

# Intervalové odhady parametrů

Petr Pošík

Části dokumentu jsou převzaty (i doslovně)  
z *Mirko Navara: Pravděpodobnost a matematická statistika*,  
[https://cw.felk.cvut.cz/lib/exe/fetch.php/courses/a6m33ssl/pms\\_print.pdf](https://cw.felk.cvut.cz/lib/exe/fetch.php/courses/a6m33ssl/pms_print.pdf)  
s laskavým svolením autora.

<b>Intervalové odhady</b>	<b>2</b>
Intervalové odhady .....	4
Odhad $\mu$ , $\sigma^2$ známé .....	5
Interpretace .....	6
Souvislosti .....	8
Rozsah výběru .....	9
Odhad $\mu$ , $\sigma^2$ nezn. ....	10
$t$ -rozdělení .....	11
Př: odhad $\mu$ .....	12
Odhad rozptylu .....	13
Odhad $q$ .....	14
Př: Odhad $q$ .....	15
Shrnutí .....	16

**Intervalový odhad**

Víte, kolik statistiků je potřeba k výměně žárovky?

1 až 3. Se spolehlivostí 95 %.

**Intervalové odhady**

Dosud jsme skutečnou hodnotu parametru  $\theta$  nahrazovali *bodovým odhadem*  $\hat{\Theta}$  (což je náhodná veličina).

- Obvykle se snadno spočítá, ale
- kdo ví, jak dobrý je to odhad? Jak moc se může změnit, vypočteme-li jej z jiné realizace náh. výběru?

Nyní budeme hledat **intervalový odhad**, tzv. **interval spolehlivosti**  $I$ , což je minimální interval takový, že

$$P[\theta \in I] \geq 1 - \alpha,$$

tj. pravděpodobnost, že interval  $I$  pokryje skutečnou (neznámou) hodnotu parametru  $\theta$ , je  $1 - \alpha$ , kde

- $\alpha \in (0, 1)$  je pravděpodobnost, že interval  $I$  nepokryje skutečnou hodnotu  $\theta$ , a
- $1 - \alpha$  je **koefficient spolehlivosti**.

Hledáme **jednostranné odhady**, **dolní (levostranný)**, resp. **horní (pravostranný)**, kdy

$$I = \langle q_{\hat{\Theta}}(\alpha), \infty \rangle, \text{ resp. } I = \langle -\infty, q_{\hat{\Theta}}(1 - \alpha) \rangle,$$

nebo **(symetrický) oboustranný odhad**

$$I = \left\langle q_{\hat{\Theta}}\left(\frac{\alpha}{2}\right), q_{\hat{\Theta}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right\rangle.$$

K tomu potřebujeme znát rozdělení odhadu  $\hat{\Theta}$ .

## Normální rozdělení: intervalový odhad $\mu$ při známém $\sigma^2$

Mějme realizaci náhodného výběru  $x_n = (x_1, \dots, x_n)$  z normálního rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ . Rozptyl  $\sigma^2$  známe, chceme odhadnout  $\mu$ .

Střední hodnotu  $\mu$  odhadneme výběrovým průměrem  $\bar{X}$  s rozdělením  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ .

Pro kvantilovou funkci normálního rozdělení platí:

$$q_{N(\mu, \sigma^2)}(\alpha) = \mu + q_{N(0, \sigma^2)}(\alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

Z definice kvantilové funkce platí pro  $\bar{X}$

$$\begin{aligned} P\left[\bar{X} \in \left(-\infty, q_{N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}(1-\alpha)\right)\right] &= P\left[\bar{X} \leq q_{N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}(1-\alpha)\right] = 1-\alpha = \\ &= P\left[\bar{X} - q_{N(0, \frac{\sigma^2}{n})}(1-\alpha) \leq \mu\right], \text{ což stačí v době počítačů, a dále} \\ &= P\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha) \leq \mu\right], \text{ což je nutné pro hledání v tabulkách.} \end{aligned}$$

Pro dolní, horní, resp. oboustranný intervalový odhad pak dostáváme

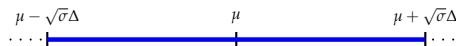
$$\begin{aligned} &\left\langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha), \infty \right\rangle, \quad \left(-\infty, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha)\right), \\ \text{resp. } &\left\langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Při výpočtu pak nahradíme výběrový průměr  $\bar{X}$  jeho realizací  $\bar{x}$ .

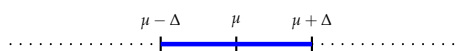
## Interpretace intervalových odhadů

**Příklad:** Náhodná veličina  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  známe, chceme odhadnout  $\mu$  pomocí náhodného výběru  $X_n$ . Definujme **maximální chybu odhadu**  $\Delta$  jako  $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ .

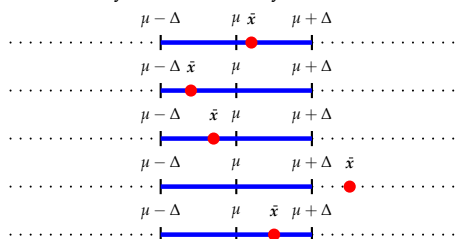
Interval, v němž se bude nacházet  $(1-\alpha) \cdot 100\%$  hodnot n.v.  $X$ :



Interval, v němž se bude nacházet  $(1-\alpha) \cdot 100\%$  hodnot výběrových průměrů  $\bar{X}$ :



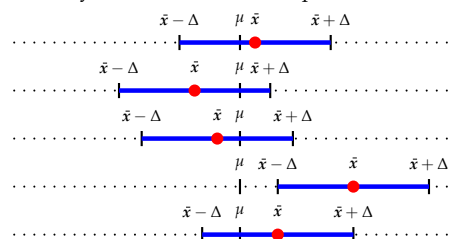
Pro  $m$  různých realizací n. výběrů  $x$ :



Cca v  $\alpha m$  případech bude  $\bar{x}$  ležet uvnitř tohoto intervalu.

**Toto není interval spolehlivosti!**

$m$  různých realizací intervalu spolehlivosti:



Interval spolehlivosti je "náhodný" v tom smyslu, že je určen náhodnou veličinou  $\bar{X}$ !

**Toto jsou intervaly spolehlivosti!**

## Interpretace intervalových odhadů (pokr.)

**Příklad (pokr.):** Pro intervalový odhad střední hodnoty můžeme **před provedením experimentu** (získáním realizace náhodného výběru) říci:

- “Výsledný 95% interval spolehlivosti bude skutečnou (neznámou, ale konstantní) střední hodnotu rozdělení obsahovat (překrývat) s pravděpodobností 95%.”

**Po provedení experimentu** můžeme dostat výsledek např.:

“95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu je (0.1, 0.4)”. Platí následující výroky?

- “Skutečná střední hodnota leží mezi 0.1 a 0.4 s 95% pravděpodobností.” “Skutečná střední hodnota leží mezi 0.1 a 0.4 s 95% pravděpodobností.”
- “Můžeme si být na 95 % jisti, že skutečná střední hodnota leží mezi 0.1 a 0.4.” “Můžeme si být na 95 % jisti, že skutečná střední hodnota leží mezi 0.1 a 0.4.”
- “Kdybychom opakovali experiment znovu a znovu, pak by v 95 % případů skutečná střední hodnota ležela mezi 0.1 a 0.4.” “Kdybychom opakovali experiment znovu a znovu, pak by v 95 % případů skutečná střední hodnota ležela mezi 0.1 a 0.4.”

Proč neplatí?

- Skutečná hodnota parametru je konstantní; buď uvnitř intervalu *jistě je* nebo *jistě není*, žádná jiná možnost neexistuje. Nemá smysl mluvit o pravděpodobnosti.

Interval spolehlivosti

- není vlastností parametru (abychom mohli říct, že skutečná hodnota parametru se nachází uvnitř intervalu s psí ...,) ale
- je vlastností procedury odhadu (estimátoru).
- Spíše umožňuje posoudit chybu odhadu.

## Souvislost rozsahu výběru, max. chyby odhadu a spolehlivosti

Ve vztahu pro oboustranný interval spolehlivosti

$$P[\bar{X} - \Delta \leq \mu \leq \bar{X} + \Delta] = 1 - \alpha,$$

kde  $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ , vystupují následující proměnné:

- koeficient spolehlivosti  $P = 1 - \alpha$ , tj. míra naší důvěry ve výrok o poloze  $\mu$ ,
- chyba  $\Delta$  odhadu střední hodnoty  $\mu$  (pro oboustranný interval spolehlivosti  $|I| = 2\Delta$ ), tj. nejistota při určení hodnoty parametru  $\mu$ , a
- rozsah výběru  $n$ .

Tyto proměnné spolu souvisí následujícím způsobem:

$P$ konstantní	$n \nearrow \iff \Delta \searrow$
$\Delta$ konstantní	$n \nearrow \iff P \nearrow$
$n$ konstantní	$P \nearrow \iff \Delta \nearrow$

### Výpočet potřebného rozsahu výběru

Pro *oboustranný interval spolehlivosti*  $I = \langle \bar{X} - \Delta, \bar{X} + \Delta \rangle$  platí, že  $P[\bar{X} - \Delta \leq \mu \leq \bar{X} + \Delta] \geq 1 - \alpha$ , kde  $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ .

Stanovíme-li maximální přípustnou chybu odhadu  $\Delta_{\max}$ , můžeme určit **potřebný rozsah výběru**  $n_{\min}$  při požadované spolehlivosti  $1 - \alpha$ :

$$\Delta_{\max} \geq \Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$
$$n \geq \left(\frac{\sigma}{\Delta_{\max}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = n_{\min}.$$

Pro *jednostranné intervaly spolehlivosti* lze postupovat obdobně, např. pro horní intervalový odhad  $I = (-\infty, \bar{X} + \Delta)$  platí, že  $P[\mu \leq \bar{X} + \Delta] \geq 1 - \alpha$ , kde  $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ .

Stanovíme-li maximální přípustnou chybu odhadu  $\Delta_{\max}$ , můžeme určit **potřebný rozsah výběru**  $n_{\min}$  při požadované spolehlivosti  $1 - \alpha$ :

$$\Delta_{\max} \geq \Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha),$$
$$n \geq \left(\frac{\sigma}{\Delta_{\max}} \Phi^{-1}(1 - \alpha)\right)^2 = n_{\min}.$$

### Normální rozdělení: intervalový odhad $\mu$ při neznámém $\sigma^2$

Střední hodnotu  $\mu$  odhadneme výběrovým průměrem  $\bar{X}$  s rozdělením  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ .

Rozptyl  $\sigma^2$  odhadneme výběrovým rozptylem  $S_X^2$ ;  $\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}$  má rozdělení  $\chi^2(n-1)$ .

Použití *odhadu* rozptylu místo skutečné hodnoty rozptylu je *další zdroj neurčitosti*; abychom zachovali koeficient spolehlivosti  $1 - \alpha$ , musíme rozšířit interval spolehlivosti, tj. použít kvantily jiného rozdělení:

**Studentovo  $t$ -rozdělení** s  $n - 1$  stupni volnosti,  $t(n - 1)$ .

Z toho vyplývají následující intervalové odhady:

$$\left\langle \bar{X} - \frac{S_X}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}(1 - \alpha), \infty \right\rangle, \quad \left\langle -\infty, \bar{X} + \frac{S_X}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}(1 - \alpha) \right\rangle,$$
$$\left\langle \bar{X} - \frac{S_X}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \bar{X} + \frac{S_X}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right\rangle.$$

Při výpočtu nahradíme výběrový průměr  $\bar{X}$  jeho realizací  $\bar{x}$  a výběrovou směrodatnou odchylku  $S_X$  její realizací  $s_X$ .

## Studentovo rozdělení

Studentovo  $t$ -rozdělení s  $\eta$  stupni volnosti,  $t(\eta)$  je rozdělení náhodné veličiny

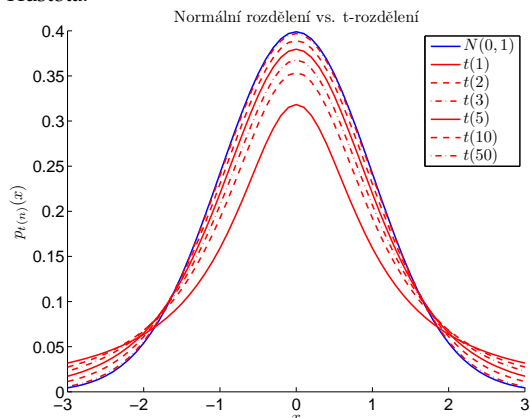
$$\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{\eta}}}$$

kde

- $U$  má rozdělení  $N(0, 1)$ ,
- $V$  má rozdělení  $\chi^2(\eta)$  a
- $U$  a  $V$  jsou nezávislé.

Pro velký počet stupňů volnosti se nahrazuje normálním rozdělením.

Hustota:



V případě odhadu střední hodnoty při neznámém rozptylu

$$U = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X} - \mu) \text{ má } N(0, 1),$$

$$V = \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \text{ má } \chi^2(n-1), \quad \eta = n-1,$$

$$\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{\eta}}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}}} = \frac{\sqrt{n}}{S_X} (\bar{X} - \mu) \text{ má } t(n-1), \text{ z čehož vyplývají odhady na předchozím slidu.}$$

## Příklad: intervalové odhady $\mu$ při neznámém $\sigma^2$

**Zadání:** Vliv alkoholismu matky na inteligenci dítěte. Nalezeno 6 žen, které byly v době těhotenství chronickými alkoholičkami. IQ jejich dětí bylo změřeno v 7 letech:  $n = 6$ ,  $\bar{x} = 78$ ,  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 1805$ . Vypočítejte horní a oboustranný 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu rozdělení IQ dětí alkoholiček.

**Řešení:** Předpokládáme, že výběr alkoholiček byl náhodný. Protože výběrový rozptyl odhadujeme a rozsah výběru je malý, použijeme kvantily Studentova rozdělení.

