

# **A6M33SSL: Statistika a spolehlivost v lékařství**

## **Teorie spolehlivosti**

### **Přednáška 2**

Vojta Vonásek  
vonasek@labe.felk.cvut.cz

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická  
Katedra kybernetiky

# Opakování

**Pravděpodobnost bezporuchového provozu  $R(t)$ :** je pravděpodobnost, že systém funguje v čase  $t$ .

**Pravděpodobnost poruchy v časovém intervalu:**

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt,$$

kde  $f(t)$  je hustota pravděpodobnosti poruch.

**Intenzita poruch  $\lambda(t)$ :**

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

- prvky mají různé  $\lambda(t)$  a různé  $f(t)$
- často používaná rozdělení: Exponenciální, Rayleighovo, Weibullovo, Log-normální, Poissonovo

## Jak získat parametry spolehlivosti:

- Nejdůležitější jsou MTBF nebo  $\lambda(t)$
- Datasheets, MIL-HDBK-217F, databáze výrobců
- Měření dat
  - Časy poruch  $t_i$
  - Intenzity poruch v časovém intervalu  $\lambda(t)$
  - Statistické zpracování
- Různá rozdělení pro různé typy poruch/období používání

# Exponenciální rozdělení

- Konstantní intenzita poruch:  $\lambda(t) = \lambda_0$
- Často používané, dobře se s ním počítá

## Základní vlastnosti:

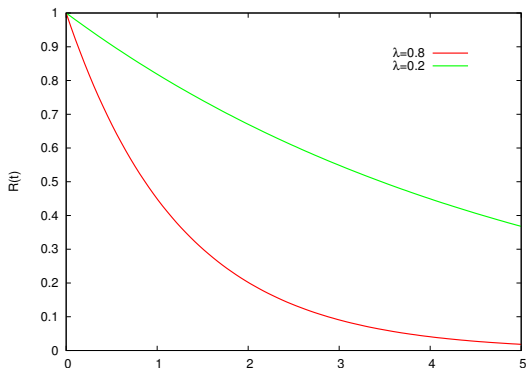
$$\lambda(t) = \lambda_0$$

$$R(t) = e^{-\lambda_0 t}$$

$$f(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$$

$$T_s = \frac{1}{\lambda_0}$$

$$D = \frac{1}{\lambda_0^2}$$



# Exponenciální rozdělení

- Konstantní intenzita poruch:  $\lambda(t) = \lambda_0$
- Často používané, dobře se s ním počítá

## Základní vlastnosti:

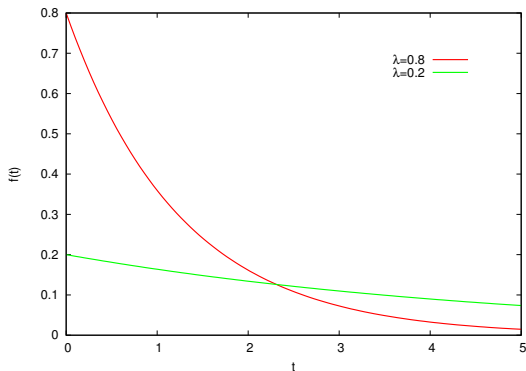
$$\lambda(t) = \lambda_0$$

$$R(t) = e^{-\lambda_0 t}$$

$$f(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$$

$$T_s = \frac{1}{\lambda_0}$$

$$D = \frac{1}{\lambda_0^2}$$



# Exponenciální rozdělení

- Parametr rozdělení  $\lambda_0$  je určen střední hodnotou
- Jednoduchý odhad z dat
- Používá se pro modelování života elektronických komponent, které nejsou tolik mechanicky namáhané
- Je vhodné pro komponenty u nichž lze předpokládat, že pokud se nepoužívají, tak jsou stejně dobré, jako nové prvky (např. pojistky, žárovky)
- Vhodné pro aproximaci chování systémů v období normálního provozu
- Vhodný pro poruchy SW
- Nevhodné pro použití v období zahořování nebo dožívání systému

