Statistika a spolehlivost v lékařství
Charakteristiky spolehlivosti prvků II

1 Rayleighovo rozdělení

Základní charakteristiky:

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= kt \qquad\qquad k>0, t\geq 0\\
R(t) &= \mathrm{e}^{\int kt\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\frac{k}{2}t^2}\\
Q(t) &= 1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}t^2}\\
f(t) &= kt\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}t^2}\\
D &= (2-\tfrac{\pi}{2})\tfrac{1}{k}
\end{aligned}$$

▶ **Příklad 1** *Nalezněte vztah pro výpočet střední doby bezporuchového provozu T_s.*

Řešení: Postup, při kterém bychom se snažili aplikovat *per partes* není shůdný, neboť mocnina t se nesníží. Proto výraz upravíme na vztah $\int \mathrm{e}^{-\frac{kt^2}{2}}$.

$$T_s = \int_0^\infty t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t\frac{\partial(1-R(t))}{\partial t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty t\dot{R}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{ll} u'=\dot{R} & u=R\\ v=t & v'=1\end{array}\right| =$$

$$= -\left[tR(t)\right]_0^\infty + \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t = -\left[t\mathrm{e}^{-\frac{kt^2}{2}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{kt^2}{2}}dt$$

První závorka je nulová pro oba limitní případy ($t\to 0, t\to\infty$). K výpočtu integrálu použijeme následující vztah:

$$N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty N(0,1)\,\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Abychom mohli tento výsledek použít, musíme provést následující substituci: $\left|\begin{array}{l}\sqrt{k}t=a\\ t=\frac{1}{\sqrt{k}}a\\ dt=\frac{1}{\sqrt{k}}da\end{array}\right|$.

Potom

$$T_s = \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{2}}da = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

▶ **Příklad 2** *Jsou dány časy poruch $t_1,\ldots,t_n$, $t_i>0$. Odvoďte metodou maximální věrohodnosti parametr k pro Rayleighovo rozdělení.*

Řešení:

Hustota pravděpodobnosti Rayleighova rozdělení je

$$f(t) = kt\mathrm{e}^{\frac{-kt^2}{2}}$$

Věrohodnostní funkce L je

$$L(k|t_1,\ldots,t_n) = f(t_1)f(t_2)\ldots f(t_n) = k^n(\prod_{i=1}^{n} t_i)\mathrm{e}^{\frac{-k}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2}$$

Hledáme takové $\hat{k}$, které maximalizuje L. Využijeme logaritmus věrohodnostní funkce

$$\log L = n\log k + \log\left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right) - \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial k} = \frac{n}{k} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial k} \stackrel{!}{=} 0$$

a odtud

$$\hat{k} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}.$$

2 Weibullovo rozdělení

Základní charakteristiky:

$$\lambda(t) = \tfrac{m}{t_0}t^{m-1} \qquad m > 0, t_0 > 0, t \geq 0,$$

kde t_0 je tzv. *scale*, normalizační konstanta (časová) a m je bezrozměrný parametr, reprezentující tvar charakteristiky, tzv. *shape* (viz. Obr. 1).

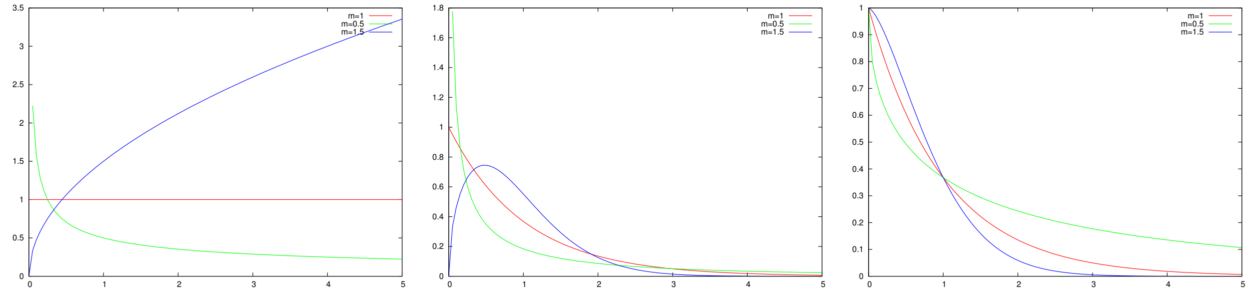
$$\begin{aligned}
R(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{t^m}{t_0}}, \\
Q(t) &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t^m}{t_0}}, \\
f(t) &= \tfrac{m}{t_0}t^{m-1}\mathrm{e}^{-\frac{t^m}{t_0}}, \\
T_s &= t_0^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(\tfrac{1}{m}+1\right), \\
D &= t_0^{\frac{2}{m}}\left[\Gamma\left(\tfrac{2}{m}+1\right) - \Gamma^2\left(\tfrac{1}{m}+1\right)\right],
\end{aligned}$$

