavřený. Je porouchaný, pokud se zavře i při tlaku.
- Systém funguje, pokud je potrubí při tlaku otevřeně
- Z hlediska spolehlivosti se jedná o sériové zapojení



Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme

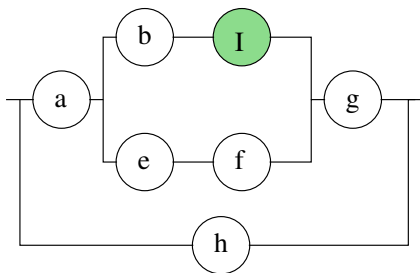


Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme

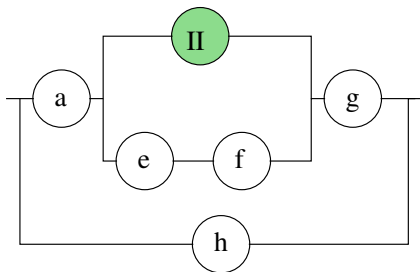


Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme

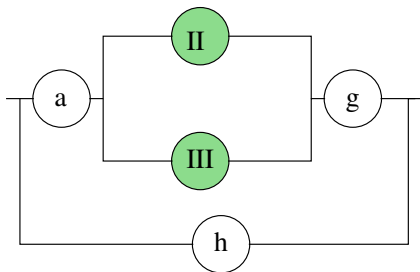


Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme

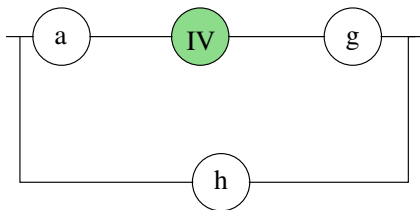


Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme

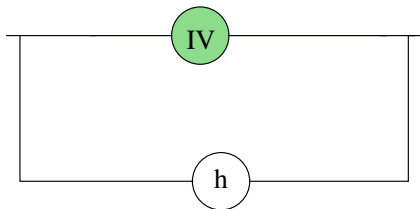


Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

Výpočet spolehlivosti soustav

- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme



Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

Výpočet spolehlivosti soustav

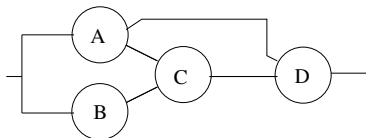
- V soustavě identifikujeme seriové a paralelní kombinace
- Postupně zjednodušujeme



Tento postup ale nelze vždy použít (např. u prvků v více vstupy). Pak

- Metoda rozkladu
- Metoda výčtu (metoda seznamu)
- Výpočet s využitím drah a řezů

Metoda rozkladu

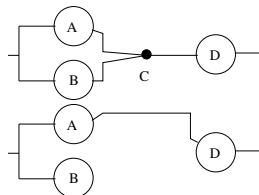


Pokud prvek C funguje:

$$P(S|C) = (P(A) + P(B) - P(A)P(B)) \cdot P(D)$$

Případ, kdy prvek C nefunguje:

$$P(S|\bar{C}) = P(A) \cdot P(D)$$



Celková pravděpodobnost, že soustava funguje:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|C) \cdot P(C) + P(S|\bar{C})(1 - P(C)) \\ &= P(C)[P(A) + P(B) - P(A)P(B)] + (1 - P(C))[P(A)P(D)] \\ &= P(A)P(D) + P(B)P(C)P(D) - P(A)P(B)P(C)P(D) \end{aligned}$$

Systémy typu m z n

- Systém se skládá z n komponent
- Jednotlivé prvky jsou identické, nezávislé a dvou-stavové
- Pravděpodobnost bezporuchového provozu každého prvku je p

Pro správnou funkci systému je třeba právě m prvků.

Pravděpodobnost, že m prvků funguje je:

$$P = \binom{n}{m} p^m (1 - p)^{n-m}$$

Pro správnou funkci systému je třeba alespoň m prvků.

Pravděpodobnost, že alespoň m prvků funguje je:

$$P = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

- Použití: automobilový průmysl, telekomunikace, integrované obvody
- Obecně se používá k zálohování

Metoda seznamu

- Vytvořit seznam všech možných stavů systémů
- Označit stavy i , kde soustava funguje
- Spočítat $R_i(t)$ pro tyto stavy
- Spolehlivost soustavy je pak

$$R(t) = \sum_i^k R_i(t),$$

kde k je počet funkčních stavů.

