A6M33SSL: Domácí úloha: DU4

Varianta: kaspaiva

1. **[stat_mm_2unif, 0.300 b.]** Mějme náhodnou veličinu X s hustotou pravděpodobnosti

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ 2c & \text{pro } x \in \langle 0, ka), \\ c & \text{pro } x \in \langle ka, a), \\ 0 & \text{pro } x \in \langle a, \infty), \end{cases}$$

kde $k \in (0, 1)$ je známý parametr tohoto rozdělení, ale a neznáme. (Rozdělení je vlastně vytvořeno ze 2 "stejně vysokých" rovnoměrných rozdělení, jedno je na (kratším) intervalu $\langle 0, ka \rangle$, druhé na (delším) intervalu $\langle 0, a \rangle$.)

   a) Určete konstantu c jako funkci neznámého parametru a a známého parametru k tak, aby výše uvedená funkce byla skutečně hustotou pravděpodobnosti. (Nápověda: Samozřejmě lze počítat integrál od $-\infty$ do $+\infty$ a položit jej roven 1. Ale lze postupovat i geometricky, tj. vyjádřit si obsahy jednotlivých obdélníků a jejich součet položit roven 1.) Pro účely tohoto podúkolu nyní předpokládejme, že hodnotu a známe a že $a = a^*$ (viz parametry úlohy). Vyčíslete konstantu c a výsledek zaokrouhlete na 4 platné číslice.

   b) Vyjádřete střední hodnotu EX tohoto rozdělení jako funkci neznámého parametru a. (Nápověda: Opět lze pro výpočet EX využít definiční vztah s integrálem, nebo lze EX vyjádřit jako vážený průměr středních hodnot 2 rovnoměrných rozdělení.) Rozmyslete si, jaká by měla být střední hodnota rozdělení pro $k = 0$ a pro $k = 1$. Zkontrolujte, zda vámi odvozený vztah pro EX tyto vlastnosti splňuje. Pro účely tohoto podúkolu nyní předpokládejme, že hodnotu a známe a že $a = a^*$ (viz parametry úlohy). Vyčíslete střední hodnotu EX_0 pro $k = 0$ a střední hodnotu EX_1 pro $k = 1$. (V dalších podúkolech je opět a neznámé.)

   c) Získali jsme realizaci náhodného výběru z tohoto rozdělení. Vypočetli jsme výběrový průměr $\bar{\mathbf{x}} = m$. Metodou momentů odvoďte odhad $\hat{a}$ parametru rozdělení a. (Nápověda: vztah pro EX položte roven $\bar{\mathbf{x}}$ a vyřešte rovnici.) Odhad vyčíslete a zaokrouhlete na 4 platné číslice. Pokud by hodnota vámi odvozeného odhadu vyšla nesmyslně, nahraďte ji nejbližší hodnotou, kterou považujete za rozumnou/přípustnou.

   Parametry: $k = 0.3$, $a^* = 8$, $m = 1.5$

   Požadované výsledky: c, EX_0, EX_1, $\hat{a}$

2. **[stat_mle_ae-ax, 0.200 b.]** Mějme náhodnou veličinu X s rozdělením popsaným hustotou $f_X(x) = a\mathrm{e}^{-ax}$. Z realizace náhodného výběru z tohoto rozdělení jsme spočetli výběrový průměr $\bar{\mathbf{x}} = m$. Metodou maximální věrohodnosti odvoďte odhad $\hat{a}$ parametru a a vyčíslete jej. Výsledek zaokrouhlete na 4 platné číslice.

   Parametry: $m = 0.12$

   Požadované výsledky: $\hat{a}$

3. **[stat_mle_mm_exam2, 0.500 b.]** Ústní zkoušku ze statistiky se kromě vás v daný termín chystá složit n dalších studentů. Zkoušející je znám tím, že u ústní zkoušky používá pouze stupně A, B, nebo C. Vy půjdete na řadu až poslední, takže můžete sledovat, kolik kterých známek už

zkoušející udělil (a Áček, b Béček a c Céček). Narozdíl od minulého příkladu pravděpodobnosti p_A, p_B a p_C neznáme. Jediné, co vám zkoušející sdělí navíc, je to, že dlouhodobě platí, že dává stejně Béček jako Áček a Céček dohromady, tedy že $p_B = p_A + p_C$. Zkoušející po vás při vaší ústní zkoušce chce, abyste neznámé pravděpodobnosti odhadli z dostupných dat (a, b, c), tj. abyste odvodili vztahy pro výpočet odhadů $\hat{p_A}$, $\hat{p_B}$ a $\hat{p_C}$ jako funkce pozorovaných četností a, b, c při respektování podmínky na p_B.

a) Odvoďte vztahy pro $r_A = \hat{p_A}$, $r_B = \hat{p_B}$ a $r_c = \hat{p_C}$ metodou maximální věrohodnosti a vyčíslete je. (Nápověda: Máme 3 neznámé parametry a 2 rovnice, které pro ně musí být splněny - rovnice pro součet všech 3 pstí, a rovnice pro p_B. Vyjádřete tedy 2 neznámé parametry pomocí toho zbývajícího. Zkonstruujte funkci věrohodnosti jako funkci jediného neznámého parametru. Zlogaritmujte, zderivujte, najděte maximum.)

b) Odvoďte vztahy pro $q_A = \hat{p_A}$, $q_B = \hat{p_B}$ a $q_C = \hat{p_C}$ metodou momentů a vyčíslete je. Abyste metodu momentů mohli aplikovat, nahraďte písmenné označení klasifikačních stupňů A, B, C číselnými známkami 1, 2, 3. (Nápověda: Vyjádřete střední hodnotu rozdělení jako funkci parametrů p_A, p_B a p_C, resp. jako funkci jediného z nich, protože zbylé 2 parametry lze dopočítat stejně, jako u metody maximální věrohodnosti. Vyjádřete výběrový průměr jako funkci a, b, c. Sestavte rovnici a vyřešte ji pro neznámý parametr, čímž dostanete vztah pro jeho odhad.)

Vztahy vyčíslete pro známá a, b, c. Výsledky zaokrouhlete na 4 platné číslice. Pokud by hodnota vámi odvozeného odhadu vyšla nesmyslně, nahraďte ji nejbližší hodnotou, kterou považujete za rozumnou/přípustnou.

Parametry: $a = 6$, $b = 6$, $c = 2$

Požadované výsledky: r_A, r_B, r_C, q_A, q_B, q_C