# Rayleighovo rozdělení

## Základní vlastnosti:

$$\lambda(t) = kt \quad k > 0$$

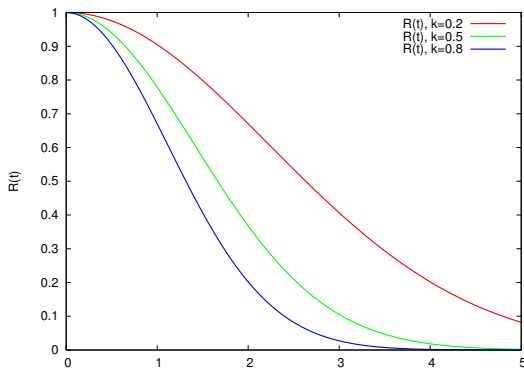
$$R(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}}$$

$$f(t) = kte^{-\frac{kt^2}{2}}$$

$$T_s = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

$$D = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{k}$$

- Odvoďte  $R(t)$  a  $f(t)$  z  $\lambda(t)$



# Rayleighovo rozdělení

## Základní vlastnosti:

$$\lambda(t) = kt \quad k > 0$$

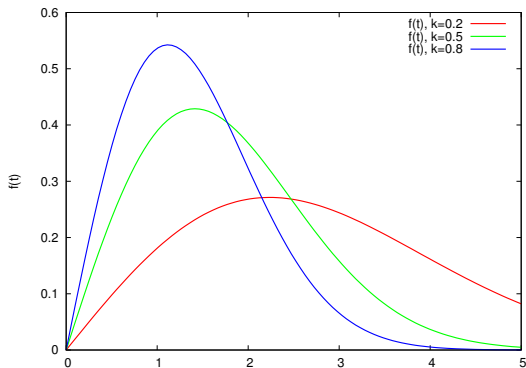
$$R(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}}$$

$$f(t) = kte^{-\frac{kt^2}{2}}$$

$$T_s = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

$$D = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{k}$$

- Odvoďte  $R(t)$  a  $f(t)$  z  $\lambda(t)$





# Rayleighovo rozdělení

- Rostoucí intenzita poruch, postupná degradace materiálu
- Vhodné pro modelování období dožívání

## Příklad

Výrobce pneumatik vyvinul nový materiál, který zlepšuje valivý odpor, ale také zvyšuje opotřebení. Měření ukázala, že intenzita poruch roste lineárně s čase a lze ji popsat

$$\lambda(t) = 0.5 \cdot 10^{-8}t,$$

kde  $t$  je v hodinách. Jaká je pravděpodobnost poruchy pneumatiky po 1 roce používání?

$$R(1rok) = e^{\frac{-kt^2}{2}} = e^{\frac{-0.5 \cdot 10^{-8} \cdot 8760^2}{2}} = 0.825$$

# Rayleighovo rozdělení

- Rostoucí intenzita poruch, postupná degradace materiálu
- Vhodné pro modelování období dožívání

## Příklad

Výrobce pneumatik vyvinul nový materiál, který zlepšuje valivý odpor, ale také zvyšuje opotřebení. Měření ukázala, že intenzita poruch roste lineárně s čase a lze ji popsat

$$\lambda(t) = 0.5 \cdot 10^{-8}t,$$

kde  $t$  je v hodinách. Jaká je pravděpodobnost poruchy pneumatiky po 1 roce používání?

$$R(1rok) = e^{-\frac{kt^2}{2}} = e^{-\frac{0.5 \cdot 10^{-8} \cdot 8760^2}{2}} = 0.825$$

Jaká je střední doba bezporuchového provozu?

$$T_s = \sqrt{\frac{\pi}{2k}} = \sqrt{\frac{\pi}{20.5 \cdot 10^{-8}}} = 17550 \text{ (hodin)}$$

# Weibullovo rozdělení

## Základní vlastnosti:

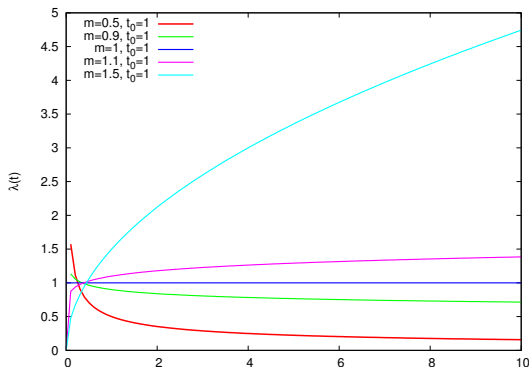
$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \quad t_0 > 0$$

$$f(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$R(t) = e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$T_s = t_0^{\frac{1}{m}} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)$$

$$D = t_0^{\frac{2}{m}} \left[ \Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{m} + 1\right) \right]$$



