# Testy pro porovnání vlastností dvou skupin

Petr Pošík

Části dokumentu jsou převzaty (i doslovně)
z *Mirko Navara: Pravděpodobnost a matematická statistika*,
`https://cw.felk.cvut.cz/lib/exe/fetch.php/courses/a6m33ssl/pms_print.pdf`
s laskavým svolením autora.

## Porovnání dvou skupin

*Víte, jaký je rozdíl mezi socialismem a kapitalismem?*

*V socialismu jeden člověk využívá druhého.*
*V kapitalismu je to přesně naopak.*

:-)





### Test stř. hodnot dvou normálních rozdělení se známým rozptylem

**Předpoklad:** Máme 2 *nezávislé* výběry

$(X_1, \ldots, X_m)$ z rozdělení $\mathrm{N}(\mathrm{E}\,X, \sigma^2)$ a
$(Y_1, \ldots, Y_n)$ z rozdělení $\mathrm{N}(\mathrm{E}\,Y, \sigma^2)$.

**Postup:** Platí, že

$$\bar{\boldsymbol{X}}_m \text{ má rozdělení } \mathrm{N}\left(\mathrm{E}\,X, \frac{\sigma^2}{m}\right),$$

$$\bar{\boldsymbol{Y}}_n \text{ má rozdělení } \mathrm{N}\left(\mathrm{E}\,Y, \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ takže}$$

$$\bar{\boldsymbol{X}}_m - \bar{\boldsymbol{Y}}_n \text{ má rozdělení } \mathrm{N}\left(\mathrm{E}\,X - \mathrm{E}\,Y, \sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Za předpokladu $\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,Y$

$$T := \frac{\bar{\boldsymbol{X}}_m - \bar{\boldsymbol{Y}}_n}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \text{ má rozdělení } \mathrm{N}(0, 1).$$

Testujeme realizaci $t$ na rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$, jako jsme to dělali v testu střední hodnoty $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ při známém $\sigma^2$.

## Test stř. hodnot dvou normálních rozdělení s neznámým rozptylem

**Předpoklad:** $\mathrm{D}\,X = \mathrm{D}\,Y = \sigma^2$.
Máme-li důvod věřit, že předpoklad není splněn, měli bychom použít neparametrický test. (Důvod věřit? Znalost procesu, který data generuje; zřejmá odchylka od normality v grafech; statistický test normality rozdělení; ...)

**Postup:** Máme 2 odhady ($S^2_{\boldsymbol{X}}$ a $S^2_{\boldsymbol{Y}}$) téhož parametru $\sigma^2$. Vytvoříme z nich 1 sdružený odhad $S^2$ parametru $\sigma^2$: použijeme jejich průměr vážený rozsahy výběrů ($-1$ kvůli výpočtu výběrového průměru):

$$S^2 = \frac{(m-1)S^2_{\boldsymbol{X}} + (n-1)S^2_{\boldsymbol{Y}}}{m+n-2}$$

Při výpočtu testové statistiky pak místo skutečné směrodatné odchylky $\sigma$ použijeme její odhad $S$. To ale vnáší do výpočtu další zdroj neurčitosti, je proto třeba použít místo normálního rozdělení Studentovo.

Za předpokladu $\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,Y$

$$T := \frac{\bar{\boldsymbol{X}}_m - \bar{\boldsymbol{Y}}_n}{S\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \text{ má rozdělení } t(m+n-2).$$

Testujeme realizaci $t$ na rozdělení $t(m+n-2)$, jako jsme to dělali v testu střední hodnoty $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ při neznámém $\sigma^2$.



