

1. Úvod

Teorie automatického řízení představuje současný stav dlouholetého vývoje metod popisu a řešení různých regulačních obvodů a servomechanismů, završený obecnými teoriemi řízení složitých systémů, které zahrnují teorii stability, optimalizace, adaptivity i teorii automatizovaného učení. Rozvoj řídicí techniky začíná sestavením samočinného napájení kotle (Polzunov 1765) a samočinného regulátoru otáček parního stroje (Watt 1784).

Řízení s použitím zpětné vazby bylo nazváno *regulace* a koncem 40. a začátkem 50. let byla zařízení pro rychlé a přesné sledování změn polohy i jiných fyzikálních veličin nazvána *servomechanismy*. Po období klasické teorie regulace, která se opírala o popis systému diferenciálními rovnicemi, nastal rozvoj frekvenčních a operátorových metod, používajících k popisu vlastností systému a jeho jednotlivých členů frekvenční a obrazové přenosy.

Při řešení nelineárních systémů začal rozvoj metod stavového prostoru, použitých s úspěchem i pro popis a řešení lineárních systémů, a nalezla široké uplatnění Ljapunovova teorie stability, vypracovaná již v roce 1892. Základem rozvoje teorie optimálního řízení se staly variační metody, zvláště tzv. princip maxima, formulovaný L. P. Pontrjaginem v roce 1956, a dynamické programování, vytvořené R. Bellmanem v roce 1957. Stochastické metody umožnily sledovat i otázky vlivu náhodně se měnících parametrů nebo signálů, působících na systém. Vývoj nezůstal stát jen u otázek optimálního řízení a pro současnou dobu je charakteristický především výzkum v oblasti tzv. adaptivních a učících se systémů.

Rozvoj teorie řízení podstatně ovlivnila kybernetika. Za vznik kybernetiky jako samostatné vědecké disciplíny se považuje vydání Wienerovy knihy Kybernetika v roce 1948. Dnes se *kybernetika* (volně přeloženo „umění řídit“) definuje jako věda o obecných zákonech vzniku, přenosu a zpracování informace ve složitých systémech a o obecných zákonech řízení těchto systémů. Kybernetika představuje syntézu poznatků z oblasti teorie automatické regulace, teorie přenosu a zpracování informace, matematiky, fyziky, logiky, fyziologie, psychologie a dalších disciplín. Předmětem zkoumání kybernetiky jsou především složité systémy. Mohou jimi být systémy živé přírody i systémy technické, jako jsou složité stroje či zařízení nebo technologické procesy. Teorie automatického řízení tvoří nejdůležitější součást kybernetiky, a proto řídicí techniku považujeme za základní součást technické kybernetiky.

1.1. Základní pojmy

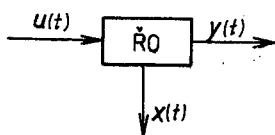
Řízení je cílevědomá činnost, při níž se hodnotí a zpracovávají informace o řízeném systému (objektu) nebo procesu i informace o dějích vně tohoto procesu. Charakteristickým znakem řízení je **účelové působení** nadřazeného členu na podřazený člen k dosažení jistého předepsaného cíle. Je-li řízení uskutečňováno samočinně nějakým zařízením nebo systémem, mluvíme o *automatickém řízení*. *Ovládání* je druh řízení, při kterém se neporovnává bezprostřední účinek řízení s očekávaným výsledkem.

Automatická regulace je samočinné udržování regulované veličiny na stanovených hodnotách, které jsou buď konstantní, nebo se s časem mění podle předem daného zákona. Vliv poruch se při tom eliminuje. Charakteristickým znakem regulace jako speciálního případu řízení je vyrovnávání odchylek regulované veličiny od žádané hodnoty (funkce).