# Weibullovo rozdělení

## Základní vlastnosti:

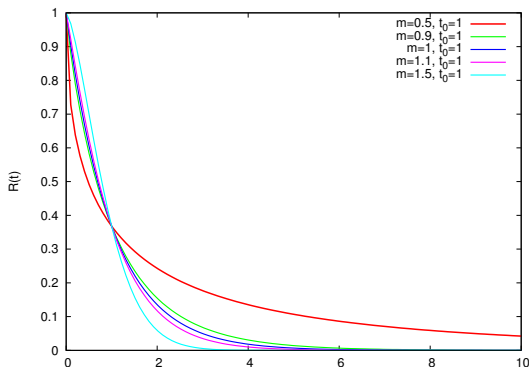
$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \quad t_0 > 0$$

$$f(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$R(t) = e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$T_s = t_0^{\frac{1}{m}} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)$$

$$D = t_0^{\frac{2}{m}} \left[ \Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{m} + 1\right) \right]$$



# Weibullovo rozdělení

## Základní vlastnosti:

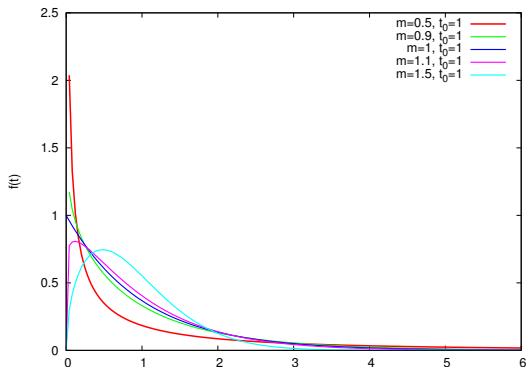
$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} \quad t_0 > 0$$

$$f(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$R(t) = e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

$$T_s = t_0^{\frac{1}{m}} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)$$

$$D = t_0^{\frac{2}{m}} \left[ \Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{m} + 1\right) \right]$$



# Weibullovo rozdělení

- Flexibilní, lze modelovat různé typy intenzit
- Vhodné pro modelování období dožití
- Poruchy ložisek, elektronek
- Pokud  $m = 1 \rightarrow$  Exponenciální rozdělení
- Pokud  $m = 2 \rightarrow$  Rayleighovo rozdělení
- Existuje i tříparametrová forma Weibullova rozdělení

## Příklad:

Součástka má poruchy dle Weibullova rozdělení s parametry  $m = 2$  a  $t_0 = 250$ . Jaká je pravděpodobnost bezporuchového provozu v čase  $t = 10$ ?

$$R(t) = e^{\frac{-t^m}{t_0}}$$

$$R(10) = e^{\frac{-10^2}{250}} = 0.67.$$

# Kombinace rozdělení

- Základní rozdělení nejsou vždy vhodná pro modelování poruch
- Reálné prvky mají složitější průběh intenzit poruch
- Lze využít kombinací základních rozdělení

## Kombinace dvou exponenciálních rozdělení:

$$R(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

- Vhodné pro modelování počátečního období života a normálního provozu

# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Předpokládejme pravděpodobnost bezporuchového provozu ve tvaru

$$R(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

**Jaká je hustota pravděpodobnosti poruch?**

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$$

$$f(t) = c_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

Musí platit  $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$  a  $R(0) = 1 = c_1 + c_2$ .



# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Předpokládejme pravděpodobnost bezporuchového provozu ve tvaru

$$R(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

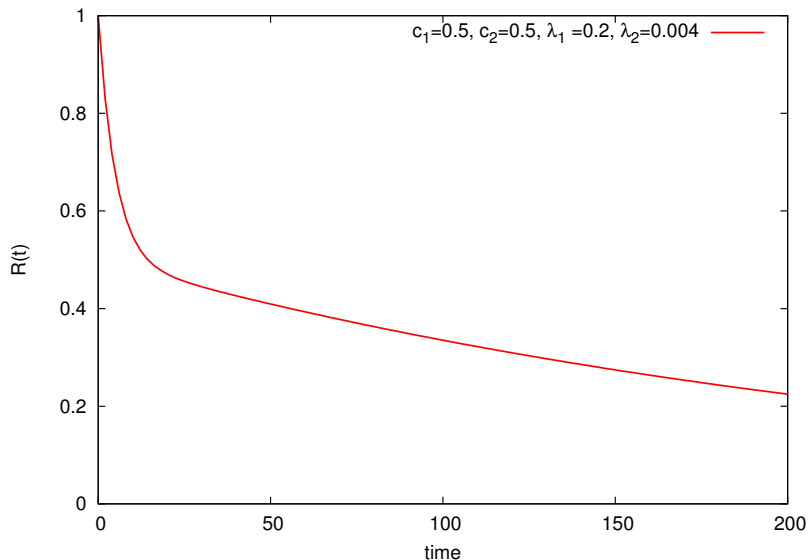
**Jaká je střední doba bezporuchového provozu?**