kde

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Pro $x \in N$ platí:

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$



Obrázek 1: Příklady Weibullova rozdělení pro různé hodnoty m

Pro $m = 1$ $\rightarrow$ exponenciální rozdělení.
Pro $m = 2$ $\rightarrow$ Rayleighovo rozdělení,
Pro $m < 1$ $\rightarrow$ průběh $\lambda(t)$ klesající průběh, což je vhodné pro popis počátečních fází provozu.

▶ **Příklad 3** *Máme systém s intenzitou poruch danou Weibullovým rozdělením s* $m = \frac{1}{4}$*. Intenzita poruch v čase* $t = 1$ *je* $\lambda(1) = \frac{1}{5}$*. Určete střední dobu poruch tohoto systému.*

Řešení: Nejprve je nutné určit parametr t_0 Weibullova rozdělení:

$$\lambda(1) = \frac{1}{4t_0} 1^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow t_0 = \frac{5}{4}.$$

Střední doba bezporuchového provozu je potom dána

$$T_s = t_0^{1/m} \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^4 \Gamma(5) = \frac{625}{256} 4! = 58.6.$$

▶ **Příklad 4** *Intenzita poruch je popsána funkcí* $\lambda(t) = at^2 + \left(\frac{t}{b}\right)^c$ *kde* $a, b, c > 0$ *jsou parametry a* t *je čas (v hodinách).*

1. *Odvoďte* $R(t)$ *a* $f(t)$*.*
2. *Vypočítejte, jaká je pravděpodobnost poruchy v období od* $t = 10$ *hod do* $t = 11$ *hod, hodnotu vyčíslete pro* $a = 10^{-6}, b = 1000$ *a* $c = 3$*.*

Řešení:

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(\tau)\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-\int_0^t a\tau^2 + \frac{\tau}{b}^c \mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{at^3}{3} + \frac{1}{b^c}\frac{t^{c+1}}{c+1}\right)}$$

$f(t)$ spočítáme jako:

$$f(t) = \frac{-\partial R(t)}{\partial t} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{at^3}{3} + \frac{1}{b^c}\frac{t^{c+1}}{c+1}\right)} \left(at^2 + \frac{t^c}{b^c}\right)$$

Pravděpodobnost poruchy v daném časovém intervalu lze spočítat jako

$$Q(11) - Q(10) = (1 - R(11)) - (1 - R(10)) = R(10) - R(11)$$

nebo

$$Q(11) - Q(10) = \int_{10}^{11} f(t)\mathrm{d}t$$

Po dosazení:

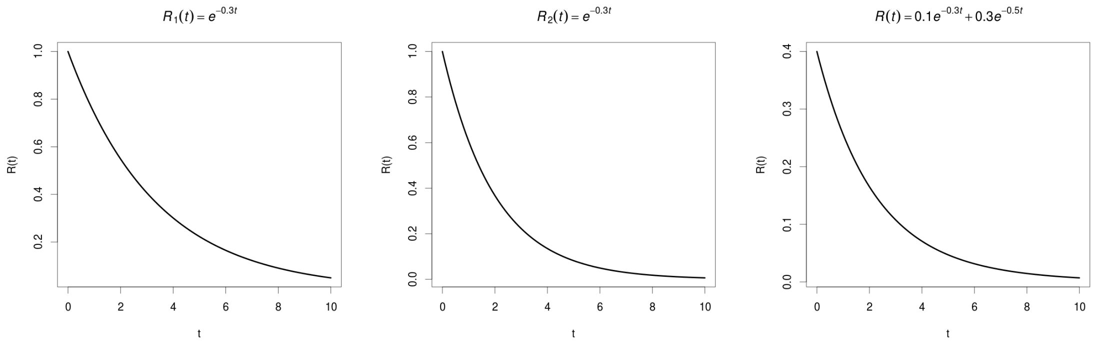
$$R(10) - R(11) = 0.99966 - 0.99955 = 0.011\%$$

