Intervalové odhady parametrů

Petr Pošík

Části dokumentu jsou převzaty (i doslovně)
z *Mirko Navara: Pravděpodobnost a matematická statistika*,
`https://cw.felk.cvut.cz/lib/exe/fetch.php/courses/a6m33ssl/pms_print.pdf`
s laskavým svolením autora.

Intervalový odhad

Víte, kolik statistiků je potřeba k výměně žárovky?

1 až 3. Se spolehlivostí 95 %.

Intervalové odhady

Dosud jsme skutečnou hodnotu parametru θ nahrazovali *bodovým odhadem* $\widehat{\Theta}$ (což je náhodná veličina).

- Obvykle se snadno spočítá, ale
- kdo ví, jak dobrý je to odhad? Jak moc se může změnit, vypočteme-li jej z jiné realizace náh. výběru?

Nyní budeme hledat **intervalový odhad**, tzv. **interval spolehlivosti** I, což je minimální interval takový, že

$$P[\theta \in I] \geq 1 - \alpha,$$

tj. pravděpodobnost, že interval I pokryje skutečnou (neznámou) hodnotu parametru θ, je $1 - \alpha$, kde

- $\alpha \in (0, 1)$ je pravděpodobnost, že interval I nepokryje skutečnou hodnotu θ, a
- $1 - \alpha$ je **koeficient spolehlivosti**.

Hledáme **jednostranné odhady**, **dolní (levostranný)**, resp. **horní (pravostranný)**, kdy

$$I = \langle q_{\widehat{\Theta}}(\alpha), \infty), \text{ resp. } I = (-\infty, q_{\widehat{\Theta}}(1-\alpha)\rangle,$$

nebo **(symetrický) oboustranný odhad**

$$I = \left\langle q_{\widehat{\Theta}}\left(\frac{\alpha}{2}\right), q_{\widehat{\Theta}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right\rangle.$$

K tomu potřebujeme znát rozdělení odhadu $\widehat{\Theta}$.

Normální rozdělení: intervalový odhad μ při známém σ^2

Mějme realizaci náhodného výběru $\boldsymbol{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$ z normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Rozptyl σ^2 známe, chceme odhadnout μ.

Střední hodnotu μ odhadneme výběrovým průměrem $\bar{X}$ s rozdělením $\mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
Pro kvantilovou funkci normálního rozdělení platí:

$$q_{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}(\alpha) = \mu + q_{\mathrm{N}(0,\sigma^2)}(\alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

Z definice kvantilové funkce platí pro $\bar{X}$

$$P\left[\bar{X} \in \left(-\infty, q_{\mathrm{N}\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)}(1-\alpha)\right\rangle\right] = P\left[\bar{X} \le q_{\mathrm{N}\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)}(1-\alpha)\right] = 1-\alpha =$$

$$= P\left[\bar{X} - q_{\mathrm{N}\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)}(1-\alpha) \le \mu\right], \text{ což stačí v době počítačů, a dále}$$

$$= P\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha) \le \mu\right], \text{ což je nutné pro hledání v tabulkách.}$$

Pro dolní, horní, resp. oboustranný intervalový odhad pak dostáváme

$$\left\langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha), \infty\right), \qquad \left(-\infty, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha)\right\rangle,$$

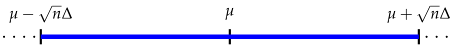
$$\text{resp. } \left\langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right\rangle.$$

Při výpočtu pak nahradíme výběrový průměr $\bar{X}$ jeho realizací $\bar{x}$.

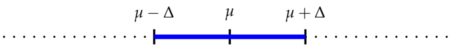
Interpretace intervalových odhadů

Příklad: Náhodná veličina $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 známe, chceme odhadnout μ pomocí náhodného výběru $\boldsymbol{X}_n$. Definujme **maximální chybu odhadu Δ** jako $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$.

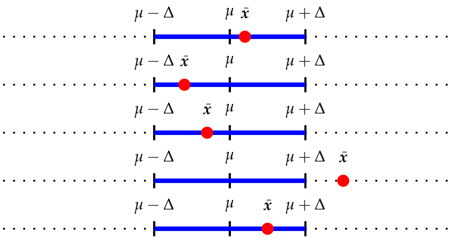
Interval, v němž se bude nacházet $(1-\alpha)\cdot 100$ % hodnot n.v. X:



Interval, v němž se bude nacházet $(1-\alpha)\cdot 100$ % hodnot výběrových průměrů $\bar{X}$:



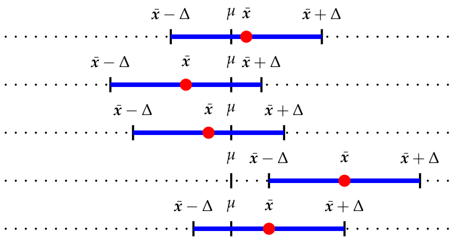
Pro m různých realizací n. výběrů $\boldsymbol{x}$:



Cca v αm případech bude $\bar{x}$ ležet uvnitř tohoto intervalu.