Lze využít vzorce:

$$\begin{aligned} T_s &= \int_0^{\infty} R(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} c_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \\ &= \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2} \end{aligned}$$

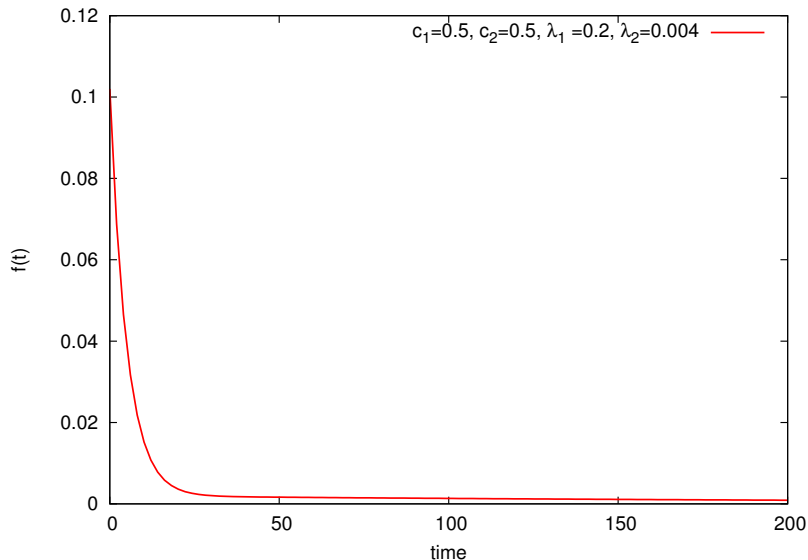
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad:  $c_1 = c_2 = 0.5$ ,  $\lambda_1 = 0.2$ ,  $\lambda_2 = 0.004$ .



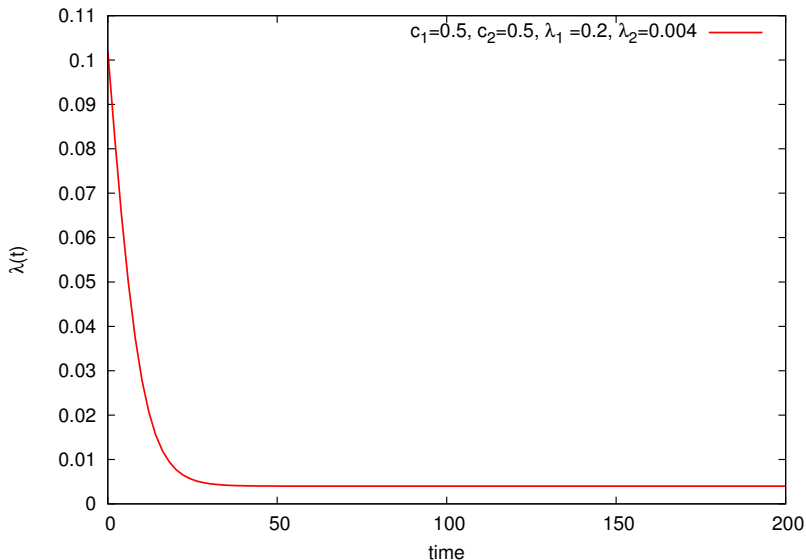
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad:  $c_1 = c_2 = 0.5$ ,  $\lambda_1 = 0.2$ ,  $\lambda_2 = 0.004$ .



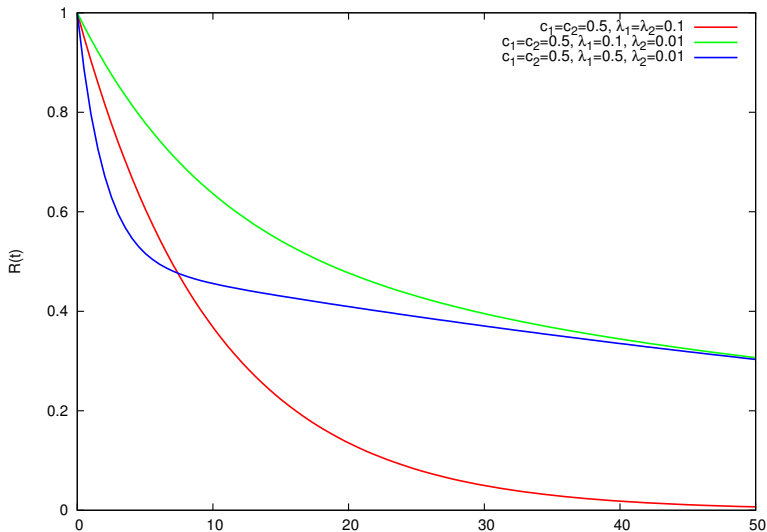
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad:  $c_1 = c_2 = 0.5$ ,  $\lambda_1 = 0.2$ ,  $\lambda_2 = 0.004$ .



