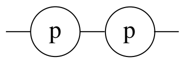
Statistika a spolehlivost v lékařství
Spolehlivost soustav

3. května 2016

1 Spolehlivost soustav

Předpoklad: každý prvek i každá soustava se nacházejí vždy v jednom ze stavů : **bezporuchovém stavu** nebo **ve stavu poruchy**.

▶ **Příklad 1 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sériová soustava)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy, R = ? Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p, prvky jsou stejné.*



Řešení:

Pravděpodobnost poruchy jednoho prvku: $q = 1 - p$.
Pravděpodobnost bezporuchového provozu celé soustavy — oba prvky musí fungovat:

$$R = P(X_1 \bigcap X_2) = P(X_1|X_2) \cdot P(X_2) = P(X_1) \cdot P(X_2) = p^2$$

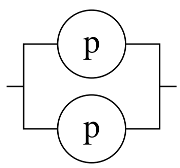
Pravděpodobnost poruchy celé soustavy — alespoň jeden prvek je v poruše:

$$Q = 1 - R = P(\overline{X_1} \bigcup \overline{X_2}) = P(\overline{X_1}) + P(\overline{X_2}) - P(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2}) = 2(1-p) - (1-p)^2 = 1 - p^2$$

Obecné vztahy R, Q, pro n stejných prvků:

$$\begin{aligned} R &= p^n \\ Q &= 1 - p^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (1-p)^i \end{aligned}$$

▶ **Příklad 2 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - paralelní soustava)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p, prvky jsou stejné.*



Soustava funguje, pokud alespoň jeden prvek funguje, tedy

$$R = P(X_1 \bigcup X_2) = 1 - Q = P(X_1) + P(X_2) - P(X_1 \cdot X_2) = 2p - p^2.$$

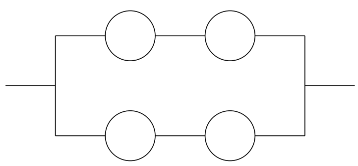
Naopak, soustava je v poruše, pokud všechny prvky jsou současně rozbité:

$$Q = P(\overline{X_1} \bigcap \overline{X_2}) = (1-p)(1-p) = 1 - 2p + p^2.$$

Obecné vztahy R, Q, pro n stejných prvků:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} p^i \\ Q &= (1-p)^n \end{aligned}$$

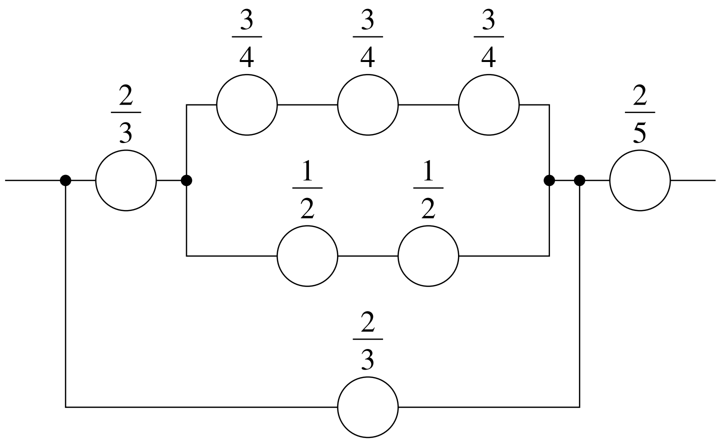
▶ **Příklad 3 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sérioparalelní soustava)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy. Pravděpodobnost bezporuchového provozu jednoho prvku je p, všechny prvky jsou stejné.*



Řešení:

$$\begin{aligned} R &= 2p^2 - p^4, \\ Q &= (1-p^2)(1-p^2) = 1 - 2p^2 + p^4. \end{aligned}$$

