A6M33SSL: Domácí úloha: DU3

Varianta: kaspaiva

1. **[stat_mm_1m2c, 0.200 b.]** Mějme náhodnou veličinu X, která má rozdělení $R(a, b)$, tj. jakési teoretické rozdělení se dvěma parametry, a a b. O tomto rozdělení víme, že střední hodnota $EX = a \cdot b$ a rozptyl $DX = a \cdot b^2$. Z realizace $\mathbf{x}$ náhodného výběru $\mathbf{X}$ známe realizaci prvního obecného momentu $m_X = m$ a realizaci druhého centrálního momentu $m^*_{X^2} = c$. S využitím metody momentů odvoďte odhady $\hat{a}, \hat{b}$ parametrů a, b jako funkce m a c) a tyto odhady vyčíslete. (Výsledky zaokrouhlete na 4 platná místa.)

   Parametry: $m = 2.0$, $c = 9.2$

   Požadované výsledky: $\hat{a}$, $\hat{b}$

2. **[stat_mle_exam1, 0.800 b.]** Ústní zkoušku ze statistiky se kromě vás v daný termín chystá složit n dalších studentů. Zkoušející je znám tím, že u ústní zkoušky používá pouze stupně A, B, nebo C. Vy půjdete na řadu až poslední, takže můžete sledovat, kolik kterých známek už zkoušející udělil.

   a) Z minulých let známe pravděpodobnosti p_A, p_B a p_C jednotlivých klas. stupňů. Až půjdete na zkoušku vy, budete znát sekvenci známek $\mathbf{x}$ délky n obsahující a, b, resp. c udělených známek A, B, resp. C (přičemž $a + b + c = n$). Určete vztah pro výpočet pravděpodobnosti $p = p(\mathbf{x}|p_A, p_B, p_C)$, s jakou bychom měli tuto sekvenci pozorovat, a vyčíslete ji pro známá a, b, c.

   b) Určete věrohodnost $L = L(p_A, p_B, p_C)$ hodnot parametrů rozdělení vzhledem k pozorovaným datům.

   c) Kterou ze známek A, B, nebo C by vám měl zkoušející dát, kdyby chtěl maximalizovat pravděpodobnost výsledků dnešního termínu jako celku (tj. kdyby nebral ohled na vaše znalosti)? Pokud existuje více než jedna možnost, vyberte tu, která je první v abecedě. (Do JSON souboru uveďte buď `"z": "A"`, nebo `"z": "B"`, nebo `"z": "C"`.)

   d) Předpokládejme nyní, že pravděpodobnosti p_A, p_B a p_C neznáme. Zkoušející po vás při vaší ústní zkoušce chce, abyste je odhadli z dostupných dat (a, b, c) metodou maximální věrohodnosti. Jediné, co vám sdělí navíc, je to, že dlouhodobě platí, že dává stejně Béček jako Áček a Céček dohromady, tedy že $p_B = p_A + p_C$. Určete vztahy pro výpočet odhadů $\hat{p_A}$, $\hat{p_B}$ a $\hat{p_C}$ jako funkce pozorovaných četností a, b, c při respektování podmínky na p_B. Vztahy vyčíslete pro známá a, b, c.

   Výsledky zaokrouhlete na 4 platné číslice.

   Parametry: $p_A = 0.33$, $p_B = 0.49$, $p_C = 0.18$, $a = 2$, $b = 7$, $c = 2$

   Požadované výsledky: p, L, z, $\hat{p}_A$, $\hat{p}_B$, $\hat{p}_C$