Statistika a spolehlivost v lékařství
Markovovy modely

Markovovy modely

Výpočet spolehlivosti opravovaných soustav nebo soustav se zálohováním bývá složitý. Pokud mají doby poruch a doby obnov exponenciální rozdělení, je výhodné použít Markovův model. V teorii Markovových procesů se omezíme na základní vlastnosti potřebné pro výpočet spolehlivosti soustav, teorie Markovových procesů je popsána v početné literatuře.

Markovovy modely jsou funkce dvou náhodných proměnných, stavu soustavy a doby nebo jiné veličiny, v závislosti na které stav sledujeme. Obě veličiny mohou být spojité nebo diskrétní, tomu odpovídají čtyři druhy modelů.
Def: Markovův řetězec : model s diskrétními stavy a diskrétním časem.
Def: Markovův proces : model s diskrétními stavy a spojitým časem.
Def: Markovův model : množina pravděpodobností udávajících pravděpodobnost přechodu z nějakého výchozího stavu do nějakého následujícího stavu. Pravděpodobnost závisí pouze na těchto dvou stavech a je zcela nezávislá na všech minulých stavech, kterými proces prošel.

Pro sestavení Markovova modelu se nejprve definují vzájemně se vylučující stavy soustavy. Soustava Markovových stavových rovnic popisuje pravděpodobnostní přechody z počátečních stavů do konečných stavů. Za předpokladů :

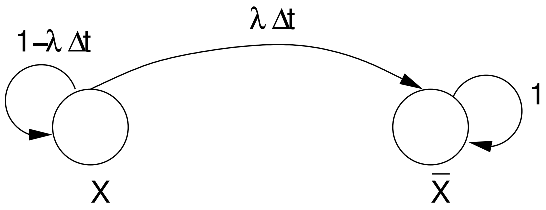
1. Pravděpodobnost přechodu z jednoho stavu do jiného v časovém intervalu Δt je rovna součinu $\lambda_i(t) \cdot \Delta t$, kde $\lambda_i(t)$ je intenzita pravděpodobnosti přechodu (hazard) příslušná ke dvěma stavům, mezi kterými přechod probíhá.

2. Pravděpodobnosti více než jednoho přechodu v časovém intervalu Δt jsou řádově menší a lze je zanedbat.

Def: Homogenní model : všechna $\lambda_i(t) = \lambda_i$ jsou konstantní.
Def: Nehomogenní model : některá $\lambda_i(t)$ je funkcí času.

Markovovy modely lze názorně vyjádřit orientovaným grafem (Markovův graf). Uzly grafu představují stavy soustavy, orientované hrany grafu označené pravděpodobnostmi přechodu udávají možné přechody.

Mějme soustavu s jediným neopravitelným prvkem. Pravděpodobnost bezporuchového stavu x v čase $t + \Delta t$ označme $P_x(t + \Delta t)$. Podobně pravděpodobnost, že soustava bude v poruchovém stavu $\overline{x}$ označíme $P_{\overline{x}}(t + \Delta t)$.



Markovův graf

Odvození matice pravděpodobností přechodu

Pro pravděpodobnosti jednotlivých stavů napíšeme rovnice

$$\begin{aligned} P_x(t+\Delta t) &= \quad (1-\lambda(t)\Delta t)\cdot P_x(t), \\ P_{\overline{x}}(t+\Delta t) &= \lambda(t)\Delta t \cdot P_x(t) + P_{\overline{x}}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

které přepíšeme do maticové rovnice

$$\begin{bmatrix} P_x(t+\Delta t) \\ P_{\overline{x}}(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda(t)\Delta t & 0 \\ \lambda(t)\Delta t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_{\overline{x}}(t) \end{bmatrix}.$$

nebo zkráceně:

$$p(t+\Delta t) = \mathbb{P}p(t),$$

kde $\mathbb{P}$ je *matice pravděpodobností přechodu*, a vektor $p(t)$ obsahuje pravděpodobnosti jednotlivých stavů v čase t, tedy v tomto případě

$$p(t) = \begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_{\overline{x}}(t) \end{bmatrix}$$

Matice pravděpodobností přechodu $\mathbb{P}$ má součet v každém sloupci roven 1.

Poznámka: *Rovnice lze zapsat i obráceně, pomocí řádkového vektoru pravděpodobností $p'(t) = [p_1(t), \ldots, p_n(t)]$ ($p_i(t)$ je pravděpodobnost stavu i) a matice $\mathbb{P}'$, pro kterou platí $\mathbb{P}' = \mathbb{P}^{\mathrm{T}}$. V takovém případě se následující stav počítá násobením zleva:*

$$p'(t+\Delta t) = p'(t)\mathbb{P}'$$

Pro matici $\mathbb{P}'$ samozrejmě platí, že součet pravděpodobností v řádcích musí být roven 1. Pro výpočet s Markovovými modely je jedno, který způsob zápisu matice pravděpodobností přechodů se použije, je však třeba dbát na použití správných vektorů a správného násobení matice.