- Metoda hrubé síly, vyžaduje vyhodnotit 2^n stavů

Výpočet soustav s náhodnými poruchami

Jak určit spolehlivost soustav pro časově závislé náhodné poruchy?

- Poruchy prvků lze modelovat známými hustotami
- Známe $R_i(t)$ jednotlivých prvků
- Výpočet se provádí uvedenými metodami
- $P(X_i) = R_i(t)$ a $Q(X_i) = 1 - R_i(t)$
- Na základě výsledné spolehlivosti $R(i)$ lze dále odvozovat T_s , hustotu apod..

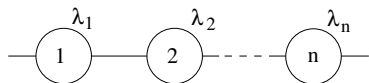
Předpoklady:

- Nezávislé prvky
- Struktura systému se nemění v čase

Výpočet soustav s náhodnými poruchami

Příklad: sériová soustava

- Uvažujme exponenciálním rozdělení poruch s parametry λ_i
- $R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$



$$\begin{aligned}R(t) &= P(X_1) \cdot P(X_2) \cdots P_n(X_3) \\&= R_1(t) \cdot R_2(t) \cdots R_n(t) \\&= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdots e^{-\lambda_n t} \\&= e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda_i)t}\end{aligned}$$

Jaká je střední doba bezporuchového provozu této soustavy?

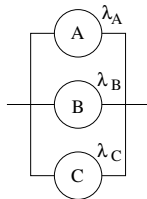
$$T'_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

Výpočet soustav s náhodnými poruchami

Příklad: paralelní zapojení

- Uvažujme exponenciálním rozdělení poruch s parametry $\lambda_A = 0.1$, $\lambda_B = 0.2$, a $\lambda_C = 0.3$
- $R_A(t) = e^{-\lambda_A t}$, atd.

$$\begin{aligned}R(t) &= 1 - (1 - R_A(t))(1 - R_B(t))(1 - R_C(t)) \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda_A t})(1 - e^{-\lambda_B t})(1 - e^{-\lambda_C t})\end{aligned}$$



Výpočet $R(20)$ soustavy:

$$R_A(20) = e^{-0.1 \cdot 20} = 0.13$$

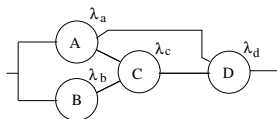
$$R_B(20) = e^{-0.2 \cdot 20} = 0.018$$

$$R_C(20) = e^{-0.3 \cdot 20} = 0.0024$$

$$R(20) = 1 - (1 - e^{-0.1 \cdot 20})(1 - e^{-0.2 \cdot 20})(1 - e^{-0.3 \cdot 20}) = 0.153$$

Výpočty s uvažováním časově závislých poruch

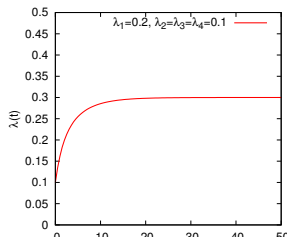
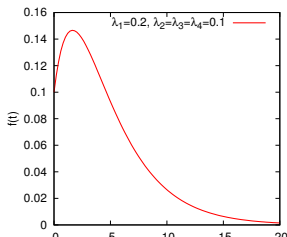
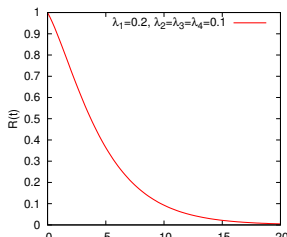
Příklad: metoda rozkladu



$$P(S) = P(A)P(D) + P(B)P(C)P(D) - P(A)P(B)P(C)P(D)$$

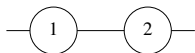
Předpokládáme exp. rozdělení poruch u všech prvků s parametry $\lambda_a, \dots, \lambda_d$. Tudíž $P(A) = e^{-\lambda_a t}$, $P(B) = e^{-\lambda_b t}$, atd.

$$\begin{aligned} R(t) &= e^{-\lambda_a t} e^{-\lambda_d t} + e^{-\lambda_b t} e^{-\lambda_c t} e^{-\lambda_d t} - e^{-\lambda_a t} e^{-\lambda_b t} e^{-\lambda_c t} e^{-\lambda_d t} \\ &= e^{-(\lambda_a + \lambda_d)t} + e^{-(\lambda_b + \lambda_c + \lambda_d)t} - e^{-(\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \lambda_d)t} \end{aligned}$$