## Test stř. hodnot s neznámým rozptylem: Odvození

Ukažme nejprve, že sdružený odhad rozptylu $S^2$ je nestranným odhadem $\sigma^2$. Víme, že

$$\frac{(m-1)S^2_{\boldsymbol{X}}}{\sigma^2} \text{ má rozdělení } \chi^2(m-1), \ \frac{(n-1)S^2_{\boldsymbol{Y}}}{\sigma^2} \text{ má rozdělení } \chi^2(n-1), \text{ takže jejich součet}$$

$$\frac{(m-1)S^2_{\boldsymbol{X}} + (n-1)S^2_{\boldsymbol{Y}}}{\sigma^2} \text{ má rozdělení } \chi^2(m+n-2) \text{ se střední hodnotou } m+n-2. \text{ Proto}$$

$$\frac{(m-1)S^2_{\boldsymbol{X}} + (n-1)S^2_{\boldsymbol{Y}}}{(m+n-2)\sigma^2} = \frac{S^2}{\sigma^2} \text{ má střední hodnotu 1, takže}$$

$$S^2 = \frac{(m-1)S^2_{\boldsymbol{X}} + (n-1)S^2_{\boldsymbol{Y}}}{(m+n-2)} \text{ je nestranný odhad rozptylu } \sigma^2.$$

Nyní ukažme, že testová statistika $T$ má rozdělení $t(m+n-2)$. Víme, že

$$\frac{\bar{\boldsymbol{X}}_m - \bar{\boldsymbol{Y}}_n}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \text{ má rozdělení } \mathrm{N}(0,1) \text{ a že}$$

$$\frac{(m+n-2)S^2}{\sigma^2} = \frac{(m-1)S^2_{\boldsymbol{X}} + (n-1)S^2_{\boldsymbol{Y}}}{\sigma^2} \text{ má rozdělení } \chi^2(m+n-2), \text{ takže}$$

$$T := \frac{\bar{\boldsymbol{X}}_m - \bar{\boldsymbol{Y}}_n}{S\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{\bar{\boldsymbol{X}}_m - \bar{\boldsymbol{Y}}_n}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} \text{ má rozdělení } t(m+n-2).$$

## Příklad: test středních hodnot při neznámém rozptylu

**Zadání:** Vliv alkoholismu matky na inteligenci dítěte. Ověřte hypotézu, že alkoholismus matek nijak nesnižuje IQ dětí.
Skupina 1: matky chronické alkoholičky, $m = 6$, $\bar{x} = 78$, $\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 = 1805$.
Skupina 2: kontrolní, „normální“ matky, $n = 46$, $\bar{y} = 99$, $\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y})^2 = 11520$.

**Řešení:** Jednostranný test středních hodnot 2 norm. rozdělení s neznámým rozptylem.

Testujeme $H_0 : \mathrm{E}\,X \geq \mathrm{E}\,Y$ proti $H_A : \mathrm{E}\,X < \mathrm{E}\,Y$. Sdružený odhad rozptylu:

$$s^2 = \frac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{m+n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y})^2}{m+n-2} =$$
$$= \frac{1805 + 11520}{6 + 46 - 2} = 266.5 \qquad \Rightarrow \qquad s = 16.3248$$

Realizace testové statistiky:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{78 - 99}{16.3248\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{46}}} = -2.9636$$

Dosažená hladina významnosti: $p = F_{t(m+n-2)}(t) = F_{t(50)}(-2.9636) = 0.0023$.

**Závěr:** Pro $\alpha > 0.23$ % můžeme zamítnout hypotézu, že alkoholismus matky nesnižuje IQ dětí.



## Párový pokus

**Příklad:** Porovnání průměrných teplot na dvou místech. Teploty měříme vždy současně na obou místech.

- Rozptyl v obou skupinách má *společnou příčinu*, která se projevuje v obou výběrech stejně: *výběry nejsou navzájem nezávislé*.
- Rozdíl teplot (pokud nějaký existuje) může být malý v porovnání s proměnlivostí teplot (v noci 0 st. Celsia, ve dne 20 st. Celsia), proto
- standardní test středních hodnot může být slabý kvůli velkému rozptylu.