Odvození matice intenzit

Rovnice (1) lze dále upravit na tvar :

$$\begin{aligned} \frac{P_x(t+\Delta t) - P_x(t)}{\Delta t} &= -\lambda(t)P_x(t), \\ \frac{P_{\overline{x}}(t+\Delta t) - P_{\overline{x}}(t)}{\Delta t} &= \lambda(t)P_x(t). \end{aligned}$$

Zavedením limity pro $\Delta t \to 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_x(t+\Delta t) - P_x(t)}{\Delta t} &= -\lambda(t) P_x(t), \\
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{\overline{x}}(t+\Delta t) - P_{\overline{x}}(t)}{\Delta t} &= \lambda(t) P_x(t),
\end{aligned}$$

získáme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
\dot{P_x} &= -\lambda(t) P_x(t), \\
\dot{P_{\overline{x}}} &= \lambda(t) P_x(t).
\end{aligned}$$

Obvyklé počáteční podmínky jsou $P_x(0) = 1$ a $P_{\overline{x}}(0) = 0$. První rovnici lze řešit samostatně

$$\begin{aligned}
\frac{dP_x}{dt} &= -\lambda(t) P_x(t), \\
\frac{1}{P_x(t)} dP_x &= -\lambda(t) dt, \\
\ln P_x(t) &= K \int_0^t -\lambda(t) dt, \\
P_x(t) &= K e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}.
\end{aligned}$$

Dosazením $P_x(0) = 1$ získáme vztah pro pravděpodobnost bezporuchového provozu

$$R(t) = P_x(t) = e^{\int_0^t -\lambda(t) dt}.$$

Řešením druhé rovnice dostaneme

$$Q(t) = P_{\overline{x}}(t) = 1 - e^{\int_0^t -\lambda(t) dt}.$$

Pro $\lambda(t) = \lambda$ vyjádříme soustavu diferenciálních rovnic maticovým zápisem

$$\begin{bmatrix} \dot{P_x}(t) \\ \dot{P_{\overline{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_{\overline{x}}(t) \end{bmatrix}.$$

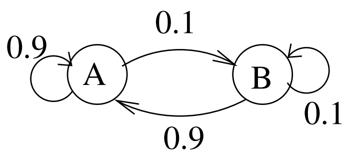
Získáme *matici intenzit*. Matice intenzit není stochastická, součet prvků v každém sloupci je roven nule. Matici intenzit lze také napsat přímo z Markovova grafu.

Limitní vektor

Matice pravděpodobností $\mathbb{P}$ popisuje, jaké jsou pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými stavy. Toho můžeme využít k výpočtu budoucích stavů $p(t+\Delta t)$ na základě předchozích stavů. Pro zjednodušení zápisu budeme značit následující stav $p(k+1) = p(t+\Delta t)$. Následující stav tedy může získat jako $p(k+1) = \mathbb{P}p(k)$, tedy:

$$\begin{aligned}
p(1) &= \mathbb{P}p(0) \\
p(2) &= \mathbb{P}p(1) = \mathbb{P}\mathbb{P}p(0) \\
&\vdots \\
p(k) &= \mathbb{P}^k p(0)
\end{aligned}$$

Uvažujme jednoduchý model:



Příslušná matice pravděpodobností přechodu je

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

a vektor pravdpodobností $p(t)$ je

$$p(t) = \begin{bmatrix} P_A(t) \\ P_B(t) \end{bmatrix}$$

Jaké budou pravděpodobnosti stavů v čase $k = 2$, pokud $p(0) = [1, 0]^T$?

$$p(1) = \mathbb{P}p(0) = \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$p(2) = \mathbb{P}p(1) = \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

V čase $k = 2$ budou tedy pravděpodobnosti stavů $p(2) = [0.9, 0.1]^{\mathrm{T}}$. Vidíme, že tyto pravděpodobnosti se nebudou se zvyšujícím časem k měnit. Vektor $[0.9, 0.1]^{\mathrm{T}}$ je tedy limitním vektorem modelu. Pro limitní vektor $x(k)$ platí, že v něm soustava setrvává, tedy jeho následující stav $x(k+1)$ bude stejný jako $x(k)$:

Limitní vektor x tedy můžeme vypočítat jako řešení soustavy

$$x = \mathbb{P}x$$

nebo též

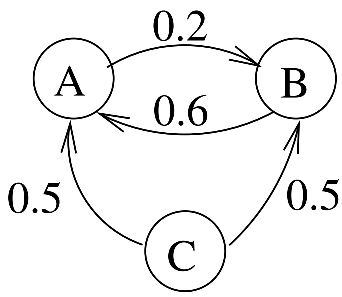
$$ax = \mathbb{P}x,$$

kde a je vlastní číslo matice $\mathbb{P}$ a x je její vlastní vektor. Lititní vektor Markovova modelu můžeme je tedy vlastním vektorem $\mathbb{P}$, který náleží vlastnímu číslu $a = 1$.

V tomto případě je $x = [0.9, 0.1]^{\mathrm{T}}$ je vlastním vektorem $\mathbb{P}$ a říká nám, že v 90% bude model ve stavu A, což není předvapivé, neboť pravděpodobnost setrvání ve stavu A je 0.9, navíc pravděpodobnost přechodu z B do A je taktéž 0.9.