Toto není interval spolehlivosti!

m různých realizací intervalu spolehlivosti:



Interval spolehlivosti je "náhodný" v tom smyslu, že je určen náhodnou veličinou $\bar{X}$!

Toto jsou intervaly spolehlivosti!

Interpretace intervalových odhadů (pokr.)

Příklad (pokr.): Pro intervalový odhad střední hodnoty můžeme **před provedením experimentu** (získáním realizace náhodného výběru) říci:

- "Výsledný 95% interval spolehlivosti bude skutečnou (neznámou, ale konstantní) střední hodnotu rozdělení obsahovat (překrývat) s pravděpodobností 95 %."

Po provedení experimentu můžeme dostat výsledek např.:
"95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu je $(0.1, 0.4)$". Platí následující výroky?

- "Skutečná střední hodnota leží mezi 0.1 a 0.4 s 95% pravděpodobností.""~~Skutečná střední hodnota leží mezi 0.1 a 0.4 s 95% pravděpodobností.~~"
- "Můžeme si být na 95 % jistí, že skutečná střední hodnota leží mezi 0.1 a 0.4.""~~Můžeme si být na 95 % jistí, že skutečná střední hodnota leží mezi 0.1 a 0.4.~~"
- "Kdybychom opakovali experiment znovu a znovu, pak by v 95 % případů skutečná střední hodnota ležela mezi 0.1 a 0.4.""~~Kdybychom opakovali experiment znovu a znovu, pak by v 95 % případů skutečná střední hodnota ležela mezi 0.1 a 0.4.~~"

Proč neplatí?

- Skutečná hodnota parametru je konstantní; buď uvnitř intervalu *jistě je* nebo *jistě není*, žádná jiná možnost neexistuje. Nemá smysl mluvit o pravděpodobnosti.

Interval spolehlivosti

- není vlastností parametru (abychom mohli říct, že ~~skutečná hodnota parametru se nachází uvnitř intervalu s pstí . . .~~), ale
- je vlastností procedury odhadu (estimátoru).
- Spíše umožňuje posoudit chybu odhadu.

Souvislost rozsahu výběru, max. chyby odhadu a spolehlivosti

Ve vztahu pro oboustranný interval spolehlivosti

$$P\left[\overline{X} - \Delta \leq \mu \leq \overline{X} + \Delta\right] = 1 - \alpha,$$

kde $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, vystupují následující proměnné:

- koeficient spolehlivosti $P = 1 - \alpha$, tj. míra naší důvěry ve výrok o poloze μ,
- chyba Δ odhadu střední hodnoty μ (pro oboustranný interval spolehlivosti $|I| = 2\Delta$), tj. nejistota při určení hodnoty parametru μ, a
- rozsah výběru n.

Tyto proměnné spolu souvisí následujícím způsobem:

P konstantní	$n \nearrow \iff \Delta \searrow$
Δ konstatntní	$n \nearrow \iff P \nearrow$
n konstatntní	$P \nearrow \iff \Delta \nearrow$

Výpočet potřebného rozsahu výběru

Pro *oboustranný interval spolehlivosti* $I = \langle \bar{X} - \Delta, \bar{X} + \Delta \rangle$ platí, že $P\left[\bar{X} - \Delta \leq \mu \leq \bar{X} + \Delta\right] \geq 1 - \alpha$, kde $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Stanovíme-li maximální přípustnou chybu odhadu $\Delta_{\max}$, můžeme určit **potřebný rozsah výběru** $n_{\min}$ při požadované spolehlivosti $1 - \alpha$:

$$\Delta_{\max} \geq \Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$n \geq \left(\frac{\sigma}{\Delta_{\max}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = n_{\min}.$$

Pro *jednostranné intervaly spolehlivosti* lze postupovat obdobně, např. pro horní intervalový odhad $I = (-\infty, \bar{X} + \Delta\rangle$ platí, že $P\left[\mu \leq \bar{X} + \Delta\right] \geq 1 - \alpha$, kde $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha)$.