Pro výběrovou směrodatnou odchylku a oboustranný interval spolehlivosti platí

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1805}{5}} = 19$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} \pm \frac{s_x}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 78 \pm \frac{19}{\sqrt{6}} 2.57 = 78 \pm 19.94,$$

a pro horní odhad

$$\hat{\mu} \leq \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)} (1 - \alpha) = 78 + \frac{19}{\sqrt{6}} 2.02 = 78 + 15.63 = 93.63.$$

**Závěry:**

1. S pravděpodobností 95% střední hodnota  $\mu$  rozdělení IQ dětí alkoholiček leží v  $(58.06, 97.94)$ .
2. S pravděpodobností 95% střední hodnota  $\mu$  rozdělení IQ dětí alkoholiček nepřekročí 93.96.
3. Kdybychom experiment prováděli opakovaně a intervaly spolehlivosti konstruovali výše uvedeným způsobem, pak by v cca 95% případů interval obsahoval skutečnou střední hodnotu.

## Intervalový odhad rozptylu

Rozptyl  $\sigma^2$  odhadneme výběrovým rozptylem  $S_X^2$ ; n.v.  $\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}$  má rozdělení  $\chi^2(n-1)$ .

$$\begin{aligned} P \left[ \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \in (-\infty, q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)) \right] &= 1-\alpha = \\ &= P \left[ \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \leq q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha) \right] = P \left[ \frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)} \leq \sigma^2 \right] = \\ &= P \left[ \sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)}, \infty \right\rangle \right] \end{aligned}$$

Dostali jsme *dolní* odhad, ostatní obdobně.

Dolní, horní a oboustranný intervalové odhady rozptylu jsou

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)}, \infty \right\rangle, \quad \left( -\infty, \frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}(\alpha)} \right), \\ \left\langle \frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Při výpočtu nahradíme výběrový rozptyl  $S_X^2$  jeho realizací  $s_x^2$ .

## Alternativní rozdělení: odhad populační pravděpodobnosti $q$

Mějme náhodný výběr rozsahu  $n$ ,  $X_n = \{X_1, \dots, X_n\}$ , kde  $X_i \in \{0, 1\}$ ,  $X_i \sim Ber(q)$ .

Populační pravděpodobnost  $q$  odhadneme výběrovou relativní četností  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Pro dostatečně velký rozsah výběru ( $n > 100$ ) lze *rozdělení výběrových relativních četností  $\bar{X}$*  aproximovat normálním rozdělením,

$$\bar{X} \sim N \left( q, \frac{q(1-q)}{n} \right) \approx N \left( q, \frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} \right),$$

a použít intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozdělení:

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \Phi^{-1}(1-\alpha), \infty \right\rangle, \quad \left( -\infty, \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \Phi^{-1}(1-\alpha) \right), \\ \text{resp. } \left\langle \bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Při výpočtu pak nahradíme výběrovou relativní četnost  $\bar{X}$  její realizací  $\bar{x}$ .

Při malém rozsahu výběru ( $n < 100$ ) je třeba hledat kvantily rozdělení výběrových relativních četností ve speciálních tabulkách.

### Příklad: Odhad populační pravděpodobnosti $q$

**Zadání:** V roce 1973 bylo na Berkeley přijato 3700 z 8300 uchazečů mužského pohlaví a 1500 z 4300 uchazečů ženského pohlaví. Vypočtete 95% oboustranné intervaly spolehlivosti ( $\alpha = 0.05$ ) pro pravděpodobnosti přijetí u mužů,  $q_M$  a u žen  $q_Z$ .

**Řešení:** Intervaly spolehlivosti pro populační pravděpodobnosti přijetí u mužů a u žen:

$$\bar{x}_M = \frac{3700}{8300} = 0.4458$$

$$\bar{x}_Z = \frac{1500}{4300} = 0.3488$$

$$\begin{aligned}\hat{q}_M &= \bar{x}_M \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\bar{x}_M(1 - \bar{x}_M)}{n_M}} = \\ &= 0.4458 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.4458(1 - 0.4458)}{8300}} = 44.58 \pm 1.07\%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{q}_Z &= \bar{x}_Z \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\bar{x}_Z(1 - \bar{x}_Z)}{n_Z}} = \\ &= 0.3488 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.3488(1 - 0.3488)}{4300}} = 34.88 \pm 1.42\%\end{aligned}$$

Co můžete říct o rozdílu mezi pravděpodobnostmi přijetí? Je to důkaz pohlavní diskriminace? Odpovědi v příštích přednáškách.

### Shrnutí: Odhady parametrů

- Výběrové statistiky (např.  $\bar{X}$ ,  $S_X^2$ , apod.), resp. jejich realizace ( $\bar{x}$ ,  $s_x^2$ , apod.), se používají k odhadu populačních parametrů ( $\mu$ ,  $\sigma^2$ , apod.). Jsou to bodové odhady.
- Intervalové odhady jsou lepší než bodové odhady v tom smyslu, že umožňují posoudit nepřesnost procedury odhadu.