

# A6M33SSL: Domácí úloha: DU4

Varianta: hatledav

1. [stat\_mm\_2unif, 0.300 b.] Mějme náhodnou veličinu  $X$  s hustotou pravděpodobnosti

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ 2c & \text{pro } x \in \langle 0, ka \rangle, \\ c & \text{pro } x \in \langle ka, a \rangle, \\ 0 & \text{pro } x \in \langle a, \infty \rangle, \end{cases}$$

kde  $k \in (0, 1)$  je známý parametr tohoto rozdělení, ale  $a$  neznáme. (Rozdělení je vlastně vytvořeno ze 2 “stejně vysokých” rovnoměrných rozdělení, jedno je na (kratším) intervalu  $\langle 0, ka \rangle$ , druhé na (delším) intervalu  $\langle 0, a \rangle$ .)

- Určete konstantu  $c$  jako funkci neznámého parametru  $a$  a známého parametru  $k$  tak, aby výše uvedená funkce byla skutečně hustotou pravděpodobnosti. (Nápověda: Samozřejmě lze počítat integrál od  $-\infty$  do  $+\infty$  a položit jej roven 1. Ale lze postupovat i geometricky, tj. vyjádřit si obsahy jednotlivých obdélníků a jejich součet položit roven 1.) Pro účely tohoto podúkolu nyní předpokládejme, že hodnotu  $a$  známe a že  $a = a^*$  (viz parametry úlohy). Vyčíslete konstantu  $c$  a výsledek zaokrouhlete na 4 platné číslice.
- Vyjádřete střední hodnotu  $EX$  tohoto rozdělení jako funkci neznámého parametru  $a$ . (Nápověda: Opět lze pro výpočet  $EX$  využít definiční vztah s integrálem, nebo lze  $EX$  vyjádřit jako vážený průměr středních hodnot 2 rovnoměrných rozdělení.) Rozmyslete si, jaká by měla být střední hodnota rozdělení pro  $k = 0$  a pro  $k = 1$ . Zkontrolujte, zda vámi odvozený vztah pro  $EX$  tyto vlastnosti splňuje. Pro účely tohoto podúkolu nyní předpokládejme, že hodnotu  $a$  známe a že  $a = a^*$  (viz parametry úlohy). Vyčíslete střední hodnotu  $EX_0$  pro  $k = 0$  a střední hodnotu  $EX_1$  pro  $k = 1$ . (V dalších podúkolech je opět  $a$  neznámé.)
- Získali jsme realizaci náhodného výběru z tohoto rozdělení. Vypočetli jsme výběrový průměr  $\bar{x} = m$ . Metodou momentů odvoďte odhad  $\hat{a}$  parametru rozdělení  $a$ . (Nápověda: vztah pro  $EX$  položte roven  $\bar{x}$  a vyřešte rovnici.) Odhad vyčíslete a zaokrouhlete na 4 platné číslice. Pokud by hodnota vámi odvozeného odhadu vyšla nesmyslně, nahraďte ji nejbližší hodnotou, kterou považujete za rozumnou/přípustnou.

**Parametry:**  $k = 0.9$ ,  $a^* = 9$ ,  $m = 9.8$

**Požadované výsledky:**  $c$ ,  $EX_0$ ,  $EX_1$ ,  $\hat{a}$

2. [stat\_mle\_ae-ax, 0.200 b.] Mějme náhodnou veličinu  $X$  s rozdělením popsaným hustotou  $f_X(x) = ae^{-ax}$ . Z realizace náhodného výběru z tohoto rozdělení jsme spočetli výběrový průměr  $\bar{x} = m$ . Metodou maximální věrohodnosti odvoďte odhad  $\hat{a}$  parametru  $a$  a vyčíslete jej. Výsledek zaokrouhlete na 4 platné číslice.

**Parametry:**  $m = 0.93$

**Požadované výsledky:**  $\hat{a}$

3. [stat\_mle\_mm\_exam2, 0.500 b.] Ústní zkoušku ze statistiky se kromě vás v daný termín chystá složit  $n$  dalších studentů. Zkoušející je znám tím, že u ústní zkoušky používá pouze stupně A, B, nebo C. Vy půjdete na řadu až poslední, takže můžete sledovat, kolik kterých známek už

zkoušející udělil ( $a$  Áček,  $b$  Béček a  $c$  Céček). Narozdíl od minulého příkladu pravděpodobnosti  $p_A$ ,  $p_B$  a  $p_C$  neznáme. Jediné, co vám zkoušející sdělí navíc, je to, že dlouhodobě platí, že dává stejně Béček jako Áček a Céček dohromady, tedy že  $p_B = p_A + p_C$ . Zkoušející po vás při vaší ústní zkoušce chce, abyste neznámé pravděpodobnosti odhadli z dostupných dat ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ), tj. abyste odvodili vztahy pro výpočet odhadů  $\hat{p}_A$ ,  $\hat{p}_B$  a  $\hat{p}_C$  jako funkce pozorovaných četností  $a$ ,  $b$ ,  $c$  při respektování podmínky na  $p_B$ .

- Odvoďte vztahy pro  $r_A = \hat{p}_A$ ,  $r_B = \hat{p}_B$  a  $r_C = \hat{p}_C$  metodou maximální věrohodnosti a vyčíslete je. (Nápověda: Máme 3 neznámé parametry a 2 rovnice, které pro ně musí být splněny - rovnice pro součet všech 3 pstí, a rovnice pro  $p_B$ . Vyjádřete tedy 2 neznámé parametry pomocí toho zbývajícího. Zkonstruuje funkci věrohodnosti jako funkci jediného neznámého parametru. Zlogaritmujte, zderivujte, najdete maximum.)
- Odvoďte vztahy pro  $q_A = \hat{p}_A$ ,  $q_B = \hat{p}_B$  a  $q_C = \hat{p}_C$  metodou momentů a vyčíslete je. Abyste metodu momentů mohli aplikovat, nahraďte písmenné označení klasifikačních stupňů A, B, C číselnými známkami 1, 2, 3. (Nápověda: Vyjádřete střední hodnotu rozdělení jako funkci parametrů  $p_A$ ,  $p_B$  a  $p_C$ , resp. jako funkci jediného z nich, protože zbylé 2 parametry lze dopočítat stejně, jako u metody maximální věrohodnosti. Vyjádřete výběrový průměr jako funkci  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Sestavte rovnici a vyřešte ji pro neznámý parametr, čímž dostanete vztah pro jeho odhad.)

Vztahy vyčíslete pro známá  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Výsledky zaokrouhlete na 4 platné číslice. Pokud by hodnota vámi odvozeného odhadu vyšla nesmyslně, nahraďte ji nejbližší hodnotou, kterou považujete za rozumnou/přípustnou.

**Parametry:**  $a = 2$ ,  $b = 6$ ,  $c = 3$

**Požadované výsledky:**  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_C$ ,  $q_A$ ,  $q_B$ ,  $q_C$