**Předpoklad:** Prvky náhodných výběrů $\boldsymbol{X}_n$ a $\boldsymbol{Y}_n$, tj. náhodné veličiny $X_j, Y_j, j = 1, \ldots, n$, mají normální rozdělení $\mathrm{N}(\mu_j, \sigma^2)$ s konstantním rozptylem $\sigma^2$ a *proměnnými středními hodnotami* $\mu_j = \mathrm{E}\,X_j = \mathrm{E}\,Y_j$.

- Náhodné veličiny $U_j := X_j - \mu_j$ a $V_j := Y_j - \mu_j$, $j = 1, \ldots, n$, *jsou nezávislé* a mají rozdělení $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$.
- Náhodné veličiny $\Delta_j := U_j - V_j = X_j - Y_j$, $j = 1, \ldots, n$, *jsou nezávislé* a mají rozdělení $\mathrm{N}(0, \sigma_\Delta^2)$, kde $\sigma_\Delta^2 = 2\sigma^2$.
- Výběrový průměr $\bar{\boldsymbol{\Delta}}$ má rozdělení $\mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma_\Delta^2}{n}\right) = \mathrm{N}\left(0, \frac{2\sigma^2}{n}\right)$.

## Testy středních hodnot: párový pokus

1. Pro *známý* rozptyl $\sigma^2$:
   - Neznámé parametry sdruženého rozdělení jsou $\mu_1, \ldots, \mu_n$, ale nepotřebujeme je.
   - Testujeme
   $$T := \frac{\bar{\mathbf{\Delta}}}{\sigma_{\mathbf{\Delta}}}\sqrt{n} = \frac{\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}}}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}$$
   na rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$.
2. Pro *neznámý* rozptyl:
   - Neznámé parametry sdruženého rozdělení jsou $\sigma^2, \mu_1, \ldots, \mu_n$, ale potřebujeme z nich pouze $\sigma^2 = \mathrm{D}\,X$.
   - Můžeme pracovat přímo s výběrem $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ z normálního rozdělení.
   - Testujeme
   $$T := \frac{\bar{\mathbf{\Delta}}}{S_\Delta}\sqrt{n}$$
   na rozdělení $t(n-1)$.



## Příklad: Test středních hodnot, párový pokus

**Zadání:** Vliv hydrochlorothiazidu na krevní tlak. Skupině 11 hypertoniků byl nejprve změřen (systolický) tlak po podání placeba a o měsíc později po podání hydrochlorothiazidu (viz tabulka). Ověřte, že hydrochlorothiazid snižuje krevní tlak.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Placebo ($X$) | 211 | 210 | 210 | 203 | 196 | 190 | 191 | 177 | 173 | 170 | 163 |
| Hydrochlorothiazid ($Y$) | 181 | 172 | 196 | 191 | 167 | 161 | 178 | 160 | 149 | 119 | 156 |
| Rozdíl ($\Delta$) | 30 | 38 | 14 | 12 | 29 | 29 | 13 | 17 | 24 | 51 | 7 |

**Řešení:** Zavedli jsme náhodnou veličinu $\Delta = X - Y$, z níž máme k dispozici náhodný výběr $\mathbf{\Delta}_n$ rozsahu $n$, $\Delta_i = X_i - Y_i, i = 1, \ldots, n$. Zkusíme vyvrátit hypotézu $H_0 : \mathrm{E}\,X \leq \mathrm{E}\,Y$, tj. $\mathrm{E}\,\Delta \leq 0$.

- $n = 11$, $\bar{\delta} = 24$, $s_\delta = 13.092$
- Realizace testové statistiky:
$$t = \frac{\bar{\delta}}{s_\delta}\sqrt{n} = \frac{24}{13.092}\sqrt{11} = 6.08$$
- Dosažená hladina významnosti:
$$p = 1 - F_{t(n-1)}(t) = 1 - F_{t(10)}(6.08) = 5.94 \times 10^{-5}.$$

**Závěr:** Zamítáme $H_0$ a přijímáme $H_A$, tj. hydrochlorothiazid snižuje krevní tlak.
**Poznámka:** Byl tento experiment dobře navržen?