Při porovnávání automatické regulace a automatického řízení dojdeme k názoru, že úloha regulace je částí úlohy řízení. Úlohy automatického řízení zahrnují např. adaptaci, učení, automatický výběr nejlepších režimů z několika možných variant a další úlohy, které nejsou úlohami automatické regulace. Jde v podstatě o rozšíření automatické regulace o adaptaci, učení atd. Můžeme tedy automatické řízení nazvat také *řízením regulačního typu*, kdy dochází k automatickému vyrovnávání odchylek od žádané hodnoty podle určitých kritérií. Dále existuje ještě *řízení logického typu*, kdy jde o tzv. *automatické rozhodování* podle kombinace a posloupnosti vstupních signálů. Základem tohoto řízení je teorie automatů. Z výkladu je zřejmé, že se někdy termíny „regulace“ a „řízení“ používají jako synonyma.

Cílem řízení rozumíme souhrn požadavků kladených na chování automatického systému v procesu řízení. Dosahujeme-li cíle v dané situaci nejlepším možným způsobem, mluvíme o *optimálním řízení*. Optimální řízení je ústředním problémem teorie automatického řízení.

Systém, který realizuje automatické řízení, nazýváme *systémem automatického řízení*. Probíhá-li automatické řízení optimálním způsobem, mluvíme o optimálním systému automatického řízení.



Obr. 1. Blokové schéma řízeného systému (objektu)

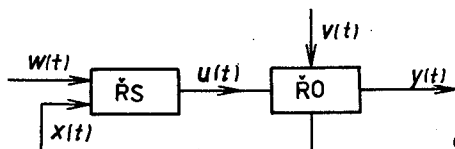


Obr. 2. Blokové schéma řídicího systému

Řízený systém (objekt) je zařízení (fyzikální objekt, technologický proces apod.), které je nutné řídit (obr. 1); $u(t)$ je vektor řídicích veličin (zvaný také někdy řízení), $y(t)$ je vektor výstupních veličin, $x(t)$ je tzv. stavový vektor. Při popisu vlastností řízených systémů abstrahujeme od jejich konkrétních fyzikálních vlast-

ností a vytváříme abstraktní modely reálných objektů, které nazýváme řízené systémy. Řízený systém může být jednoduchý (tvořený např. jediným elementem) nebo složitý, např. hierarchický, obsahující množinu podsystémů.

Řídicí systém je fyzikální realizace algoritmu řízení. Je to fyzikální (nebo technické) zařízení, generující řídicí signály (obr. 2). Matematickým modelem řídicího systému je tedy algoritmus řízení; $w(t)$ je vektor žádaných hodnot výstupních veličin, $x(t)$ vektor stavových veličin.



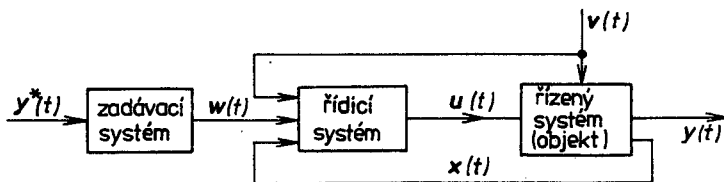
Obr. 3. Systém automatického řízení

Systém automatického řízení se skládá z řízeného objektu ŘO a řídicího systému ŘS (obr. 3); $v(t)$ je vektor poruchových veličin, $y(t)$ vektor výstupních veličin. Veličiny řídicí $u(t)$ a poruchové $v(t)$ nazýváme veličiny vstupní.

Základní vlastností jakéhokoli dynamického systému je, že jeho stav v libovolném časovém okamžiku závisí nejen na veličinách, které na něj v tomto okamžiku působí, ale také na veličinách, které na něj působily v minulosti. Systém má paměť, ve které je zapamatován podíl veličin působících v minulosti na chování systému v právě pozorovaném okamžiku. Stav systému je tedy určen řadou veličin, které charakterizují jak působení vnějšího prostředí, tak působení řídicího systému na řízený objekt a také průběh procesu uvnitř samotného systému. Veličiny generované řídicím systémem nebo zadávané člověkem a určující chování řízeného objektu jsou řídicí veličiny (vektor u). Veličiny působící na systém a nezávislé na něm jsou poruchy. Stavové (vnitřní) veličiny $x(t)$ charakterizují stav řízeného dynamického systému.

