Statistika a spolehlivost v lékařství
Spolehlivost soustav

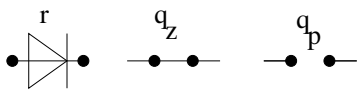
1 Soustavy s více stavy prvků

Některé prvky (např. relé, ventily) slouží jako spínače proudu/kapalin/plynu a mohou se porouchat buď v otevřeném nebo zavřeném stavu. Tyto dvě poruchy je vhodné rozlišovat, neboť mají vliv na celou soustavu. Používáme tři stavy:

- **bezporuchový** — prvek funguje. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme r.
- **porucha zkratem** — prvek se porouchal, když byl otevřený. Důsledek této poruchy je, že proud/kapalina/plyn může stále prvkem procházet. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme q_z.
- **porucha přerušením** — prvek se porouchal ve stavu, kdy byl zavřený. Takto porouchaný prvek tedy už nemůže sepnout. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme q_p.

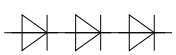
Tyto tři stavy se vylučují, tedy $r + q_z + q_p = 1$.

Velkými písmeny značíme pravděpodobnosti celých soustav, tedy R je pravděpodobnost, že je celá soustava bezporuchová, Q_z je pravděpodobnost, že se celá soustava chová jako zkrat a Q_p je pravděpodobnost, že je celá soustava přerušená. V následujících příkladech budeme třístavové prvky studovat na příkladu diod.



Sériové zapojení třístavových prvků: Stavy jednotlivých prvků určují i celkový stav soustavy. Ta se může nacházet ve stavu zkrat (tj. celá soustava se chová jako jeden vyzkratovaný prvek). V tomto stavu celá soustava vede trvale proud a nelze ji ovládat. Soustava se může také nacházet ve stavu přerušení. V takové případě soustavu nelze vést proud/kapalinu/plyn. Pokud soustava není ani ve stavu zkrat ani ve stavu přerušení tak říkáme, že soustava funguje.

Uvažujme soustavu se třemi stejnými prvky:



Soustava je přerušená, pokud alespoň jeden prvek je přerušený. Pravděpodobnost, že je soustava přerušená je

$$Q_p = 1 - (1 - q_p)^3.$$

Soustava je ve stavu zkrat, pokud všechny prvky jsou ve stavu zkrat. Pravděpodobnost, že celá soustava je ve stavu zkrat je

$$Q_z = q_z^3.$$

Soustava je funkční, pokud není prerušená. Zkraty některých prvků nevadí, stačí, aby v cestě byl vždy alespoň jeden funční prvek. Mohou nastat různé kombinace zkratů prvků. Pro tři prvky je pravděpodobnost bezporuchového provozu R:

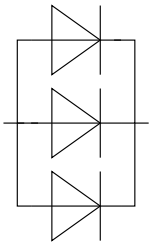
$$R = 3q_z r^2 + 3r^2 q_z + p^3.$$

Ověření: $R + Q_z + Q_p = 1$.

Pro obecný počet n sériově zapojených prvků stačí, aby alespoň jeden z nich byl dioda, a ostatní mohou být zkratované:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} r^i q_z^{n-i}.$$

Paralelní zapojení třístavových prvků. Uvažujme obvod se třemi identickými prvky.



Paralelní soustava třístavových prvků je celá přerušená, pokud všechny prvky současně jsou přerušené. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$Q_p = q_p^3$$

Aby byla celá soustava ve stavu zkrat (tj. celou soustavu mohl trvalé téct proud), stačí, aby alespoň jeden prvek byl ve stavu zkrat. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$Q_z = 1 - (1 - q_z)^3$$

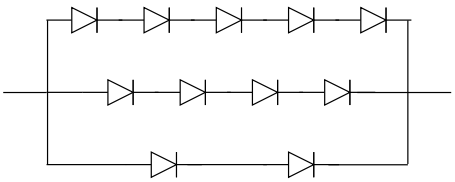
Celá soustava je funkční, pokud se chová jako dioda — tj. není ve stavu přerušení nebo ve stavu zkratu. Přerušení jednotlivých prvků nevadí, ale musí být zajištěno, že alespoň jeden prvek je funkční. Tedy:

$$R = r^3 + 3q_p r^2 + 3q_p^2 r$$

Pro n paralelně zapojených prvků stačí, aby alespoň jeden byl ve stavu dioda, ostatní mohou být přerušené:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} r^i q_p^{n-i}$$

▶ **Příklad 1** *Spočítejte pravděpodobnost, že se soustava diod na obrázku chová jako dioda, za předpokladu že pravděpodobnost přerušení jedné diody je* $q_p = 0.2$ *a pravděpodobnost zkratu je* $q_z = 0.05$.