## Recept: Test rozptylů dvou normálních rozdělení

**Předpoklad:** Máme 2 *nezávislé* výběry

$(X_1, \ldots, X_m)$ z rozdělení $\mathrm{N}(\mathrm{E}\,X, \mathrm{D}\,X)$ a
$(Y_1, \ldots, Y_n)$ z rozdělení $\mathrm{N}(\mathrm{E}\,Y, \mathrm{D}\,Y)$.

Je-li $\mathrm{D}\,X = \mathrm{D}\,Y$, pak také $S_X^2 \doteq S_Y^2$.
Realizaci testové statistiky

$$t = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$$

porovnáme s kvantily *Fisherova rozdělení* $\mathrm{F}(m-1, n-1)$:

| $H_0$ | $H_A$ | $H_0$ zamítáme, když | dosažená významnost $P$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{D}\,X \leq \mathrm{D}\,Y$ | $\mathrm{D}\,X > \mathrm{D}\,Y$ | $t > q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(1-\alpha)$ | $1 - F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t)$ |
| $\mathrm{D}\,X \geq \mathrm{D}\,Y$ | $\mathrm{D}\,X < \mathrm{D}\,Y$ | $t < q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(\alpha)$ | $F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t)$ |
| $\mathrm{D}\,X = \mathrm{D}\,Y$ | $\mathrm{D}\,X \neq \mathrm{D}\,Y$ | $t > q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(1-\frac{\alpha}{2})$ nebo $t < q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(\frac{\alpha}{2})$ | $2\min(F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t),$ $1 - F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t))$ |



## F-rozdělení

**Fisherovo-Snedecorovo rozdělení $\mathrm{F}(\xi, \eta)$ s $\xi$ a $\eta$ stupni volnosti** je rozdělení náhodné veličiny

$$F = \frac{\frac{U}{\xi}}{\frac{V}{\eta}},$$

kde $U$ a $V$ jsou *nezávislé* náhodné veličiny s rozdělením $\chi^2(\xi)$, resp. $\chi^2(\eta)$.

V našem případě, je-li $\mathrm{D}\,X = \mathrm{D}\,Y = \sigma^2$, pak

$$U := \frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2} \text{ má rozdělení } \chi^2(m-1),$$
$$V := \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \text{ má rozdělení } \chi^2(n-1),$$
$$\xi := m-1,$$
$$\eta := n-1,$$
$$F = \frac{\frac{U}{\xi}}{\frac{V}{\eta}} = \frac{\frac{(m-1)S_X^2}{(m-1)\sigma^2}}{\frac{(n-1)S_Y^2}{(n-1)\sigma^2}} = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = T,$$

kde $T$ je testová statistika testu z předchozího slidu.

## Test rozptylů: praktické poznámky

Pro každou hladinu významnosti potřebujeme 2D tabulku kvantilů indexovanou $\xi$ a $\eta$. Obvykle je tabelována jen polovina, druhou je třeba dopočítat podle vzorce

$$q_{\mathrm{F}(\xi,\eta)}(\alpha) = \frac{1}{q_{\mathrm{F}(\eta,\xi)}(1-\alpha)}.$$

**POZOR** na opačné pořadí indexů!

V praxi se často používá alternativní postup:

1. Pro $s_x^2 \geq s_y^2$ testujeme $t = \frac{s_x^2}{s_y^2} \geq 1$ na rozdělení $\mathrm{F}(m-1, n-1)$:

| $H_0$ | $H_A$ | $H_0$ zamítáme, když | dosažená významnost $P$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{D}X \leq \mathrm{D}Y$ | $\mathrm{D}X > \mathrm{D}Y$ | $t > q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(1-\alpha)$ | $1 - F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t)$ |
| $\mathrm{D}X \geq \mathrm{D}Y$ | $\mathrm{D}X < \mathrm{D}Y$ | nezamítáme | žádná |
| $\mathrm{D}X = \mathrm{D}Y$ | $\mathrm{D}X \neq \mathrm{D}Y$ | $t > q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(1-\frac{\alpha}{2})$ | $2(1 - F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t))$ |