► **Příklad 1 (Míče)** *Mějme tři hráče (A, B, C). Pokud má míč A, tak ho s pravděpodobností 0.2 hodí hráči B, pokud má míč B, tak ho hodí s pravděpodobností 0.6 hráči A. Hráč C hází míč ostatním dvěma se stejnou pravděpodobností. Jaká je pravděpodobnost, že hráči mají míče v čase $k = 1$, pokud v čase $k = 0$ budou mít stejnou pravděpodobnost, že míč mají? Jaký je limitní stav?*

Řešení:



Matice pravděpodobností předchodu je

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

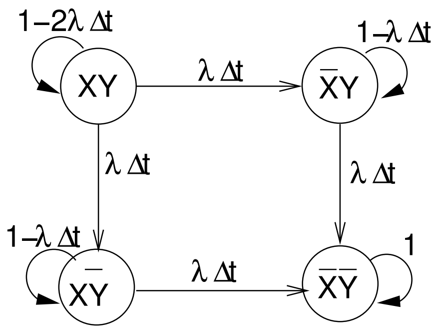
a počáteční vektor $p(0) = [1/3, 1/3, 1/3]^{\mathrm{T}}$.

$$p(1) = \mathbb{P}p(0) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.633 \\ 0.367 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Limitní vektor dostaneme jako vlastní vektor matice $\mathbb{P}$ náležící vlastnímu číslu 1. V tomto případě je limitní vektor $x = [0.75, 0.25, 0]^{\mathrm{T}}$. V 75% případů bude mít míč hráč A.

► **Příklad 2 (Soustava 2 prvky, každý prvek 2 stavy)** *Mějme soustavu se dvěma neopravitelnými prvky X a Y, každý prvek má dva stavy (bezporuchový stav, porucha), intenzita poruch je pro oba prvky stejná a konstantní $\lambda_i(t) = \lambda$. Přechod ze stavu XY do stavu $\bar{X}\bar{Y}$ se nepředpokládá. Nakreslete Markovův graf, sestavte matici pravděpodobností přechodu a matici intenzit.*

Markovův graf



Matice pravděpodobností přechodu:

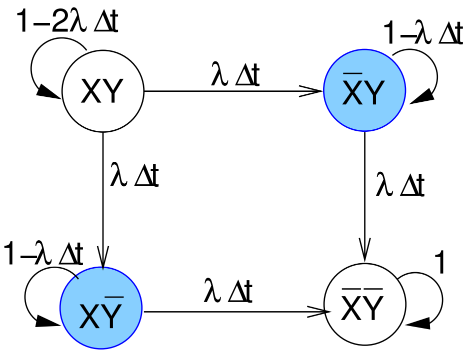
$$\begin{bmatrix} P_{XY} \\ P_{\overline{X}Y} \\ P_{X\overline{Y}} \\ P_{\overline{X}\overline{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\Delta t & 1-\lambda\Delta t & 0 & 0 \\ \lambda\Delta t & 0 & 1-\lambda\Delta t & 0 \\ 0 & \lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{XY} \\ P_{\overline{X}Y} \\ P_{X\overline{Y}} \\ P_{\overline{X}\overline{Y}} \end{bmatrix}.$$

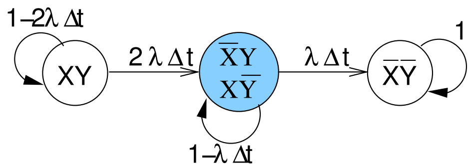
Matice intenzit:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{XY} \\ \dot{P}_{\overline{X}Y} \\ \dot{P}_{X\overline{Y}} \\ \dot{P}_{\overline{XY}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{XY} \\ P_{\overline{X}Y} \\ P_{X\overline{Y}} \\ P_{\overline{XY}} \end{bmatrix}.$$

Slučování stavů

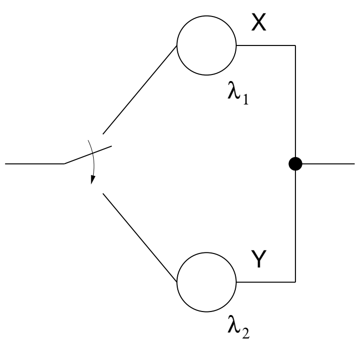
Složitost Markovova modelu závisí na počtu stavů soustavy. Soustava s m stavy bude popsána m diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Pro soustavu s n dvoustavovými prvky je počet stavů soustavy $m = 2^n$. Obecně pro prvky s k možnými stavy je $m = k^n$. Počet diferenciálních rovnic roste velmi rychle. Při výpočtu bezporuchovosti soustavy můžeme rozlišovat pouze stavy určené počtem porouchaných prvků a nezajímat se o to, které prvky mají poruchu. Počet stavů soustavy a počet diferenciálních rovnic se tím zmenší z 2^n na $n+1$. Zjednodušení ukážeme na předchozím příkladě. Stavy $X\overline{Y}$, $\overline{X}Y$ sloučíme do jediného stavu $X\overline{Y} + \overline{X}Y$.



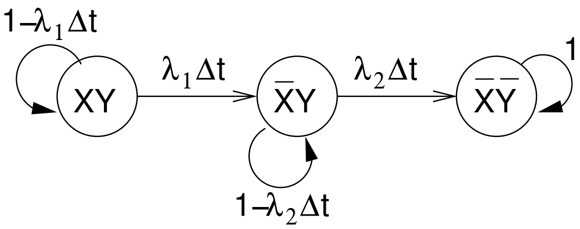


Ze stavu XY do stavu $X\overline{Y} + \overline{X}Y$ se lze dostat buď poruchou prvku X nebo poruchou prvku Y, proto pravděpodobnosti přechodu sčítáme. Ze stavu $X\overline{Y} + \overline{X}Y$ do stavu $\overline{XY}$ se dostane v případě, že zbylý prvek budu mít poruchu, proto je pravděpodobnost přechodu rovna $\lambda\Delta t$ (pouze jeden z nich může mít poruchu). Snadno lze nahlédnout, že aby došlo k zjednodušení musejí být intenzity ze stavů $\overline{X}Y$ nebo $X\overline{Y}$ do $\overline{XY}$ stejné. Intenzity ze stavu XY do stavu $\overline{X}Y$ a $X\overline{Y}$ mohou být různé.

