

A6M33SSL: Domácí úloha: DU4

Varianta: houdklen

1. [stat_mm_2unif, 0.300 b.] Mějme náhodnou veličinu X s hustotou pravděpodobnosti

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ 2c & \text{pro } x \in \langle 0, ka \rangle, \\ c & \text{pro } x \in \langle ka, a \rangle, \\ 0 & \text{pro } x \in \langle a, \infty \rangle, \end{cases}$$

kde $k \in (0, 1)$ je známý parametr tohoto rozdělení, ale a neznáme. (Rozdělení je vlastně vytvořeno ze 2 “stejně vysokých” rovnoměrných rozdělení, jedno je na (kratším) intervalu $\langle 0, ka \rangle$, druhé na (delším) intervalu $\langle 0, a \rangle$.)

- Určete konstantu c jako funkci neznámého parametru a a známého parametru k tak, aby výše uvedená funkce byla skutečně hustotou pravděpodobnosti. (Nápověda: Samozřejmě lze počítat integrál od $-\infty$ do $+\infty$ a položit jej roven 1. Ale lze postupovat i geometricky, tj. vyjádřit si obsahy jednotlivých obdélníků a jejich součet položit roven 1.) Pro účely tohoto podúkolu nyní předpokládejme, že hodnotu a známe a že $a = a^*$ (viz parametry úlohy). Vyčíslete konstantu c a výsledek zaokrouhlete na 4 platné číslice.
- Vyjádřete střední hodnotu EX tohoto rozdělení jako funkci neznámého parametru a . (Nápověda: Opět lze pro výpočet EX využít definiční vztah s integrálem, nebo lze EX vyjádřit jako vážený průměr středních hodnot 2 rovnoměrných rozdělení.) Rozmyslete si, jaká by měla být střední hodnota rozdělení pro $k = 0$ a pro $k = 1$. Zkontrolujte, zda vámi odvozený vztah pro EX tyto vlastnosti splňuje. Pro účely tohoto podúkolu nyní předpokládejme, že hodnotu a známe a že $a = a^*$ (viz parametry úlohy). Vyčíslete střední hodnotu EX_0 pro $k = 0$ a střední hodnotu EX_1 pro $k = 1$. (V dalších podúkolech je opět a neznámé.)
- Získali jsme realizaci náhodného výběru z tohoto rozdělení. Vypočetli jsme výběrový průměr $\bar{x} = m$. Metodou momentů odvoďte odhad \hat{a} parametru rozdělení a . (Nápověda: vztah pro EX položte roven \bar{x} a vyřešte rovnici.) Odhad vyčíslete a zaokrouhlete na 4 platné číslice. Pokud by hodnota vámi odvozeného odhadu vyšla nesmyslně, nahraďte ji nejbližší hodnotou, kterou považujete za rozumnou/přípustnou.

Parametry: $k = 0.2$, $a^* = 3$, $m = 6.8$

Požadované výsledky: c , EX_0 , EX_1 , \hat{a}

2. [stat_mle_ae-ax, 0.200 b.] Mějme náhodnou veličinu X s rozdělením popsaným hustotou $f_X(x) = ae^{-ax}$. Z realizace náhodného výběru z tohoto rozdělení jsme spočetli výběrový průměr $\bar{x} = m$. Metodou maximální věrohodnosti odvoďte odhad \hat{a} parametru a a vyčíslete jej. Výsledek zaokrouhlete na 4 platné číslice.

Parametry: $m = 0.59$

Požadované výsledky: \hat{a}

3. [stat_mle_mm_exam2, 0.500 b.] Ústní zkoušku ze statistiky se kromě vás v daný termín chystá složit n dalších studentů. Zkoušející je znám tím, že u ústní zkoušky používá pouze stupně A, B, nebo C. Vy půjdete na řadu až poslední, takže můžete sledovat, kolik kterých známek už

zkoušející udělil (a Áček, b Béček a c Céček). Narozdíl od minulého příkladu pravděpodobnosti p_A , p_B a p_C neznáme. Jediné, co vám zkoušející sdělí navíc, je to, že dlouhodobě platí, že dává stejně Béček jako Áček a Céček dohromady, tedy že $p_B = p_A + p_C$. Zkoušející po vás při vaší ústní zkoušce chce, abyste neznámé pravděpodobnosti odhadli z dostupných dat (a , b , c), tj. abyste odvodili vztahy pro výpočet odhadů \hat{p}_A , \hat{p}_B a \hat{p}_C jako funkce pozorovaných četností a , b , c při respektování podmínky na p_B .

- a) Odvod'te vztahy pro $r_A = \hat{p}_A$, $r_B = \hat{p}_B$ a $r_C = \hat{p}_C$ metodou maximální věrohodnosti a vyčíslete je. (Nápověda: Máme 3 neznámé parametry a 2 rovnice, které pro ně musí být splněny - rovnice pro součet všech 3 pstí, a rovnice pro p_B . Vyjádřete tedy 2 neznámé parametry pomocí toho zbývajících. Zkonstruuje funkci věrohodnosti jako funkci jediného neznámého parametru. Zlogaritmujte, zderivujte, najdete maximum.)
- b) Odvod'te vztahy pro $q_A = \hat{p}_A$, $q_B = \hat{p}_B$ a $q_C = \hat{p}_C$ metodou momentů a vyčíslete je. Abyste metodu momentů mohli aplikovat, nahrad'te písmenné označení klasifikačních stupňů A, B, C číselnými známkami 1, 2, 3. (Nápověda: Vyjádřete střední hodnotu rozdělení jako funkci parametrů p_A , p_B a p_C , resp. jako funkci jediného z nich, protože zbylé 2 parametry lze dopočítat stejně, jako u metody maximální věrohodnosti. Vyjádřete výběrový průměr jako funkci a , b , c . Sestavte rovnici a vyřešte ji pro neznámý parametr, čímž dostanete vztah pro jeho odhad.)

Vztahy vyčíslete pro známá a , b , c . Výsledky zaokrouhlete na 4 platné číslice. Pokud by hodnota vámi odvozeného odhadu vyšla nesmyslně, nahrad'te ji nejbližší hodnotou, kterou považujete za rozumnou/přípustnou.

Parametry: $a = 2$, $b = 5$, $c = 1$

Požadované výsledky: r_A , r_B , r_C , q_A , q_B , q_C