2. Pro $s_x^2 \leq s_y^2$ testujeme $t = \frac{s_y^2}{s_x^2} \geq 1$ na rozdělení $\mathrm{F}(n-1, m-1)$:

| $H_0$ | $H_A$ | $H_0$ zamítáme, když | dosažená významnost $P$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{D}X \leq \mathrm{D}Y$ | $\mathrm{D}X > \mathrm{D}Y$ | nezamítáme | žádná |
| $\mathrm{D}X \geq \mathrm{D}Y$ | $\mathrm{D}X < \mathrm{D}Y$ | $t > q_{\mathrm{F}(n-1,m-1)}(1-\alpha)$ | $1 - F_{\mathrm{F}(n-1,m-1)}(t)$ |
| $\mathrm{D}X = \mathrm{D}Y$ | $\mathrm{D}X \neq \mathrm{D}Y$ | $t > q_{\mathrm{F}(n-1,m-1)}(1-\frac{\alpha}{2})$ | $2(1 - F_{\mathrm{F}(n-1,m-1)}(t))$ |



## Příklad: test rovnosti rozptylů

**Zadání:** Vliv alkoholismu matky na inteligenci dítěte. Otestujte hypotézu, že rozptyl v obou skupinách je shodný.
Skupina 1: matky chronické alkoholičky, $m = 6$, $\bar{x} = 78$, $\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 = 1805$.
Skupina 2: kontrolní, „normální“ matky, $n = 46$, $\bar{y} = 99$, $\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y})^2 = 11520$.

**Řešení:** Otestujme $H_0 : \mathrm{D}X = \mathrm{D}Y$. Realizace testové statistiky:

$$t = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y})^2} = \frac{\frac{1805}{5}}{\frac{11520}{45}} = 1.41.$$

Dosažená hladina významnosti:

$$\begin{aligned} p &= 2\min(F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t), 1 - F_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}(t)) = \\ &= 2\min(F_{\mathrm{F}(5,45)}(1.41), 1 - F_{\mathrm{F}(5,45)}(1.41)) = 2\min(0.76, 0.24) = 0.48. \end{aligned}$$

Rozdíl rozptylů mezi skupinami není statisticky významný, nezamítáme $H_0$ o rovnosti rozptylů.

## Recept: Testy parametrů dvou alternativních rozdělení

**Předpoklad:** Máme 2 *nezávislé* výběry $\boldsymbol{X}_m = (X_1, \ldots, X_m)$ z rozdělení $Ber(q_1)$ a $\boldsymbol{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ z rozdělení $Ber(q_2)$.

Platí-li $q_1 = q_2 = q$, můžeme pro parametr $q$ použít maximálně věrohodný odhad pomocí obou výběrů:

$$R = \frac{m\bar{\boldsymbol{X}} + n\bar{\boldsymbol{Y}}}{m+n}.$$

Pro dostatečně velké rozsahy výběrů ($m > 100$, $n > 100$) lze *rozdělení výběrových relativních četností* $\bar{\boldsymbol{X}}$ a $\bar{\boldsymbol{Y}}$ aproximovat normálními rozděleními:

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{X}} \text{ má přibližně rozdělení } \mathrm{N}\left(R, \frac{R(1-R)}{m}\right), \\
\bar{\boldsymbol{Y}} \text{ má přibližně rozdělení } \mathrm{N}\left(R, \frac{R(1-R)}{n}\right), \text{ takže} \\
\bar{\boldsymbol{X}} - \bar{\boldsymbol{Y}} \text{ má přibližně rozdělení } \mathrm{N}\left(0, \frac{R(1-R)}{m} + \frac{R(1-R)}{n}\right).
\end{aligned}$$

Testovou statistiku

$$T := \frac{\bar{\boldsymbol{X}} - \bar{\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{\frac{R(1-R)}{m} + \frac{R(1-R)}{n}}} = \frac{\bar{\boldsymbol{X}} - \bar{\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{R(1-R)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

testujeme na rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$.