3 Kombinace rozdělení

Průběh intenzity poruch u reálných prvků většinou není buď jen konstantní nebo jen rostoucí. Složitější intenzity poruch lze modelovat kombinací základních rodělení.

3.1 Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

Využití: popis počátečního + normálního provozu



Obrázek 2: Superpozice dvou exponenciálních rozdělení

$$R(t) \quad = \quad c_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

▶ **Příklad 5** *Nalezněte vztah pro výpočet $f(t)$*

Řešení:

$$f(t) = -\frac{\partial R(t)}{\partial t} = \lambda_1 c_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

▶ **Příklad 6** *Nalezněte vztah pro výpočet $\lambda(t)$.*

Řešení: Vycházíme z definice intenzity

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

tedy

$$\lambda(t) = \frac{c_1\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}}{c_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}}$$

▶ **Příklad 7** *Jestliže platí $\int_0^\infty f(t) = 1$, pak platí $c_1 + c_2 = 1$. Dokažte.*

Řešení:

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = [Q(t)]_0^\infty = [1 - R(t)]_0^\infty = \left[1 - c_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - c_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right]_0^\infty = 1-(1-c_1-c_2) = c_1+c_2 = 1.$$

Lze také z $R(0) = 1$.

▶ **Příklad 8** *Nalezněte vztah pro výpočet T_s.*

Řešení:

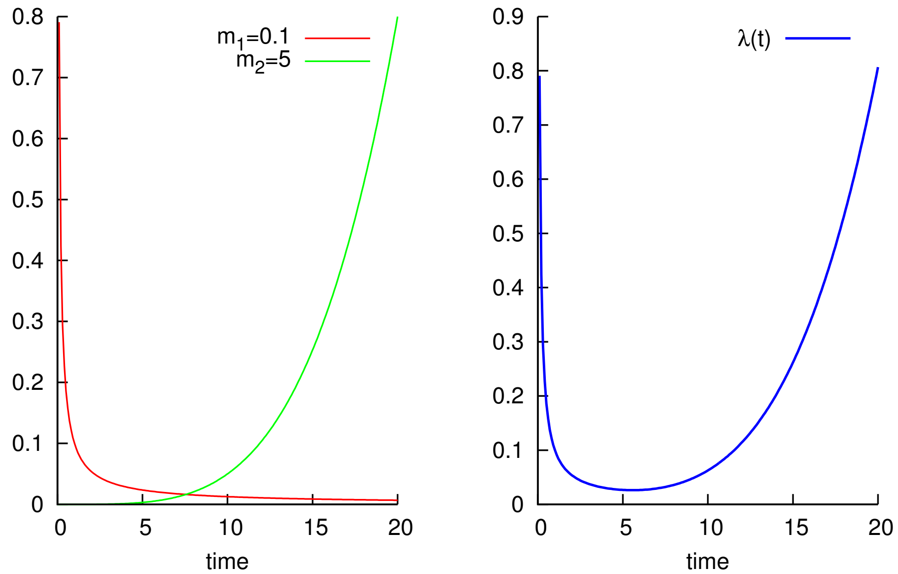
$$T_s = \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2}$$

3.2 Kombinace Weibullových rozdělení

Uvažujme inzenzitu poruch, která je popsána kombinací dvou Weibullových rozdělení:

$$\lambda(t) = \frac{m_1}{t_1} t^{m_1 - 1} + \frac{m_2}{t_2} t^{m_2 - 1}$$

Uvažujme, že $t_1 = 1$, $t_2 = 10^6$ a shape konstanty $m_1 = 0.1$ a $m_2 = 5$. Odpovídající inzenzita poruch je zobrazena na Obr. 3 Pro tuto intenzitu odvoďdte $R(t)$ a $f(t)$.