Řešení:

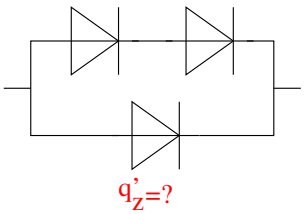
Budeme postupovat tak, že nejprve spočteme, že se celá soustava chová jako zkrat a jako přerušení. Paralelní soustava je přerušená tehdy, pokud jsou ve stavu přerušení všechny tři větve:

$$Q_p = \left(1-(1-q_p)^5\right)\cdot\left(1-(1-q_p)^4\right)\cdot\left(1-(1-q_p)^2\right) = 0.143$$

$$Q_z = q_z^5 + q_z^4 + q_z^2 - q_z^{5+4} - q_z^{4+2} - q_z^{5+2} + q_z^{11} = 2.5\cdot 10^{-3}$$

$$R = 1 - Q_p - Q_z = 0.8545$$

▶ **Příklad 2** *Soustava na obrázku je složena ze dvou typů diod: diody v horní řadě mají parametry* $q_p = 0.01$, $q_z = 0.2$, *spodní dioda má pravděpodobnost přerušení* $q'_p = 0.3$. *Vypočítejte, jaká musí být pravděpodobnost zkratu spodní diody* q'_z *tak, aby pravděpodobnost, že se celý obvod chová jako diody byla* $R = 0.9$.



Řešení:

Nejprve spočítáme horní větev:

$$\begin{aligned} Q_{p,horni} &= 1-(1-q_p)^2 = 1-(1-0.01)^2 = 0.0199 \\ Q_{z,horni} &= p_z^2 = 0.2^2 = 0.04. \end{aligned}$$

Nyní určíme pravděpodobnost zkratu a přerušení paralelní kombinace:

$$\begin{aligned} Q_p &= Q_{p,horni}\cdot q'_p = 0.0199\cdot 0.3 = 0.00597 \\ Q_z &= 1-(1-Q_{z,horni})(1-p'_z) = 1-(1-0.04)(1-q'_z) = 1-0.96(1-q'_z) \end{aligned}$$

Ze zadání víme, že $R = 0.9$ a to je zároveň: $R = 1 - Q_p - Q_z$.
Dosadíme a najdeme hodnotu q'_z

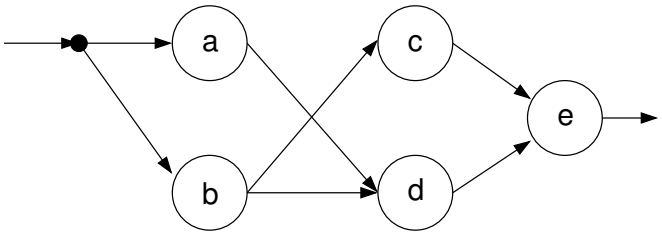
$$R = 1 - Q_p - Q_z = 1 - 0.00597 - (1 - 0.96(1-q'_z))$$

Vyjde $q'_z = 0.056$.

2 Kombinované soustavy

▶ **Příklad 3 (Metoda seznamu)**

$$a) \quad P(a) = \frac{3}{4};\ P(b) = \frac{5}{6};\ P(c) = P(d) = \frac{2}{3};\ P(e) = \frac{7}{8}; R = ?$$
$$b) \quad P(a) = P(b) = \ldots = P(e) = p; R = ?$$



Řešení:

1.	a	b	c	d	e	+	5.	a	$\overline{b}$	c	d	e	+	9.	$\overline{a}$	b	c	d	e	+			
2.	a	b	c	$\overline{d}$	e	+	6.	a	$\overline{b}$	c	$\overline{d}$	e		10.	$\overline{a}$	b	c	$\overline{d}$	e	+			
3.	a	b	$\overline{c}$	d	e	+	7.	a	$\overline{b}$	$\overline{c}$	d	e	+	11.	$\overline{a}$	b	$\overline{c}$	d	e	+	$\ldots$		
4.	a	b	$\overline{c}$	$\overline{d}$	e		8.	a	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{d}$	e		12.	$\overline{a}$	b	$\overline{c}$	$\overline{d}$	e				

$$R = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) + P(A_9) + P(A_{10}) + P(A_{11})$$

vzájemně vylučující se jevy, pravděpodobnosti mohu sčítat

$$\begin{aligned} R &= P(A_1) + P(A_2) + \ldots \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} + \ldots \\ &= 0,6563. \end{aligned}$$