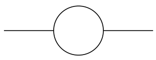
▶ **Příklad 3 (Zálohování s přepínáním)** *Mějme soustavu se zálohováním přepínáním, prvek v záloze nestárne. Při poruše prvku X dojde k přepnutí na prvek Y. U prvku Y tedy nenastane porucha dříve než u prvku X. Intenzita poruchy prvku X je λ_1 a intenzita poruchy prvku Y je λ_2. Nakreslete Markovův graf.*



Řešení:

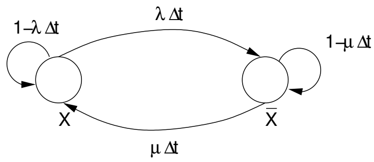


► **Příklad 4 (Soustava s opravou)** *Mějme jednoprvkovou soustavu s opravou. Porucha nastává s intenzitou λ a porouchaný prvek je opraven s intenzitou μ. Nakreslete Markovův graf, sestavte matici intenzit a vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu a pravděpodobnost poruchy $P_x(t) =?$ a $P_{\overline{x}} =?$ pro počáteční podmínky $P_x(0) = 1$ a $P_{\overline{x}}(0) = 0$.*



μ ... *oprava*
λ ... *porucha*

Řešení:



$$\begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_{\overline{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_{\overline{x}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} P_x \\ P_{\overline{x}} \end{bmatrix}$$

výpočet vlastních čísel $det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}) = 0$:

$$\begin{bmatrix} -\lambda - s & \mu \\ \lambda & -\mu - s \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow s(s + \lambda + \mu) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} s_1 = -(\lambda + \mu) \\ s_2 = 0 \end{array}$$

výpočet vlastních vektorů

s_1 :

$$\begin{bmatrix} -\lambda + \mu + \lambda & \mu \\ \lambda & -\mu + \mu - \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mu & \mu \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t.$$

s_2 :

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda}{\mu} \end{bmatrix} t.$$

$$\begin{aligned} P_x(t) &= C_1 e^{-(\mu+\lambda)t} + C_2 \\ P_{\overline{x}}(t) &= -C_1 e^{-(\mu+\lambda)t} + C_2 \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

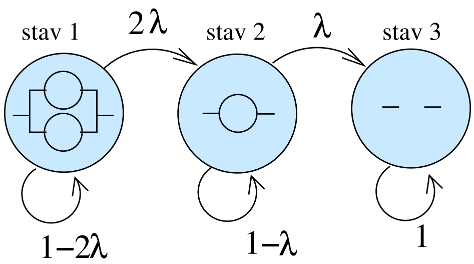
Počáteční podmínky $P_{\overline{x}}(0) = 0$ a $P_x(0) = 1$.

$$
\begin{aligned}
P_x(t) &= \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\mu}{\mu+\lambda} \\
P_{\overline{x}}(0) &= -\frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}.
\end{aligned}
$$

► **Příklad 5** *Máme paralelní systém se dvěma prvky, pričemž poruchy obou prvků podléhají exponenciálnímu rozdělení s parametrem $\lambda = 0.01$. Sestavte Markovův model pro tuto soustavu. Odvoďte pravděpodobnosti v jednotlých stavech. Určete střední dobu bezporuchového provozu.*

Řešení:

Uvažujeme tři stavy: a) oba prvky funkční, b) jeden prvek rozbitý (a druhý funkční), c) oba prvky rozbité Soustava funguje tehdy, pokud funguje alespoň jeden prvek (čemuž odpovídají stavy 1 a 2).



Model lze popsat soustavou Matice intenzit je

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{p_1}(t) \\ \dot{p_2}(t) \\ \dot{p_3}(t) \end{bmatrix} &= \mathbb{P} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 2\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Řešení této soustavy je

$$
\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} = c_1 \vec{v_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v_2} e^{\lambda_2 t} + c_3 \vec{v_3} e^{\lambda_3 t},
$$

kde $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_3}$ jsou vlastní vektory matice intenzit $\mathbb{P}$, a $\lambda_1, \ldots, \lambda_3$ jsou odpovídající vlastní čísla, a $c_1, \ldots, c_3$ jsou konstanty. Vlastní vektory a vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -2\lambda$, $\vec{v_1} = [1, -2, 1]^T$ $\lambda_2 = -\lambda$, $\vec{v_2} = [0, 1, -1]^T$ $\lambda_3 = 0$, $\vec{v_3} = [0, 0, 1]^T$.

Pravděpodobnosti výskytu jednotlivých stavů jsou:

$$
\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2\lambda t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-\lambda t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0t}
$$

Počáteční podmínky jsou: $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = p_3(0) = 0$ (systém startuje ve funkčním stavu (ve stavu 1)). Z těchto počátačních podmínek lze určit konstatny:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2\lambda 0} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda 0} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{0t} \\
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vyjde $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$.