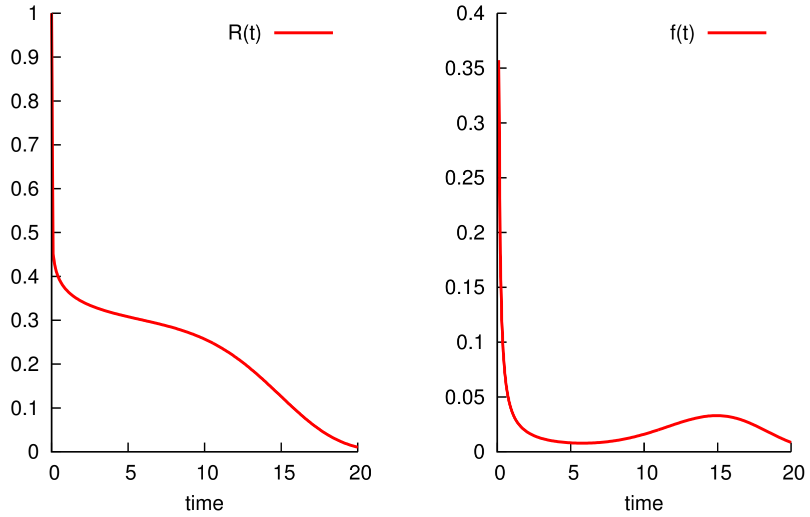
Obrázek 3: Intenzita poruch složená z exp. a Weibullova rozdělení

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(\tau)\,\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-\left[m_1 \frac{t^{m_1}}{m_1} + 10^{-6} m_2 \frac{t^{m2}}{m_2}\right]_0^t} = \mathrm{e}^{-\left[t^{m_1} + 10^{-6} t^{m_2}\right]_0^t} = \mathrm{e}^{-\left(t^{m_1} + 10^{-6} t^{m_2}\right)}$$

Obdobně lze odvodit hustotu pravděpodobnosti poruch:

$$f(t) = \frac{-\partial R(t)}{\partial t} = \left(m_1 t^{m_1 - 1} + 10^{-6} m_2 t^{m_2 - 1}\right) \mathrm{e}^{-\left(t^{m_1} + 10^{-6} t^{m_2}\right)}$$

Průběh $R(t)$ a $f(t)$ je zobrazen na Obr.4.