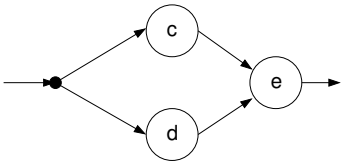
V případě, že jsou prvky stejné, je řešení:

$$R = p^5 + 4p^4(1-p) + 3p^3(1-p)^2 = p^5 + 4p^4 - 4p^5 + 3p^3 - 6p^4 + 3p^5 = -2p^4 + 3p^3 = p^3(3-2p).$$

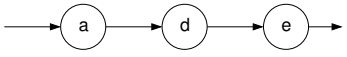
▶ **Příklad 4 (Metoda rozkladu)** *zadání viz předchozí příklad, všechny prkvy jsou stejné* $(P(a) = P(b) = \ldots = P(e) = p)$.

Řešení:

$$R = P(b) \cdot P(\textit{soustava funguje}|b) + P(\overline{b}) \cdot P(\textit{soustava funguje}|\overline{b})$$



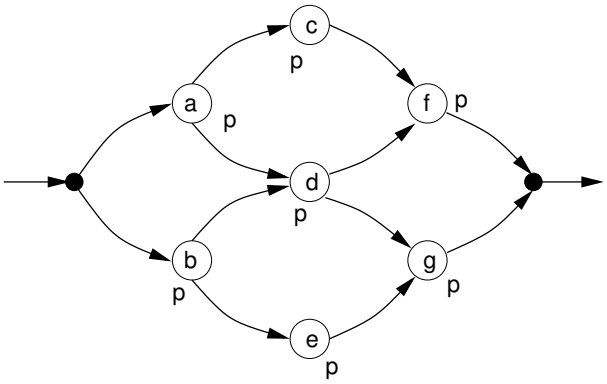
$P(\textit{soustava funguje}|b)$



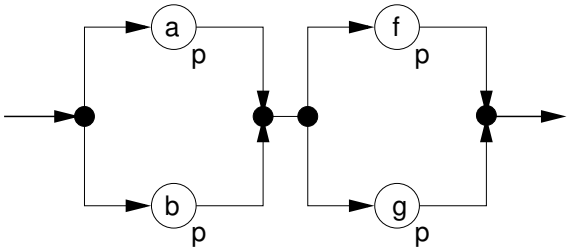
$P(\textit{soustava funguje}|\overline{b})$

$$R = p \cdot (1 - (1-p)^2) \cdot p + (1-p) \cdot p^3 = 2p^3 - p^4 + p^3 - p^4 = p^3 \cdot (3 - 2p).$$

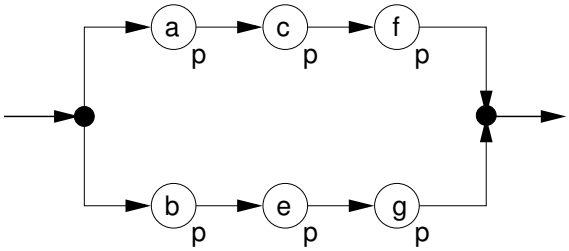
▶ **Příklad 5 (Kombinované soustavy - metoda rozkladu)** $R = ?$



Řešení:



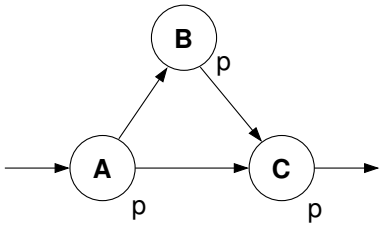
$P(soustava\ funguje|d)$



$P(soustava\ funguje|\overline{d})$

$$\begin{aligned} R &= P(d) \cdot P(soustava|d) + P(\overline{d}) \cdot P(soustava|\overline{d}) \\ &= p \cdot \left[1 - (1-p^2)\right]^2 + (1-p) \cdot \left[1 - (1-p^3)\right]^2 \\ &= p \cdot (4p^2 - 4p^3 + p^4) + (1-p) \cdot (2p^3 - p^6) \\ &= p^5 - 4p^4 + 4p^3 + p^7 - p^6 - 2p^4 - 2p^3 \\ &= p^7 - p^6 + p^5 - 6p^4 + 6p^3 \end{aligned}$$

▶ **Příklad 6 (Soustavy)** $R = ?$



Řešení:

$$R = P(AC \cup ABC) = P(AC) + P(ABC) - P(ABC) = P(AC) = p^2$$