Stanovíme-li maximální přípustnou chybu odhadu $\Delta_{\max}$, můžeme určit **potřebný rozsah výběru** $n_{\min}$ při požadované spolehlivosti $1 - \alpha$:

$$\Delta_{\max} \geq \Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha),$$

$$n \geq \left(\frac{\sigma}{\Delta_{\max}} \Phi^{-1}(1 - \alpha)\right)^2 = n_{\min}.$$

Normální rozdělení: intervalový odhad μ při neznámém σ^2

Střední hodnotu μ odhadneme výběrovým průměrem $\bar{X}$ s rozdělením $\mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
Rozptyl σ^2 odhadneme výběrovým rozptylem S_X^2; $\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}$ má rozdělení $\chi^2(n-1)$.

Použití *odhadu* rozptylu místo skutečné hodnoty rozptylu je *další zdroj neurčitosti*; abychom zachovali koeficient spolehlivosti $1 - \alpha$, musíme rozšířit interval spolehlivosti, tj. použít kvantily jiného rozdělení:

Studentovo *t*-rozdělení s $n - 1$ stupni volnosti, $t(n-1)$.

Z toho vyplývají následující intervalové odhady:

$$\left\langle \bar{X} - \frac{S_X}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}(1-\alpha), \infty \right), \qquad \left(-\infty, \bar{X} + \frac{S_X}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}(1-\alpha) \right\rangle,$$

$$\left\langle \bar{X} - \frac{S_X}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \bar{X} + \frac{S_X}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right\rangle.$$

Při výpočtu nahradíme výběrový průměr $\bar{X}$ jeho realizací $\bar{x}$ a výběrovou směrodatnou odchylku S_X její realizací s_X.

Studentovo rozdělení

Studentovo t-rozdělení s η stupni volnosti, $t(\eta)$ je rozdělení náhodné veličiny

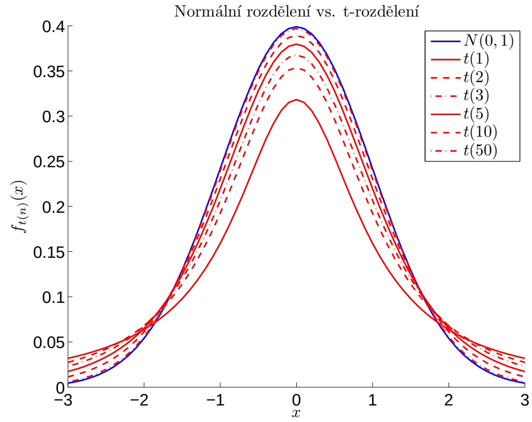
$$\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{\eta}}},$$

kde

- U má rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$,
- V má rozdělení $\chi^2(\eta)$ a
- U a V jsou nezávislé.

Pro velký počet stupňů volnosti se nahrazuje normálním rozdělením.

Hustota:



V případě odhadu střední hodnoty při neznámém rozptylu

$$U = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu) \text{ má } \mathrm{N}(0,1),$$

$$V = \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \text{ má } \chi^2(n-1), \qquad \eta = n-1,$$

$$\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{\eta}}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{\sigma^2}}} = \frac{\sqrt{n}}{S_X}(\bar{X}-\mu) \text{ má } t(n-1), \text{ z čehož vyplývají odhady na předchozím slidu.}$$

Příklad: intervalové odhady μ při neznámém σ^2

Zadání: Vliv alkoholismu matky na inteligenci dítěte. Nalezeno 6 žen, které byly v době těhotenství chronickými alkoholičkami. IQ jejich dětí bylo změřeno v 7 letech: $n = 6$, $\bar{x} = 78$, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 1805$. Vypočtěte horní a oboustranný 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu rozdělení IQ dětí alkoholiček.

Řešení: Předpokládáme, že výběr alkoholiček byl náhodný. Protože výběrový rozptyl odhadujeme a rozsah výběru je malý, použijeme kvantily Studentova rozdělení.

Pro výběrovou směrodatnou odchylku a oboustranný interval spolehlivosti platí

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1805}{5}} = 19$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} \pm \frac{s_x}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 78 \pm \frac{19}{\sqrt{6}} 2.57 = 78 \pm 19.94 = \langle 58.06, 97.94 \rangle,$$

a pro horní odhad

$$\hat{\mu} \le \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} q_{t(n-1)}(1-\alpha) = 78 + \frac{19}{\sqrt{6}} 2.02 = 78 + 15.63 = 93.63.$$

Závěry:

1. ~~S pravděpodobností 95 % střední hodnota μ rozdělení IQ dětí alkoholiček leží v $\langle 58.06, 97.94 \rangle$.~~
2. ~~S pravděpodobností 95 % střední hodnota μ rozdělení IQ dětí alkoholiček nepřekročí 93.96.~~
3. Kdybychom experiment prováděli opakovaně a intervaly spolehlivosti konstruovali výše uvedeným způsobem, pak by v cca 95 % případů interval obsahoval skutečnou střední hodnotu.