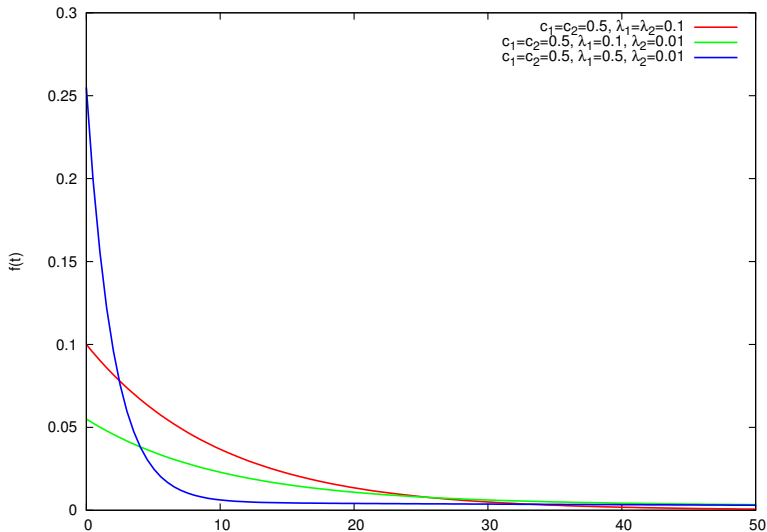
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad:  $c_1 = c_2 = 0.5$ ,  $\lambda_1 = 0.2$ ,  $\lambda_2 = 0.004$ .



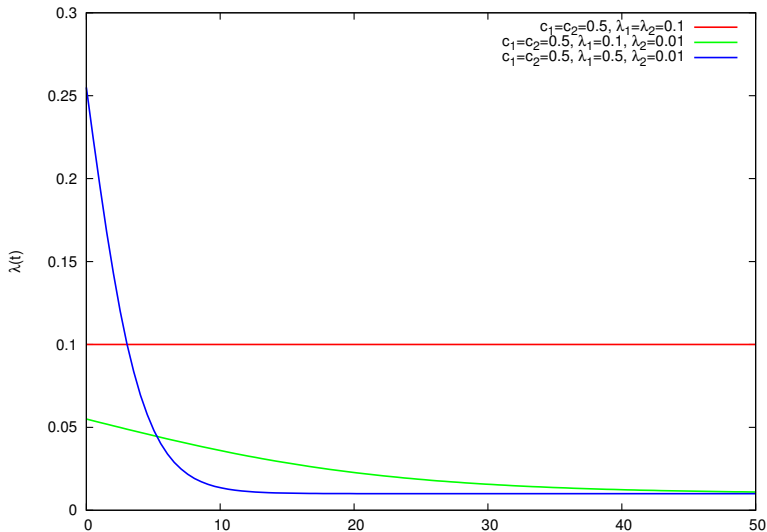
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad:  $c_1 = c_2 = 0.5$ ,  $\lambda_1 = 0.2$ ,  $\lambda_2 = 0.004$ .



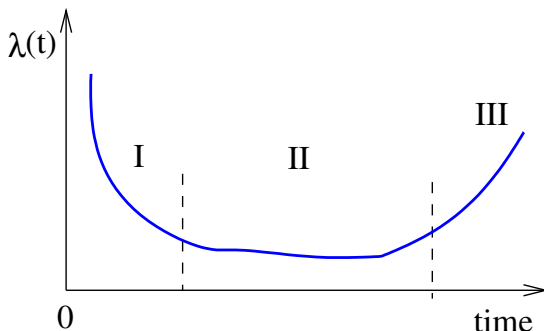
# Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Příklad:  $c_1 = c_2 = 0.5$ ,  $\lambda_1 = 0.2$ ,  $\lambda_2 = 0.004$ .