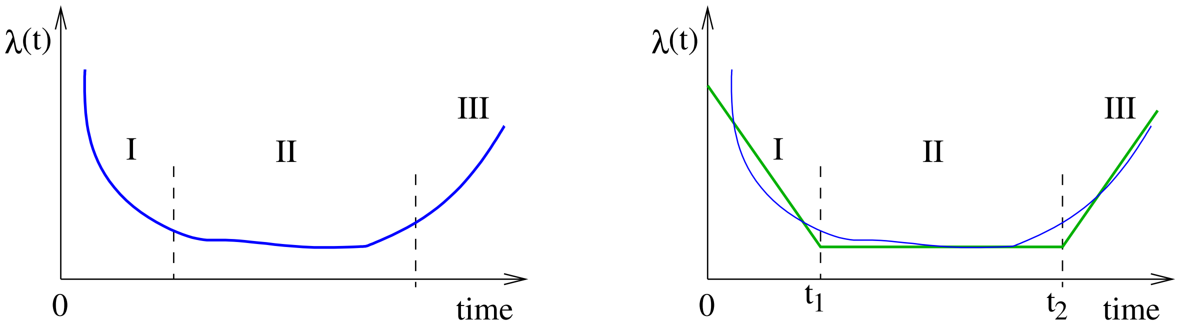


Obrázek 4: $R(t)$ a $f(t)$ pro složení dvou Weibullových rozdělení

4 Rozdělení poruch s intenzitou po úsecích lineární

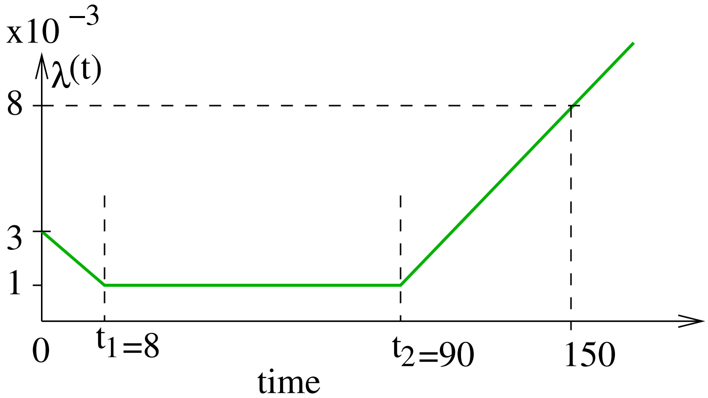
Průběh intenzity reálných prvků dobře vystihuje tzv. vanová křivka (Obr. 5). Pro výpočty spolehlivostí je vhodné jednotlivé úseky aproximovat lineární funkcí.

- období zahořování (oblast I) $\quad t < t_1, \lambda(t) = \lambda_0 + k_1 t \qquad \left(k_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{t_1}\right)$
- období normálního používání (oblast II) $\quad t_1 < t < t_2 \qquad \lambda(t) = \lambda_1$
- období dožití (oblast III) $\quad t > t_2, \qquad \lambda(t) = \lambda_1 + k_2(t - t_2)$



Obrázek 5: Obecný tvar „vanové křivky“ vlevo, vpravo její parametrizace.

► **Příklad 9** *Intenzita poruch daného systému je po částech lineární, přičemž* $\lambda(0) = 3.10^{-3}$, $\lambda(50) = 10^{-3}$, $\lambda(180) = 8.10^{-3}$. *Spočítejte pravděpodobnost bezporuchového provozu* $R(t)$ *v čase t=150.*



Řešení:

Vanová charakteristika je aproximována po částech lineární funkcí. V každé oblasti I, II a III použijeme jiný popis pro $\lambda(t)$.

$$\lambda_1(t) = k_1 t + \lambda_0 = -\frac{2}{8}10^{-3}t + 10^{-3}, \quad 0 \leq t \leq 8$$

V oblasti II je intenzita poruch konstatní

$$\lambda_2(t) = \lambda_0 = 10^{-3}, \quad 8 < t \leq 90$$

Ve třetí oblasti intenzita roste:

$$\lambda_3(t) = k_2(t-90) + \lambda_0 = \frac{7}{60}10^{-3}(t-90) + 10^{-3}, \quad 90 \leq t$$

Obecně je pravděpodobnost bezporuchového provozu $R(t)$

$$R(t) = R(0)\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(\tau)\,\mathrm{d}\tau}.$$

Integrál v exponentu můžeme spočítat jako součet tří integrálů

$$\int_0^{150} \lambda(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^8 \lambda_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_8^{90} \lambda_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{90}^{150} \lambda_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

a $R(t)$ je pak

$$\mathrm{e}^{-\int_0^{150} \lambda(\tau)\,\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-\int_0^8 \lambda_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_8^{90} \lambda_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_{90}^{150} \lambda_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-\int_0^8 \lambda_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{-\int_8^{90} \lambda_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{-\int_{90}^{150} \lambda_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

Platí tedy

$$R(8) = \mathrm{e}^{-\int_0^8 \lambda_1(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$R(90) = R(8)\mathrm{e}^{-\int_8^{90} \lambda_2(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$R(150) = R(90)\mathrm{e}^{-\int_{90}^{150} \lambda_3(t)\,\mathrm{d}t}$$

Oblast I:

$$R(8) = \mathrm{e}^{-\int_0^8 \lambda_1(t)\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-16\cdot 10^{-3}} = 0.98$$