Intervalový odhad rozptylu

Rozptyl σ^2 odhadneme výběrovým rozptylem S_X^2; n.v. $\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}$ má rozdělení $\chi^2(n-1)$.

$$P\left[\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \in (-\infty, q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)\rangle\right] = 1-\alpha =$$

$$= P\left[\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \leq q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)\right] = P\left[\frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)} \leq \sigma^2\right] =$$

$$= P\left[\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)}, \infty\right)\right]$$

Dostali jsme *dolní* odhad, ostatní obdobně.

Dolní, horní a oboustranný intervalové odhady rozptylu jsou

$$\left\langle \frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)}, \infty\right), \qquad \left(-\infty, \frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}(\alpha)}\right\rangle,$$

$$\left\langle \frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{(n-1)S_X^2}{q_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right\rangle.$$

Při výpočtu nahradíme výběrový rozptyl S_X^2 jeho realizací s_x^2.

Všimněte si: oboustranný odhad rozptylu není symetrický kolem bodového odhadu S_X^2!

Alternativní rozdělení: odhad populační pravděpodobnosti q

Mějme náhodný výběr rozsahu n, $\boldsymbol{X}_n = \{X_1, \ldots, X_n\}$, kde $X_i \in \{0, 1\}$, $X_i \sim Ber(q)$.

Populační pravděpodobnost q odhadneme výběrovou relativní četností $\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Pro dostatečně velký rozsah výběru ($n > 100$) lze *rozdělení výběrových relativních četností $\overline{\boldsymbol{X}}$* aproximovat normálním rozdělením,

$$\overline{\boldsymbol{X}} \sim \mathrm{N}\left(q, \frac{q(1-q)}{n}\right) \approx \mathrm{N}\left(q, \frac{\overline{\boldsymbol{X}}(1-\overline{\boldsymbol{X}})}{n}\right),$$

a použít intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozdělení:

$$\left\langle \overline{\boldsymbol{X}} - \sqrt{\frac{\overline{\boldsymbol{X}}(1-\overline{\boldsymbol{X}})}{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha), \infty\right), \qquad \left(-\infty, \overline{\boldsymbol{X}} + \sqrt{\frac{\overline{\boldsymbol{X}}(1-\overline{\boldsymbol{X}})}{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha)\right\rangle,$$

$$\text{resp. } \left\langle \overline{\boldsymbol{X}} - \sqrt{\frac{\overline{\boldsymbol{X}}(1-\overline{\boldsymbol{X}})}{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \overline{\boldsymbol{X}} + \sqrt{\frac{\overline{\boldsymbol{X}}(1-\overline{\boldsymbol{X}})}{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right\rangle.$$

Při výpočtu pak nahradíme výběrovou relativní četnost $\overline{\boldsymbol{X}}$ její realizací $\bar{\boldsymbol{x}}$.

Při malém rozsahu výběru ($n < 100$) je třeba hledat kvantily rozdělení výběrových relativních četností ve speciálních tabulkách.

Příklad: Odhad populační pravděpodobnosti q

Zadání: V roce 1973 bylo na Berkeley přijato 3700 z 8300 uchazečů mužského pohlaví a 1500 z 4300 uchazečů ženského pohlaví. Vypočtete 95% oboustranné intervaly spolehlivosti ($\alpha = 0.05$) pro pravděpodobnosti přijetí u mužů, q_M a u žen q_Z.

Řešení: Intervaly spolehlivosti pro populační pravděpodobnosti přijetí u mužů a u žen:

$$\bar{x}_M = \frac{3700}{8300} = 0.4458$$
$$\bar{x}_Z = \frac{1500}{4300} = 0.3488$$

$$\widehat{q}_M = \bar{x}_M \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\bar{x}_M(1-\bar{x}_M)}{n_M}} =$$
$$= 0.4458 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.4458(1-0.4458)}{8300}} = 44.58 \pm 1.07\%$$
$$\widehat{q}_Z = \bar{x}_Z \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\bar{x}_Z(1-\bar{x}_Z)}{n_Z}} =$$
$$= 0.3488 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.3488(1-0.3488)}{4300}} = 34.88 \pm 1.42\%$$

Co můžete říct o rozdílu mezi pravděpodobnostmi přijetí? Je to důkaz pohlavní diskriminace? Odpovědi v příštích přednáškách.

Shrnutí: Odhady parametrů

- Výběrové statistiky (např. $\bar{X}$, S_X^2, apod.), resp. jejich realizace ($\bar{x}$, s_x^2, apod.), se používají k odhadu populačních parametrů (μ, σ^2, apod.). Jsou to bodové odhady.
- Intervalové odhady jsou lepší než bodové odhady v tom smyslu, že umožňují posoudit nepřesnost procedury odhadu.