Pravděpodobnosti v jednotlivých stavech jsou tedy popsány

$$\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2\lambda t} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\lambda t} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Spolehlivost soustavy je pravděpodobnost, že je soustava v 1. nebo 2. stavu

$$R(t) = p_1(t) + p_2(t) = \mathrm{e}^{-2\lambda t} - 2\mathrm{e}^{-2\lambda t} + 2\mathrm{e}^{-\lambda t} = 2\mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-2\lambda t},$$

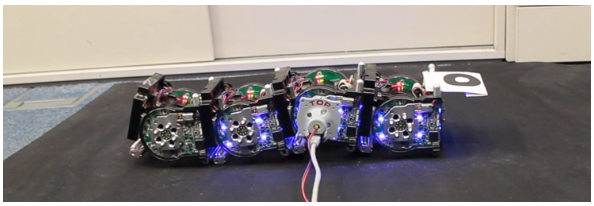
což je zároveň pravděpodonost bezporuchového provozu paralelní soustavy se dvěma stejnými prvky.

Střední doba bezporuchového provozu tohoto systému je

$$T_s = \int_0^\infty R(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(2\mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-2\lambda t}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2\lambda}.$$

▶ **Příklad 6** *Modulární robot typu "had"je složen ze 4 modulů. Krajní moduly (označené k) jsou vybaveny kamerou a mohou tak sloužit k navigace směrem k napájecím zásuvkám. Robot je schopen pohybovat se v prostředí i bez těchto modulů, ale pro navigaci směrem k napájecím zásuvkám (=zdroj energie) je nezbytný alespoň jeden k-modul. Moduly jsou dvou-stavové (funfuje/nefunguje). Vytvořte Markovův graf a určete*

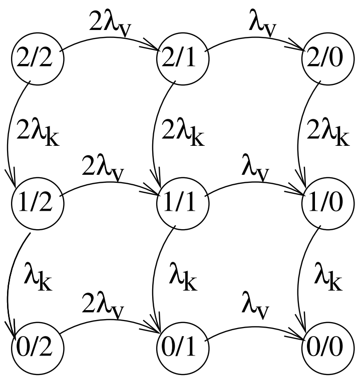
- *Jaká je pravděpodobnost, že se robot může hýbat (musí být funkční alespon 2 moduly)?*
- *Jaká je pravděpodobnost, že robot může dosáhnout zásuky (musí být funkční alespoň 2 moduly a alespoň jeden z nich musí být k-modul)?*



K	V	V	K

Řešení:

V tomto případě stačí rozlišovat mezi vnitřními v-moduly a krajními moduly k-moduly. Každý stav Markova grafu bude obsahovat počet funkčních modulu každého typu, stavy označíme stylem "počet k-modulů/ počet v-modulů", např. stav 2/1 značí, že fungují 2 krajní roboty a 1 vnitřní robot. Graf pak bude vypadat takto:



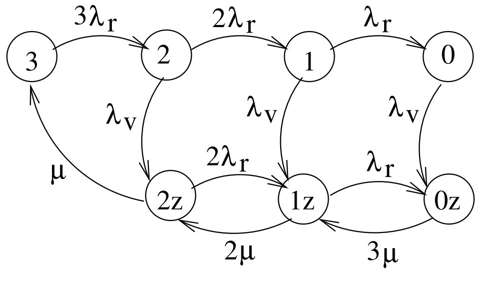
Pravděpodobnost, že se robot hýbe: $P(t) = P_{2/2}(t) + P_{2/1}(t) + P_{2/0}(t) + P_{1/2}(t) + P_{1/1}(t) + P_{0/2}(t)$. Pravděpodobnost, že může dosáhnout zásuvky: $P(t) = P_{2/2}(t) + P2/1(t) + P_{2/0}(t) + P_{1/2}(t) + P_{1/1}(t)$

► **Příklad 7** *V místnosti jsou tři radiátory (λ_r je intenzita poruchy jednoho radiátoru). Do místnosti chodí vrátný. V případě, že je některý radiátor rozbitý, provede záznam v knize závad. Tuto knihu čte opravář a v případě, kdy je v knize záznam, jde do místosti radiátory opravit.*

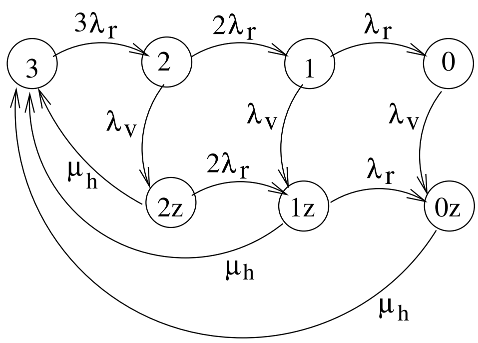
- *Sestavte Markovův graf pro případ, že opravář opravuje radiátory postupně s intenzitou μ*
- *Sestavte Markovův graf s uvažováním hromadných oprav (s intenzitou μ_h).*

Řešení:

Není třeba rozlišovat mezi jednotlivými radiátory, můžeme tedy jen počítat, kolik je funkčních a kolik rozbitých. Označíme stavy buď jen číslem, které vyjadřuje počet funkčních radiátorů, nebo přidáme 'z', což značí, že jsou existuje záznam v knize závad. Např. $2z$ označuje stav, ve které jsou 2 radiátory funkční a existuje záznam v knize závad.
Poznámky:
1. při postupných opravách (levý obrázek) se zvyšuje pravděpodobnost opravy při více rozbitých radiátorech (3μ, 2μ), což lze interpretovat tak, že pravděpodobnost, že opravář přijde do místnosti je závislá na počtu záznamů (relevantních k dané místnosti) v knize závad.
2. při hromadné opravě jsou vyměněny všechny rozbité radiátory najednou, pravděpodobnost opravy je tedy nezávislá na jejich počtu (proto jsou na hranách pouze μ_h).