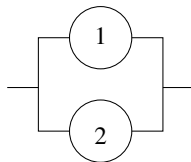
Porovnání sér. a paralelní kombinace

Pokud prvky mají exponenciální rozdělení s parametrem λ_1 a λ_2



$$R(t) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t}$$

$$T_s = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

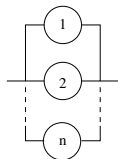
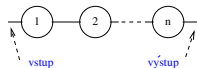


$$R(t) = e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$T_s = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Porovnání sér. a paralelní kombinace

Pokud prvky mají exponenciální rozdělení s parametrem λ_1 a λ_2



$$R(t) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} \dots e^{-\lambda_n t}$$

$$T_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

$$R(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}) \dots (1 - e^{-\lambda_n t})$$

$$\begin{aligned} T_s &= \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \right) - \left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n-1} \lambda_n} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \lambda_n} \right) \\ &\quad \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \end{aligned}$$

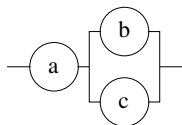
Metoda drah a řezů

- Metoda vhodná pro soustavy s nezávislými prvky
- Vychází z grafu soustavy
 - Vrcholy grafu jsou prvky soustavy
 - Hrany grafu jsou jejich spojnice
- Analýza na základě drah a řezů v grafu
- Soustava funguje, pokud funguje alespoň jedna dráha
- Soustava je v poruše, pokud nefunguje alespoň jeden řez

Metoda drah a řezů

Cesta v grafu:

- Taková množina komponent T , které svoji funkčností zajišťují funkčnost celého systému
- Cesta je minimální pokud z ní nemůžeme žádný prvek odebrat, aniž by přestala být cestou
- Pravděpodobnost, že cesta T funguje: $P(T)$ je sériové zapojení jejích komponent



Cesty: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$

Minimální cesty: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$

Pravděpodobnost, že funguje cesta $\{a, b\}$: $P(a-b) = P(a) \cdot P(b)$

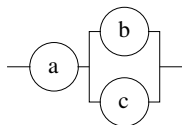
Poznámka:

Cesta $\{a, b, c\}$ není minimální, protože můžeme odebrat např. b a výsledek (tj. $\{a, c\}$) je pořád cestou a zajišťuje chod systému.

Metoda drah a řezů

Řez:

- Taková množina komponent C , jejichž současná porucha způsobí poruchu celého systému
- Řez je minimální pokud z něj nemůžeme žádný prvek odebrat aniž by přestal být řezem.
- Pravděpodobnost, že řez C nefunguje $Q(C)$ je pravděpodobnost, že nefungují všechny prvky řezu současně



Řezy: $\{a\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$

Minimální řez: $\{a\}$, $\{b, c\}$

Pravděpodobnost, že řez $\{a, c\}$ nefunguje: $Q(ac) = P(\bar{a}) \cdot P(\bar{c})$

Poznámka:

$\{a, b\}$ není minimální řez, protože lze redukovat odebráním b na $\{a\}$, což je pořád řez.

$\{a, c\}$ není minimální řez, protože lze redukovat odebráním c na $\{a\}$, což je pořád řez.

Podobně pro $\{a, b, c\}$.

Metoda drah a řezů

- Obvod funguje, pokud je funkční alespoň jedna minimální cesta T_1, \dots, T_n
- Obvod nefunguje, pokud je nefunkční alespoň jeden minimální řez C_1, \dots, C_m

Pravděpodobnost, že systém funguje:

$$R = P(T_1 \vee T_2 \vee \dots \vee T_n)$$

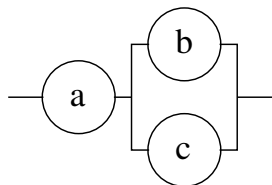
Pravděpodobnost, že systém nefunguje:

$$Q = P(\overline{C_1} \vee \overline{C_2} \vee \dots \vee \overline{C_m})$$

Metoda drah a řezů — příklad

Minimální cesty: $T_1 = \{a, b\}, T_2 = \{a, c\}$

Minimální řez: $C_1 = \{a\}, C_2 = \{b, c\}$



Pravděpodobnost, že systém funguje:

$$R = P(T_1 \vee T_2) = 1 - (1 - P(T_1))(1 - P(T_2))$$

kde $P(T_1) = P(a) \cdot P(b)$ a $P(T_2) = P(a) \cdot P(c)$.