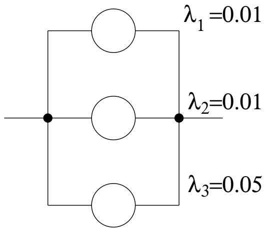
▶ **Příklad 4 (Pravděpodobnost bezporuchového provozu - sérioparalelní)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy.*



Řešení:

$$R = \left\{1 - \left[1 - \left(1 - \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3\right] \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\right) \cdot \frac{2}{3}\right] \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)\right\} \cdot \frac{2}{5} = \frac{913}{2888} = 0,317.$$

► **Příklad 5 (Paralelní soustava se třemi prvky)** *Vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy na Obr. 1 složené z prvků se známými intenzitami poruch. (Pravděpodobnost počítejte v čase t=50.)*



Obrázek 1:

Řešení:

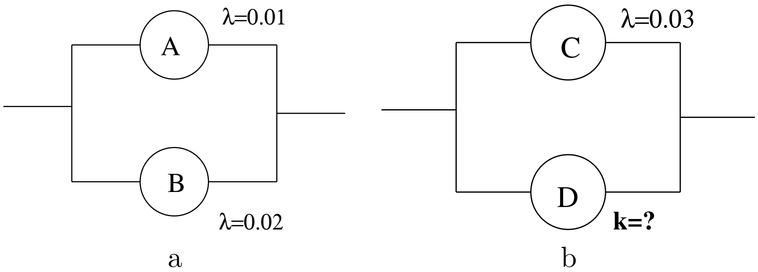
Je nutné si uvědomit že pravděpodobnost bezporuchového provozu je funkce času – budeme hledat pravděpodobnost v konkrétním čase $t = 50$. Dále je nutné si ujasnit, jakému rozdělení pravděpodobnosti podléhají prvky soustavy. Jejich intenzity jsou zadány jako konstanty a proto se jedná o exponenciální rozdělení poruch. Pro jednotlivé prvky v čase t=50 platí:

$$\begin{aligned} R_1(50) &= e^{-\lambda_1 \cdot 50} = e^{-0,5} = 0,607, \\ R_2(50) &= R_1(50) = e^{-0,5} = 0,607, \\ R_3(50) &= e^{-\lambda_3 \cdot 50} = e^{-2,5} = 0,082. \end{aligned}$$

Pro soustavu potom bude platit

$$R(50) = 1 - [(1 - R_1(50))(1 - R_2(50))(1 - R_3(50))] = 1 - [0,393 \cdot 0,393 \cdot 0,918] = 0,858.$$

► **Příklad 6 (Paralelní soustava se třemi prvky)** *Uvažujme obvody na obr.2. Prvky, jejichž poruchy podléhají exponenciálnímu rozdělení, jsou označeny parametrem λ. Spodní prvek na obr.2 vykazuje poruchy podléhající Rayleighovu rozdělení s parametrem k. Určete tento parametr tak, aby pravděpodobnost bezporuchového provozu obou soustav byla v čase $t = 10$ s stejná.*



Obrázek 2:

Řešení:

Nejprve si spočítáme pravděpodobnost bezporuchového provozu jednotlivých prvků:

$$\begin{aligned} R_A(t) &= e^{-\lambda_A t} \to R_A(10) = e^{-0.01\cdot 10} = 0.904 \\ R_B(t) &= e^{-\lambda_A t} \to R_B(10) = e^{-0.02\cdot 10} = 0.818 \\ R_C(t) &= e^{-\lambda_C t} \to R_C(10) = e^{-0.03\cdot 10} = 0.740 \\ R_D(t) &= e^{\frac{-kt^2}{2}} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu levé soustavy v čase $t = 10$ s je:

$$R_1(10) = R_A(10) + R_B(10) - R_A(10)R_B(10) = 0.904 + 0.818 - 0.904 \cdot 0.818 = 0.983$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu pravé soustavy v čase $t = 10$ s je:

$$R_2(10) = R_C(10) + R_D(10) - R_C(10)R_D(10) = 0.740 + R_D(10) - 0.740 R_D(10)$$

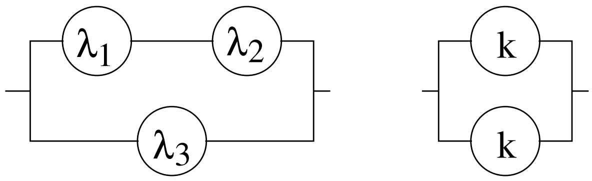
Určíme $R_D(10)$:

$$R_D(10) = \frac{R_2(10) - R_C(10)}{1 - R_C(10)} = \frac{0.983 - 0.740}{1 - 0.740} = 0.934.$$

Teď můžeme vypočítat hodnodu k:

$$R_D(t) = e^{\frac{-kt^2}{2}} \to k = \frac{-2\ln R_D(t)}{t^2} = \frac{-2\ln 0.934}{10^2} = 0.00136.$$

▶ **Příklad 7** *První obvod na obrázku je složen z prvků, jejichž poruchy podléhají exponenciálnímu rozdělení poruch s parametry $\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_2 = 0.02$, $\lambda_3 = 0.03$. Druhý obvod je složen ze dvou prvků, jejichž poruchy lze popsat Rayleighovým rozdělením s parametrem k. Určete k tak, aby pravděpodobnost bezporuchového provozu obou stoustav v čase $t = 10$ byla stejná.*



Řešení:

Nejprve určíte spolehlivost levého obvodu:

$$R_{left}(t) = R_1(t)R_2(t) + R_3(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t)$$

a dosadíme

$$R_1(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \to R_1(10) = \mathrm{e}^{0.01\cdot 10} = 0.905$$

$$R_2(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \to R_2(10) = \mathrm{e}^{0.02\cdot 10} = 0.818$$

$$R_3(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_3 t} \to R_3(10) = \mathrm{e}^{0.03\cdot 10} = 0.741$$

Pravděpodobnost bezporuchového obvodu vlevo je v čase 10:

$$R_{left}(10) = 0.905 \cdot 0.818 + 0.741 - 0.905 \cdot 0.818 \cdot 0.741 = 0.932$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy vpravo (spolehlivost prvků označíme $R_k(t)$) je obecně:

$$R_{right}(t) = R_k(t) + R_k(t) - R_k^2(t) = 2R_k(t) - R_k^2(t)$$

a jelikož má platit $R_{left}(10) = R_{right}(10)$, tak

$$0.932 = 2R_k(10) - R_k^2(10)$$

Dostáváme tedy jednoduchou rovnici s neznámou proměnnou $R_k(10)$:

$$R_k^2(10) - 2R_k(10) + 0.932 = 0$$

která má dva kořeny: 0.739 a 1.26. Správné řešení je 0.739, neboť $R_k(10)$ je pravděpodobnost bezporuchového provozu, tj. číslo v intervalu $< 0, 1 >$. Tato pravděpodobnost je popsána Rayleighovým rozdělení, tedy $R_k(t) = \mathrm{e}^{\frac{-kt^2}{2}}$. Odtud:

$$0.739 = R_k(10)$$

$$0.739 = \mathrm{e}^{\frac{-k10^2}{2}}$$

a tedy

$$k = \frac{-2\ln 0.739}{10^2} = 0.00605.$$

2 Soustava m z n

Mějme soustavu s n prvky, přičemž alespoň m z nich musí správně pracovat, aby celá soustava byla funkční. Pokud jsou prvky shodné a nezávislé, pak lze spolehlivost soustavy popsat binomickým rozdělením.
Pravděpodobnost bezporuchového stavu právě m prvků z n je

$$f(m, n, p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

► **Příklad 8** *Jaká je pravděpodobnost bezporuchového stavu nejméně m prvků z n?*

Řešení:

$$R = \sum_{k=m}^{n} f(k, n, p) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