Postupné opravy



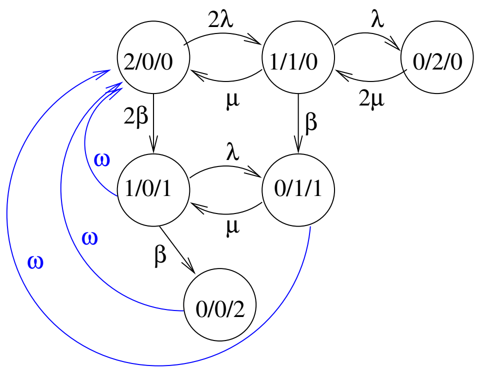
Hromadné opravy

▶ **Příklad 8** *Jedinou možností pro útěk z vězení je ventilační šachta, ve které jsou umístěny dva ventilátory. Utéci lze pouze v případě, kdy oba ventilátory stojí. Každý z ventilátorů se s intenzitou λ, nezávisle na druhém ventilátoru zastavuje a poté se s intenzitou μ zase rozeběhne (zastavování a rozběh je dáno potřebou regulovat výměnu vzduchu v celách na základě teploty a obsahuje CO_2). Běžící ventilátor se může s intenzitou β porouchat, tj. trvale zastavit. Ventilátory jsou opravovány technikem, který s intenzitou ω opraví všechny porouchané ventilátory najednou.*

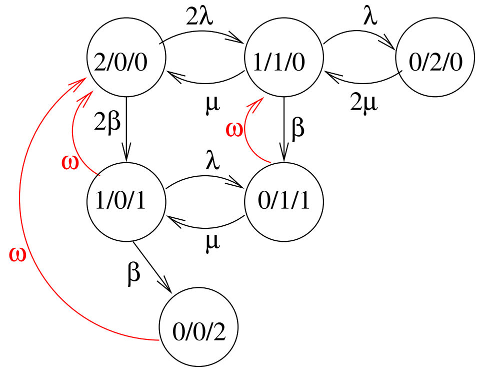
- *Sestrojte Markovův graf.*
- *Napiště soustavu diferenciálních rovnic.*
- *Vyjádřete pravděpodobnost, že je jeden ventilátor funkční (tj, že běží).*
- *Jaká je pravděpodobnost, že je vězňům podaří utéct ventilační šachtou, pokud víme, že pravděpodobnost útěku z areálu veznice je $p_{\text{utek}} = 0.01$?*

Řešení:

Před řešením je dobré si ujasnit, jaké stavy může jeden ventilátor nabývat: buď je funkční a beží (fouká vzduch), nebo je funkční a je pozastaven (nefouká vzduch), nebo je rozbitý. Ventilátor, který je funkční, ale nefouká, se nemuže rozbít. Opravář opravuje jen rozbité ventilátory, tedy ne ty pozastavené.
K řešení můžeme přistoupit buď tak, že budeme mezi ventilátory rozlišovat, nebo budeme pouze uvažovat počet ventilátorů v daném stavu. Druhý způsob vede na menší počet stavů a současně stačí k zodpovězení otázek, proto jej použijeme. Stavy budeme značit $(A/B/C)$, kde A je počet běžících ventilátorů, B je počet pozastavených a C je počet rozbitých.
Ze zadání není jasné, jak se s opravenými ventilátory naloží. Můžeme tedy uvažovat dvě situace: a) po opravě budou oba dva ventilátory zapnuty (budou foukat), b) po opravě se zapne jen ten, který byl před opravou zapnut. Těmto uvažovaným scénářům odpovídají následující grafy:



Sitauce a

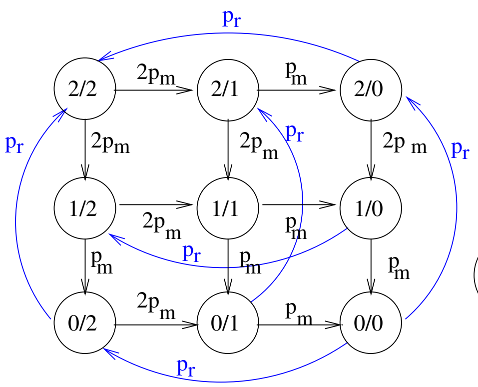


Sitauce b

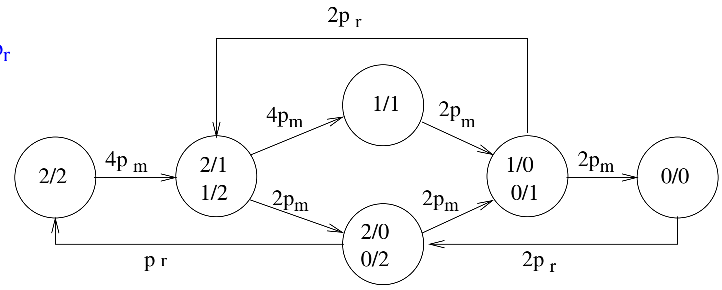
Pravděpodobnost, že je jeden ventilátor funkční je pak pravděpodobnost stavů $P_{1/1/0}(t) + P_{1/0/1}(t) + P_{0/1/1}(t)$.
Vězni mohou ventilační šachtou utéct pouze tehdy, stojí-li oba ventilátory, což nastane s pravděpodobností $P_{0/2/0}(t) + P_{0/1/1}(t) + P_{0/0/2}(t)$. Tato pravděpodobnost však vyjadřuje jen možnost úniku šachtou. Vezni mohou uniknout z celého vezení s pravděpodobností: $(P_{0/2/0}(t) + P_{0/1/1}(t) + P_{0/0/2}(t)) \cdot P_{\text{utek}}$.