Pravděpodobnost, že systém nefunguje:

$$Q = P(\overline{C_1} \vee \overline{C_2}) = P(\overline{C_1}) + P(\overline{C_2}) - P(\overline{C_1})P(\overline{C_2})$$

Metoda drah a řezů — řešení soustavy

- Výpočet minimálních drah a minimálních řezů může být komplikované u velkých (složitých) soustav
- Grafové algoritmy
- Je nutné výpočet pravděpodobnosti sjednocení jevů, které se nevylučují (složitě pro hodně prvků)
- Možné zjednodušení: prostý součet pravděpodobností

Příklad:

$$\begin{aligned}P(A \vee B \vee C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(AB) - P(BC) - P(AC) \\ &\quad + P(ABC)\end{aligned}$$

Pokud se jevy A, B, C vzájemně vylučují:

$$P(A \vee B \vee C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Obecně:

$$P(A \vee B \vee C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

Metoda drah a řezů — zjednodušení

- Zjednodušení: prostý součet pravděpodobností pro sjednocení jevů
- **Důsledek: R a Q poskytují pouze horní a spodní odhady spolehlivosti**

Pravděpodobnost bezporuchového provozu (horní odhad):

$$R \leq \sum_i P(T_i), \quad T_i \text{ jsou dráhy}$$

Pravděpodobnost poruchy (horní odhad):

$$Q \leq \sum_i P(\overline{C}_i) \quad C_i \text{ jsou řezy}$$

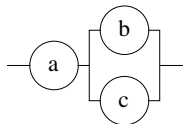
a dolní odhad R je tedy:

$$R \geq 1 - \sum_i P(\overline{C}_i)$$

Metoda drah a řezů — příklad

Zjednodušený výpočet metodou drah a řezů

- **Minimální cesty:** $T_1 = \{a, b\}, T_2 = \{a, c\}$
- **Minimální řez:** $C_1 = \{a\}, C_2 = \{b, c\}$
- Všechny prvky stejné: $P(a) = P(b) = P(c) = p$.



$$R \leq P(T_1) + P(T_2) = P(a)P(b) + P(a)P(c) = 2p^2$$

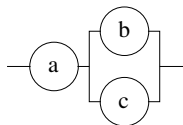
$$\begin{aligned} R &\geq 1 - (P(\overline{C_1}) + P(\overline{C_2})) \\ &\geq 1 - ((1 - P(a)) + (1 - P(b))(1 - P(c))) \\ &\geq -1 + 3p + p^2 \end{aligned}$$

$$-1 + 3p - p^2 \leq R \leq 2p^2$$

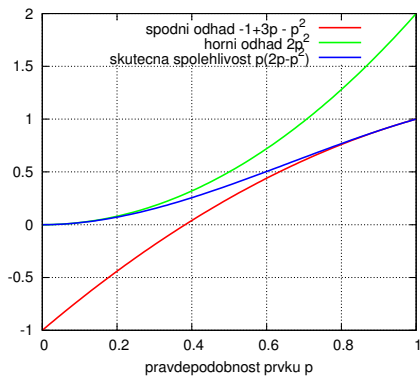
Metoda drah a řezů — příklad

Zjednodušený výpočet metodou drah a řezů

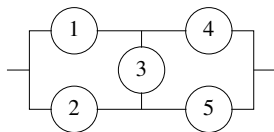
- **Minimální cesty:** $T_1 = \{a, b\}, T_2 = \{a, c\}$
- **Minimální řez:** $C_1 = \{a\}, C_2 = \{b, c\}$
- Všechny prvky stejné: $P(a) = P(b) = P(c) = p$.



$$-1 + 3p - p^2 \leq R \leq 2p^2$$



Metoda drah a řezů — příklad



Minimální dráhy: $\{1, 4\}$ $\{2, 5\}$ $\{1, 3, 5\}$ $\{2, 3, 4\}$

Minimální řezy: $\{1, 2\}$ $\{4, 5\}$ $\{1, 3, 5\}$ $\{2, 3, 4\}$