# Intenzita poruch pro reálné prvky

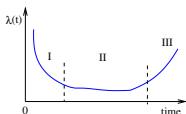
- Reálné prvky většinou nemívají konstantní intenzitu poruch
- Průběhy  $\lambda(t)$  se podobají vanové charakteristice (Bathtub curve)



- Oblast I: počáteční poruchovost
- Oblast II: normální provoz
- Oblast III: období dožití



# Vanová charakteristika



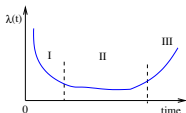
## Oblast I: období počáteční poruchovosti

- Období relativně velké poruchovosti, ale ta rychle klesá
- Příčiny: chyby v konstrukci a výrobě
- Weibullovo rozdělení, kombinace exp. rozdělení
- Lze urychlit tzv. zahořováním

## Zahořování

- Součástky jsou vystaveny zvýšenému namáhání (např. teplota)
- To urychlí vznik časných vad
- Do provozu jdou pouze součástky, které vykazují konstantní intenzitu poruch
- Používá se např. u elektronických součástek

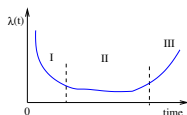
# Vanová charakteristika



## Oblast II: normální provoz

- Intenzita poruch je zpravidla konstantní
- Příčiny: náhodné poruchy, nedodržení provozních podmínek, špatné skladování/přeprava
- Exponenciální rozdělení poruch

# Vanová charakteristika

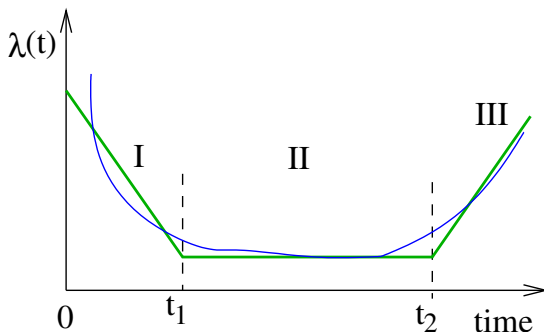


## Oblast III: dožití

- Intenzita poruch se zvyšuje
- Příčiny: únava materiálů, stárnutí, opotřebení
- Lze modelovat např. Rayleighbovým nebo Weibullovým rozdělením

# Intenzita poruch pro reálné prvky

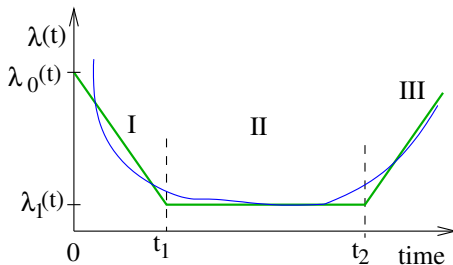
- lineární aproximace



## Ukázka výpočtu:

- Jaká je pravděpodobnost poruchy v čase  $t$ ?
- V jakém čase  $t_\beta$  je  $R(t_\beta) = \beta$ ?

# Vanová charakteristika



## Ukázka výpočtu:

- Jaká je pravděpodobnost poruchy v čase  $t$ ?
- V jakém čase  $t_\beta$  je  $R(t_\beta) = \beta$ ?

# Spolehlivost SW vs HW

## HW

- Chyby jsou dány stárnutím materiálu, chyby návrhu, špatné používání, vliv prostředí
- Intenzita poruch má spíše vanovou křivku
- Stárnutí materiálu probíhá i při nepoužívání prvků
- Spolehlivost může být zvýšena lepším návrhem, použitím lepších materiálů, zálohováním
- Opravy obvykle vrací systém do původního stavu (výměna prvků)
- Poruchám mohou předcházet varovné signály (např. zhoršení kvality)

## SW

- Chyby jsou způsobeny špatným návrhem, chybami v kódu, neočekávaná vstupní data
- Intenzita poruch se nezvyšuje
- Poruchy nemohou nastat, pokud se SW nepoužívá
- Spolehlivost může být zvýšena lepším testováním
- Oprava SW je obvykle realizována novým SW (nová verze)
- Žádné varování

# Příklady SW chyb

## Ariane 5

- Chyba v SW, který počítal výšku, byl použit starší SW pro Ariane 4 (včetně konstant jako např. rychlost)
- Došlo k přetečení při konverzi z 64bit do 16bit rychlosti

## Mars Climate Orbiter

- Špatné použití jednotek (anglické míry místo SI)
- ~ \$327 mil.

## Therac 25

- Chyba v paralelním kódu
- Pacienti dostávali až 100 násobné dávky radiace
- Pět lidí zemřelo na vysoké ozáření