## Příklad: Test rovnosti populačních pravděpodobností

**Zadání:** Přijímací řízení na Berkeley v roce 1973. Z 8300 přihlášených mužů bylo přijato 3700, z 4300 přihlášených žen bylo přijato 1500. Ověřte hypotézu, že pravděpodobnost přijetí mužů a žen je stejná.

**Řešení:** Oboustranný test hypotézy o rovnosti pravděpodobnosti přijetí pro muže $q_m$ a ženy $q_z$:

- Počet přihlášených mužů je $m = 8300$ a žen $n = 4300$.
- Realizace relativních výběrových četností (úspěšnost) je pro muže $\bar{x} = \frac{3700}{8300} = 0.4458$ a pro ženy $\bar{y} = \frac{1500}{4300} = 0.3488$.
- Platí-li $q_m = q_z = q$, můžeme $q$ odhadnout pomocí $r = \frac{m\bar{x}+n\bar{y}}{m+n} = \frac{3700+1500}{8300+4300} = 0.4127$.
- Realizace testové statistiky je

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{r(1-r)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} = \frac{0.4458 - 0.3488}{\sqrt{0.4127(1-0.4127)\left(\frac{1}{8300} + \frac{1}{4300}\right)}} = 10.4802$$

- Dosažená hladina významnosti

$$p = 2(1 - \Phi(t)) \doteq 0.$$

**Závěr:** Zamítáme $H_0$, na základě těchto dat existuje jen mizivá šance, že by pravděpodobnosti přijetí muže a ženy mohly být shodné.

Je to důkaz pohlavní diskriminace?

## Příklad: Test rovnosti populačních pravděpodobností (pokr.)

**Zadání:** Přijímací řízení na Berkeley v roce 1973. Tentokrát zohledněme i to, na jaký směr (umění nebo věda) se zájemci hlásili.

**Řešení:** Kromě celkových výsledků z předchozího slidu, níže uvedená tabulka obsahuje stejné výsledky také pro každý směr zvlášť.

| | Muži | | | Ženy | | | Celkem | Test | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Přihl. | Přij. | Poměr | Přihl. | Přij. | Poměr | Poměr | Stat. | Dos. význ. |
| Směr | $m$ | | $\bar{x}$ | $n$ | | $\bar{y}$ | $r$ | $t$ | $p$ |
| Umění | 2300 | 700 | 0.3043 | 3200 | 900 | 0.2813 | 0.2909 | 1.8604 | 0.0628 |
| Věda | 6000 | 3000 | 0.5000 | 1100 | 600 | 0.5455 | 0.5070 | -2.7720 | 0.0056 |
| Celkem | 8300 | 3700 | 0.4458 | 4300 | 1500 | 0.3488 | 0.4127 | 10.4802 | 0.0000 |

**Závěry:**

- V uměleckých směrech nelze zamítnout hypotézu o stejné pravděpodobnosti přijetí mužů a žen.
- Ve vědeckých směrech tuto hypotézu zamítnout lze, dosažená hladina významnosti je cca 0.5 %.
- Zajímavé ovšem je, že na uměleckých směrech, kam se hlásí více žen, mají vyšší pravděpodobnost přijetí muži, zatímco na vědeckých směrech, kam se hlásí více mužů, mají vyšší pravděpodobnost přijetí ženy. Dochází tedy spíše k *pozitivní diskriminaci*.

**Simpsonův paradox:** Co platí pro části, nemusí platit pro celek.

- Muži a ženy jsou přijímáni přibližně shodně. Ženy ovšem mají tendenci hlásit se na umělecké směry, kde je výběr přísnější, což vysvětluje jejich celkově nižší úspěšnost v přijímačkách.
- Z celkových čísel nelze správně pochopit efekt pohlaví na přijetí kvůli matoucímu faktoru (směr), který nebyl řízen. Když se zařadil do studie, dostali jsme mnohem přesnější obrázek.