► **Příklad 9** *Pro kterou soustavu platí, že $m = 1$?*

Řešení:
Paralelní soustava

► **Příklad 10** *Pro kterou soustavu platí, že $m = n$?*

Řešení:
Sériová soustava

▶ **Příklad 11 (Ocelové lano - soustava m z n)** *Ocelové lano má 4 vlákna, správná funkčnost je zajištěná pokud nejsou přetržena alespoň dvě vlákna.* $n = 4$; $m = 2$; *Pravděpodobnost nepřetržení jednoho vlákna je* $p = 0.9$; $R = ?$

Řešení:

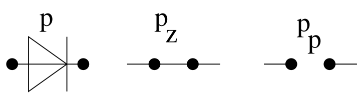
$$R = \binom{4}{2} 0,9^2 \cdot 0,1^2 + \binom{4}{3} 0,9^3 \cdot 0,1 + \binom{4}{4} 0,9^4 = 0,9963.$$

Soustavy s více stavy prvků

Některé prvky (např. relé, ventily) slouží jako spínače proudu/kapalin/plynu a mohou se porouchat buď v otevřeném nebo zavřeném stavu. Tyto dvě poruchy je vhodné rozlišovat, neboť mají vliv na celou soustavu. Používáme tři stavy:

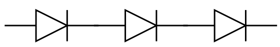
- **bezporuchový** — prvek funguje. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme p.
- **porucha zkratem** — prvek se porouchal, když byl otevřený. Důsledek této poruchy je, že proud/kapalina/plyn může stále prvkem procházet. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme p_z.
- **porucha přerušením** — prvek se porouchal ve stavu, kdy byl zavřený. Takto porouchaný prvek tedy už nemůže sepnout. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme p_p.

Tyto tři stavy se vylučují, tedy $p + p_z + p_p = 1$.
V následujících příkladech budeme třístavové prvky studovat na příkladu diod.



Sériové zapojení třístavových prvků: Stavy jedntlivých prvků určují i celkový stav soustavy. Ta se může nacházet ve stavu zkrat (tj. celá soustava se chová jako jeden vyzkratovaný prvek). V tomto stavu celá soustava vede trvale proud a nelze ji ovládat. Soustava se může také nacházet ve stavu přerušení. V takové případě soustavu nelze vést proud/kapalinu/plyn. Pokud soustava není ani ve stavu zkrat ani ve stavu přerušení tak říkáme, že soustava funguje.

Uvažujme soustavu se třemi stejnými prvky:



Soustava je přerušená, pokud alespoň jeden prvek je přerušený. Pravděpodobnost, že je soustava přerušená je

$$p_p(soustavy) = 1 - (1 - p_p)^3.$$

Soustava je ve stavu zkrat, pokud všechny prvky jsou ve stavu zkrat. Pravděpodobnost, že celá soustava je ve stavu zkrat je

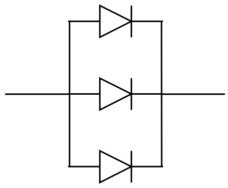
$$p_z(soustavy) = p_z^3.$$

Soustava je funkční, pokud není prerušená. Zkraty některých prvků nevadí, stačí, aby v cestě byl vždy alespoň jeden funční prvek.

$$p(soustavy) = 3p_z p^2 + 3p^2 p_z + p^3.$$

Ověření: $p_p(soustavy) + p(soustavy) + p_z(soustavy) = 1$.

Paralelní zapojení třístavových prvků. Uvažujme obvod se třemi identickými prvky.