Oblast II:

$$R(90) = R(8)\mathrm{e}^{-\int_8^{90} \lambda_2(t)\,\mathrm{d}t} = R(8)\mathrm{e}^{82\cdot 10^{-3}} = R(8)\cdot 0.92 = 0.98\cdot 0.92 = 0.9$$

Oblast III:

$$R(150) = R(90)\mathrm{e}^{-\int_{90}^{150} \lambda_3(t)\,\mathrm{d}t} = R(90)^{k_2(t-90)+\lambda_0} = R(90)\cdot \mathrm{e}^{-270\cdot 10^{-3}} = 0.9\cdot 0.76 = 0.69.$$

Alternativní výpočet

Integrál v exponentu odpovídá ploše pod grafem intenzity poruch $\lambda(t)$, proto můžeme jednoduše počítat $R(t) = \mathrm{e}^{-S}$, kde S je právě plocha pod grafem.

Nejprve tedy spočítejme plochy tak, aby $R(t) = \mathrm{e}^{-S_1}\mathrm{e}^{-S_2}\mathrm{e}^{-S_3}$:

$$S_1 = \frac{3.10^{-3} + 10^{-3}}{2}(8-0)1,6.10^{-2}\left[\frac{f(x_1)+f(x_0)}{2}(x_1 - x_0)\right]$$

$$S_2 = 10^{-3}(90-8) = 8,2.10^{-2}$$

$$S_3 = (150-90)\cdot 10^{-3} + (150-90)\cdot \frac{7}{2}\cdot 10^{-3} = 270\cdot 10^{-3}$$

Konečně

$$R(t) = \mathrm{e}^{-1{,}6.10^{-2}}\mathrm{e}^{-8{,}2.10^{-2}}\mathrm{e}^{-0{,}27} = 0.69.$$

▶ **Příklad 10** *Pro systém se stejnou intenzitou poruch jako v předchozím příkladu určete čas T_β, pro který $R(T_\beta) = 0.6$.*

Z předchozího příkladu víme, že $R(90) = 0,9$. Proto bude τ pro $R(\tau) = 0,6$ určitě větší než 90 a pro výpočet budeme vycházet ze vztahu pro třetí interval $90 \leq T_\beta$. V této oblasti je intenzita poruch popsána rovnicí:

$$\lambda_3(t) = k_2(t-90) + \lambda_0 = \frac{7}{60}10^{-3}(t-90) + 10^{-3}, \quad 90 \leq t$$

Alternativně je možné uvažovat funkci $\lambda_3'(t)$

$$\lambda_3'(t) = k_2 t + \lambda_0 = \frac{7}{60}10^{-3}t + 10^{-3}, \quad 0 \leq t$$

u které dosazujeme čas od 0. Hledáme takové T_β takové, aby $R(T_\beta) = 0.6$ a víme, že budeme hledat ve třetím intervalu:

$$R(T_\beta) = R(90)\mathrm{e}^{-\int_0^{t'}\lambda_3'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Čas t' neznáme a hledáme.

$$\frac{R(T_\beta)}{R(90)} = \mathrm{e}^{\int_0^{t'}\lambda_3'(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$\log\frac{R(T_\beta)}{R(90)} = -\int_0^{t'}\lambda_3'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\log\frac{R(T_\beta)}{R(90)} = -\left[k_2\frac{t^2}{2} + \lambda_0 t\right]_0^{t'}$$

$$\log\frac{R(T_\beta)}{R(90)} = -k_2\frac{t'^2}{2} - \lambda_0 t'$$

Po dosazení dostaneme kvadratickou rovnici:

$$\frac{k_2}{2}t'^2 + \lambda_0 t' + 0.405 = 0$$

Vyjdou dvě řešení ($t_1' > 0$ a $t_2' < 0$). Řešení našeho případu je $T_\beta = 90 + t_1'$.

Pozn.: Pozor! Pokud bychom místo funkce $\lambda_3'(t)$ použili $\lambda_3(t)$, budou výsledkem kvadratické rovnice dva kořeny ($t_1 > 90$ a $t_2 < 90$). V takovém případě by řešením byl kořen t_1.