# Alternativy



## Porovnání polohy 2 rozdělení: neparametrický test

Co dělat, pokud předpoklady 2výběrového t-testu nejsou splněny? Použijte neparametrický test, např.:

**Mann-Whitneyův U-test:**

- Jsou-li pozorování *ordinální*, testuje hypotézu $H_0$, že rozdělení v obou skupinách jsou shodná, proti alternativní hypotéze $H_A$, že jedno z rozdělení má sklon generovat větší hodnoty než druhé.
- Při přísnějších předpokladech (pozorování spojitá, rozdělení se mohou lišit jen v poloze), jej lze interpretovat jako test rovnosti mediánů.

Testová statistika $U$:

- Přímá metoda: porovnej každý prvek skupiny 1 s každým prvkem skupiny 2; každou výhru počítej jako 1, remízu jako 0.5 $\Longrightarrow U_1$.
- Nepřímá metoda: Seřaď prvky obou skupin dohromady, každému prvku přiřaď *pořadí $r_i$*. $R_1$ je součet pořadí prvků ve skupině 1. $U_1 = n_1 n_2 + n_1(n_1+1)/2 - R_1$.
- Testujeme $U = \min(U_1, n_1 n_2 - U_1)$. Pro malé výběry spec. tabulky. Pro $n_1 > 20$ a $n_2 > 20$ lze použít normální aproximaci a testovat

$$T = \frac{U - M_U}{S_U}, \text{ kde } M_U = \frac{n_1 n_2}{2} = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

$$S_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}},$$

na $\mathrm{N}(0,1)$.

## Test rovnosti středních hodnot ve více než 2 skupinách

**Analýza rozptylu (Analysis of Variance, ANOVA):**

- Máme několik ($a$) skupin dat, mají rozdělení $N(\mu_i, \sigma^2)$
- Testujeme $H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a$ prostřednictvím testu rovnosti 2 rozptylů.
- Pokud $H_0$ platí, máme 2 možnosti, jak odhadnout rozptyl $\sigma^2$:
  1. Z rozdělení výběrových průměrů: pro skupiny o stejné velikosti $n$

     $$S_A^2 = nS_{\bar{X}}^2 = n\frac{1}{a-1}\sum_{j=1}^{a}(\bar{X}_j - \bar{X})^2, \text{ což lze pro skupiny různých velikostí přepsat jako}$$
     $$= \frac{1}{a-1}\sum_{j=1}^{a} n_j(\bar{X}_j - \bar{X})^2$$

  2. Z rozptylů v jednotlivých skupinách (sdružený odhad $\sigma^2$ jako u dvouvýběrového t-testu):

     $$S_E^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1,i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2,i} - \bar{X}_2)^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n_a}(X_{a,i} - \bar{X}_a)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_a - 1)}$$

- Pokud $H_0$ platí, odhadují obě náhodné veličiny totéž, a proto poměr $F = \frac{S_A^2}{S_E^2}$ by měl být roven přibližně 1.
- Pokud $H_0$ neplatí, $S_A^2$ roste, $S_E^2$ zůstává přibližně stejné.



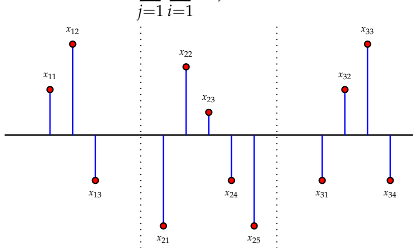
## Rozklad variability

$SS$ ...sum of squares, součet čtverců

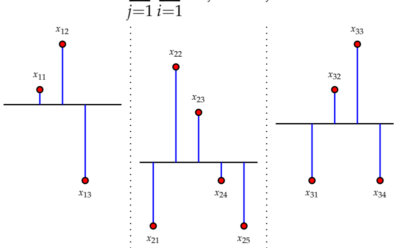
- Celková variabilita: $SS_T$
- Vnitroskup. (reziduální) variabilita: $SS_E$
- Meziskupinová variabilita: $SS_A$