Paralelní soustava třístavových prvků je celá přerušená, pokud všechny prvky současně jsou přerušené. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$p_p(soustavy) = p_p^3$$

Aby byla celá soustava ve stavu zkrat (tj. celou soustavu mohl trvalé téct proud), stačí, aby alespoň jeden prvek byl ve stavu zkrat. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$p_z(soustavy) = 1 - (1 - p_z)^3$$

Celá soustava je funkční, pokud se chová jako dioda — tj. není ve stavu přerušení nebo ve stavu zkratu. Přerušení jednotlivých prvků nevadí, ale musí být zajištěno, že alespoň jeden prvek je funkční. Tedy:

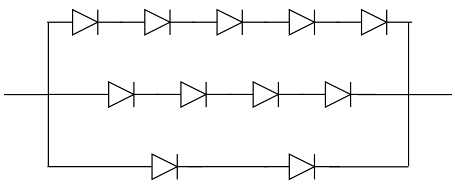
$$p(soustavy) = (1 - p_z - p_p)^3 + 3p_p(1 - p_p - p_z)^2 + 3p_p^2(1 - p_p - p_z)$$

Nebo též:

$$p(soustavy) = p^3 + 3p_p p^2 + 3p_p^2 p.$$

Ověření: $p_p(soustavy) + p(soustavy) + p_z(soustavy) = 1$.

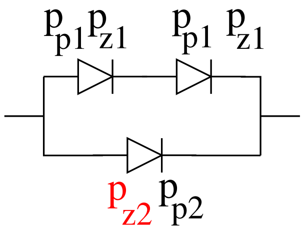
▶ **Příklad 12** *Spočítejte pravděpodobnost, že se soustava diod na obrázku chová jako dioda, za předpokladu že pravděpodobnost přerušení jedné diody je* $p_p = 0.2$ *a pravděpodobnost zkratu je* $p_z = 0.05$.



Řešení:

$$\begin{aligned}
p_p(soustavy) &= \left(1 - (1 - p_p)^5\right) \cdot \left(1 - (1 - p_p)^4\right) \cdot \left(1 - (1 - p_p)^2\right) = 0.143 \\
p_z(soustavy) &= p_z^5 + p_z^4 + p_z^2 - p_z^{5+4} - p_z^{4+2} - p_z^{5+2} + p_z^{11} = 2.5 \cdot 10^{-3} \\
p(soustavy) &= 1 - p_p(soustavy) - p_z(soustavy) = 0.8545
\end{aligned}$$

▶ **Příklad 13** *Soustava na obrázku je složena ze dvou typů diod: diody v horní řadě mají parametry $p_{p1} = 0.01$, $p_{z1} = 0.2$, spodní dioda má pravděpodobnost přerušení $p_{p2} = 0.3$. Vypočítejte, jaká musí být pravděpodobnost zkratu spodní diody p_{z2} tak, aby pravděpodobnost, že se celý obvod chová jako diody byla $p_{celkova} = 0.9$.*



Řešení:

Nejprve spočítáme horní větev:

$$
\begin{aligned}
p_{p,horni} &= 1-(1-p_{p1})^2 = 1-(1-0.01)^2 = 0.0199\\
p_{z,horni} &= p_{z1}^2 = 0.2^2 = 0.04.
\end{aligned}
$$

Nyní určíme pravděpodobnost zkratu a přerušení paralelní kombinace:

$$
\begin{aligned}
p_{p,celkova} &= p_{p,horni}\cdot p_{p2} = 0.0199\cdot 0.3 = 0.00597\\
p_{z,celkova} &= 1-(1-p_{z,horni})(1-p_{z2}) = 1-(1-0.04)(1-p_{z2}) = 1-0.96(1-p_{z2}).
\end{aligned}
$$

Ze zadání víme, že $p_{celkova} = 0.9$ a to je zároveň: $p_{celkova} = 1 - p_{p,celkova} - p_{z,celkova}$. Tedy:

$$
\begin{aligned}
p_{celkova} = 0.9 &= 1 - p_{p,celkova} - p_{z,celkova}\\
0.9 &= 1 - 0.00597 - (1 - 0.96(1-p_{z2}))
\end{aligned}
$$

Odtud $p_{z2} = 0.056$.