▶ **Příklad 9** *Povrch Marsu brázdí statečné marsovské vozítko FEL, které je poháněno dvěma pásy (levým a pravým), přičemž každý pás je ovládán dvěma motory. Každý motor je zodpovědný za pohyb jedním směrem (tj. pokud fungují oba motory, pás může konat dopředný i zpětný pohyb; pokud funguje jen jeden motor, pás může konat jen ten pohyb, který odpovídá funčknímu motoru). Pravděpodobnost poruchy jednoho motoru je p_m. V případě, že pás nelze ovládat (tj. oba motory daného pásu jsou rozbité), zkouší vozítko resetovat řídicí desku rozbitého pásu. To se s pravděpodobností p_r povede a v takovém případě jsou oba motory zase funkční.*

- *Sestrojte Markovův graf tak, abyste dokázali odpovědět na následující otázky:*
- *Jaká je pravděpodobnost, že ani jeden z pásů se nemůže hýbat?*
- *Jaká je pravděpodobnost, že se jeden pás může hýbat oběma směry, zatímco druhý jenom jedním směrem?*



Rozlišujeme levý/pravý pás



Sloučené stavy

Řešení:

Model lze vytvořit dvěma způsoby:

- Budeme rozlišovat jednotlivé pásy. V tom případě použijeme zápis A/B, kde A je počet funkčních motorů na levém pásu a B vyjadřuje počet funkčních na pravém pásu. Tomuto modelu odpovídá graf vlevo. V tomto přístupu je stav "2/1"jiný, než stav "1/2".

- Nebudeme rozlišovat mezi pásy, tedy např. stavy 2/1 a 1/2 budou stejné. Tohoto modelu můžeme dosáhnout sloučením příslušných stavů předchozího modelu. Model je na obr. vpravo. Všimněte si, že přechody do sloučených stavů jsou mají vyšší ohodnocení, jelikož se do nich můžeme dostat z vícero vstupních stavů. Např.

Oba modely jsou zakresleny bez zpětných smyček.

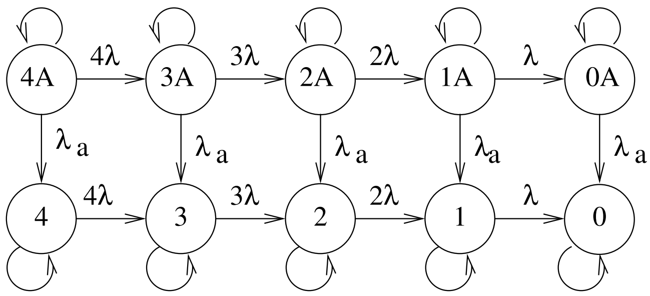
Jaká je pravděpodobnost, že ani jeden z pásů se nemůže hýbat? V případě obou modelů je odpověd $P_{0/0}(t)$, což je pravděpodobnost stavu 0/0.

Jaká je pravděpodobnost, že se jeden pás může hýbat oběma směry, zatímco druhý jenom jedním směrem? V případě prvního modelu, který rozlišuje mezi levým a pravým pásem, je

odpoveď: $P_{1/2}(t) + P_{2/1}(t)$. Odpoveď na základě druhého modelu je $P_{2/1\,1/2}(t)$.
Tyto pravděpodobnosti bychom získali řešením soustavy rovnic.

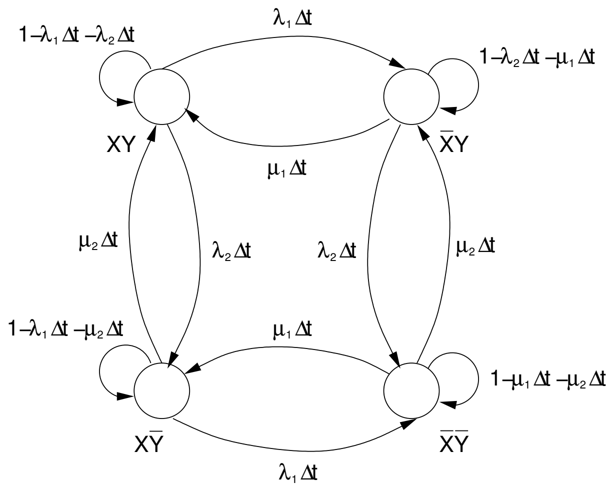
- **Příklad 10 (Markovovy modely)** *Mějme systém s 5 ventilátory (A, B, C, D, E). Aby systém fungoval musí fungovat alespoň 3 ventilátory. Pro správnou funkčnost je také nutný bezporuchový stav ventilátoru A. Intenzita poruch ventilátoru A je λ_A, ostatní ventilátory mají intenzitu poruch stejnou (λ).*

Řešení:



- **Příklad 11 (Markovovy modely)** *Mějme dva prvky v paralelní záloze. Jeden prvek je novější s intenzitou poruch λ_1, druhý prvek je starší a intenzita poruchy je $\lambda_2 > \lambda_1$. Protože prvky vyžadují pro opravu speciální školení, opravuje každý prvek jeden specializovaný opravář. První prvek chodí opravovat opravář s intezitou μ_1. Druhý opravář chodí kontrolovat druhý prvek s intenzitou μ_2. Nakreslete příslušný markovovův graf a napište soustavu diferenciálních rovnic.*