$$SS_T = SS_A + SS_E$$

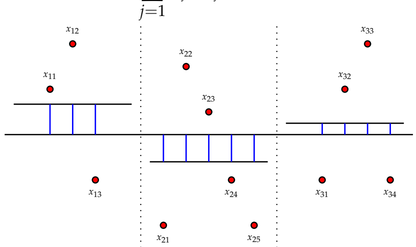
$$SS_T = \sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{j,i} - \bar{X})^2$$




$$SS_E = \sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{j,i} - \bar{X}_j)^2$$




$$SS_A = \sum_{j=1}^{a} n_j(\bar{X}_j - \bar{X})^2$$



## Tabulka ANOVA

Typický výstup statistického softwaru:

- $MS$ (Mean square): odhad rozptylu

| Zdroj variability | Součet čtverců SS | Stupně volnosti d.f. | Průměrný čtverec $MS = \frac{SS}{d.f.}$ | Poměr F |
|---|---|---|---|---|
| Faktor A | $SS_A = \sum_{j=1}^{a} n_j(\bar{X}_j - \bar{X})^2$ | $a-1$ | $MS_A = \frac{SS_A}{a-1}$ | $F = \frac{MS_A}{MS_E}$ |
| Zbytek | $SS_E = \sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{j,i} - \bar{X}_j)^2$ | $\sum_{j=1}^{a}(n_j - 1)$ | $MS_E = \frac{SS_E}{\sum(n_j-1)}$ | |
| Celkem | $SS_T = \sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{j,i} - \bar{X})^2$ | $\sum_{j=1}^{a} n_j - 1$ | | |

- $MS_A = S_A^2$ a $MS_E = S_E^2$ jsou odhady populačního rozptylu.
- Pokud se průměry $\mu_i$ ve skupinách liší, $MS_A$ roste, ale $MS_E$ stále odhaduje společný rozptyl $\sigma^2$.
- Testová statistika $F$ má také význam

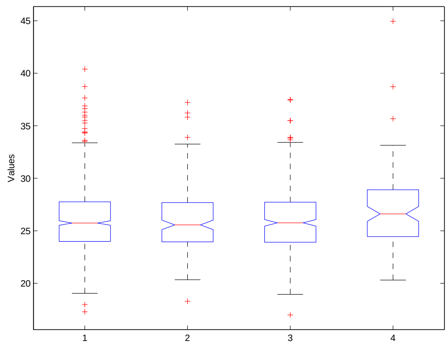
$$F = \frac{MS_A}{MS_E} = \frac{S_A^2}{S_E^2} = \frac{\text{vysvětlený rozptyl}}{\text{nevysvětlený rozptyl}} = \frac{\text{meziskupinový rozptyl}}{\text{vnitroskupinový rozptyl}}$$

a má Fisherovo rozdělení s $a-1$ s.v. pro čitatel a s $\sum(n_j - 1)$ s.v. pro jmenovatel.



## Příklad

Zjistěte, zda se liší BMI pacientů pro různé druhy fyz. zátěže v zaměstnání
(1: sedí, 2: stojí, 3: chodí, 4: nosí těžké předměty).




| Source | SS | df | MS | F | Prob>F |
|---|---|---|---|---|---|
| Groups | 90.4050 | 3 | 30.1350 | 3.0906 | 0.0262 |
| Error | 1.3329e+004 | 1367 | 9.7507 | | |
| Total | 1.3420e+004 | 1370 | | | |

Dosažená hladina významnosti (poslední sloupeček) $p = 2.62$ %.

### Předpoklady

- Nezávislost jednotlivých pozorování
- Nezávislost jednotlivých skupin
- Normální rozdělení sledované veličiny ve všech skupinách
  (Kolmogorov-Smirnovův test, Shapiro-Wilkův test, $\chi^2$ test dobré shody)
- Shoda rozptylů ve skupinách
  (Bartlettův test, Levenův test, Hartleyův test)
- Při porušení posledních dvou předpokladů je možné použít neparametrickou, tzv. Kruskal-Wallisovu ANOVu.