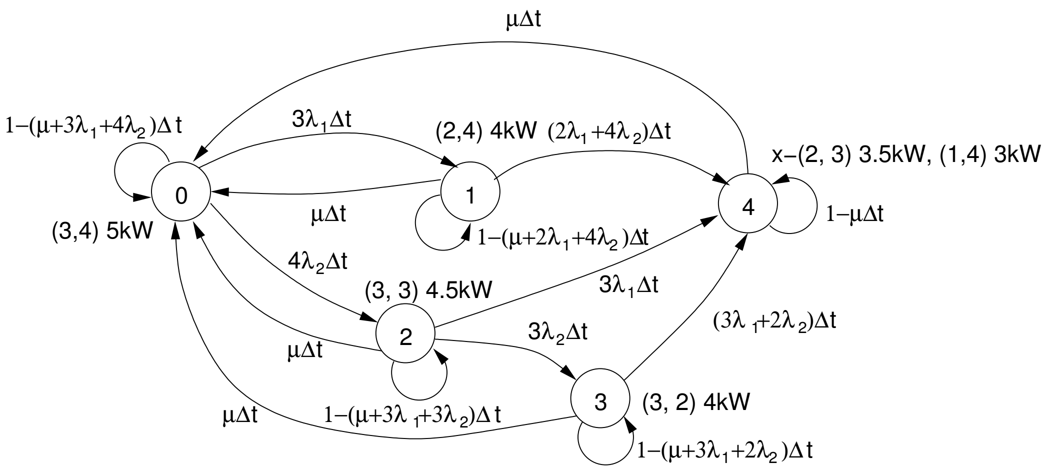
Řešení:



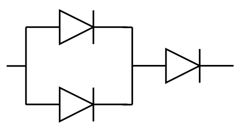
$$\begin{bmatrix} \dot P_{XY}(t) \\ \dot P_{\overline{X}Y}(t) \\ \dot P_{X\overline{Y}}(t) \\ \dot P_{\overline{XY}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1-\lambda_2 & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2-\mu_1 & 0 & \mu_2 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_1-\mu_2 & \mu_1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & -\mu_1-\mu_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{XY}(t) \\ P_{\overline{X}Y}(t) \\ P_{X\overline{Y}}(t) \\ P_{\overline{XY}}(t) \end{bmatrix}$$

▶ **Příklad 12 (Markovovy modely)** *Výrobní hala je osvětlena 3 reflektory 1kW s intenzitou poruch λ_1 a 4 reflektory 500W s intenzitou poruch λ_2. Reflektory jsou hromadně opravovány s intenzitou μ (celková doba opravy je zanedbatelně malá k době provozu). Nakreslete markovovův graf a napište k němu příslušnou soustavu rovnic, ze které bude možné vyjadřit pravděpodobnost, že hala je osvícena reflektory o celkovém příkonu alespoň 3.9kW. Tuto pravdwpodobnost symbolicky vyjádřete (soustavu nepočítejte).*

Řešení:

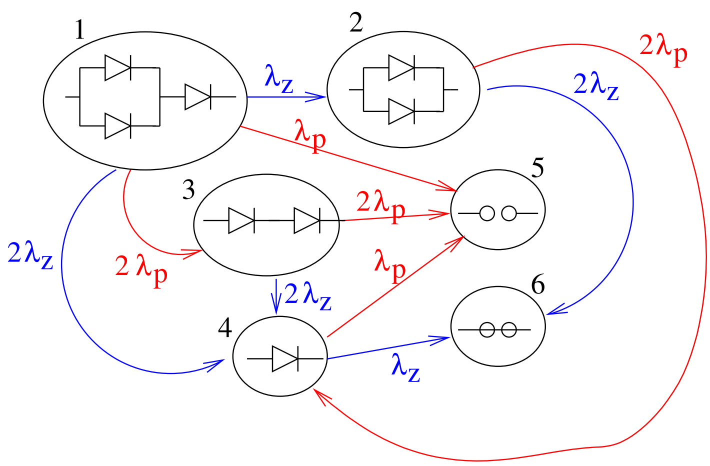


▶ **Příklad 13** *Pro obvod se třístavovými diodami vytvořete Markovův model. Intenzita přerušení je λ_p a intenzita zkratu je λ_z. Jaká je pravděpodobnost, že se obvod chová jako dioda?*



Řešení:

Pro každou diodu určíme, jak se obvod bude chovat po zkratu nebo přerušení této diody. Stavy značíme pro jednoduchost schématem vzniklého obvodu. Zpětné smyčky nejsou zaresleny.



Stavy 1,2,3 a 4 odpovídají tomu, že se obvod chová jako dioda. Pravděpodobnost tedy je $P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)+P_4(t)$. Pravděpodobnosti $P_i(t)$ bychom dostali řešením soustavy rovnic.

► **Příklad 14** *Letecká společnost má dvě nákladní letadla (inzenzita poruch jednoho letadla je λ_n), a dvě osobní letadla (intenzita poruch je λ_o). Sestavte Markovův graf.*

Řešení: Stavy značíme X/Y, kde X je počet funkčních osobních letadel a Y je počet funkčních nákladních letadel. Pozor, stavy nelze slučovat (např. 2/0 a 0/2), neboť inzenzita poruch se liší pro osobní a nákladní letadla!.