Je tedy zřejmé, že každý systém automatického řízení lze rozdělit na dvě části, které jsou ve vzájemné interakci (obr. 3), a to na část řízenou a část řídicí. Řízená část, nazývaná řízený objekt (systém), je tvořena souborem fyzikálních zařízení, která na sebe vzájemně působí a která přímo plní úkoly.

Část řídicí, nazývaná řídicí systém, je tvořena souborem fyzikálních zařízení; řídicí systém může svými vstupy přijímat informaci potřebnou k řízení řízeného objektu a svými výstupy působí na vstupy tohoto objektu tak, aby bylo dosaženo vytčeného cíle.



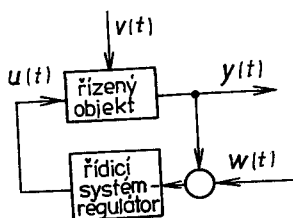
Obr. 4. Blokové schéma systému automatického řízení

Model systému automatického řízení na obr. 4 je matematicky popsán soustavou vektorových diferenciálních rovnic

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

kde $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T$ je vektor výstupních veličin
 $\mathbf{y}^*(t) = [y_1^*(t), y_2^*(t), \dots, y_m^*(t)]^T$ vektor žádaných hodnot výstupních veličin
 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ vektor stavových veličin
 $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t)]^T$ vektor žádaných hodnot stavových veličin
 $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T$ vektor řídicích veličin
 $\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_l(t)]^T$ vektor poruchových veličin

Na obr. 5 je schéma jednoduchého regulačního obvodu.



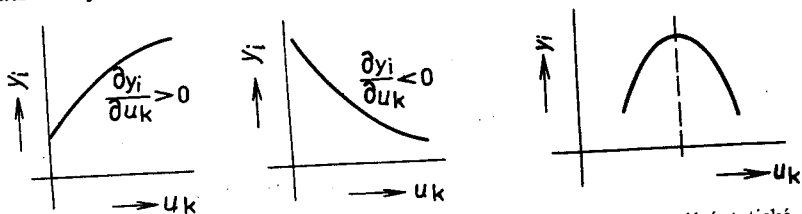
Obr. 5. Blokové schéma jednoduchého regulačního obvodu

Lze-li soustavu rovnic (1.1) převést na soustavu lineárních diferenciálních rovnic, je systém *lineární*. Je-li popis systému automatického řízení dán soustavou nelineárních diferenciálních rovnic, je systém *nelineární*. V ustáleném stavu pro $\dot{\mathbf{x}} = 0$ přejdou rovnice (1.1) do tvaru

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{cases} \quad (1)$$

Při vyšetřování statického chování řízeného objektu se zajímáme především o závislost řízených veličin \mathbf{y} na řídicím signálu \mathbf{u} , kterou nazýváme *statická charakteristika*. Tyto charakteristiky $y_i = y_i(u_k)$ mohou být monotónní, nemění-li $\frac{\partial y_i}{\partial u_k}$ znaménko (obr. 6), nebo extrémální (obr. 7).

Systém automatického řízení může být *stabilní* nebo *nestabilní*. *Stabilní* systém tehdy, jestliže se po krátkodobém působení vnějšího signálu v konečné době vrátí do výchozího stavu nebo do jeho blízkého okolí.



Obr. 7. Extrémální statická charakteristika

Počet vzájemně nezávislých řízených (výstupních) veličin udává rozměr systému. Má-li být u m -rozměrového systému každá řízená veličina řízena nezávisle na ostatních řízených (výstupních) veličinách, potom počet r vstupních veličin musí být $r \geq m$, přičemž všechny vstupní veličiny musí být vzájemně nezávislé. Řád systému n závisí na počtu stavových veličin.

Procesy probíhající v systému automatického řízení mohou být buď *deterministické*, nebo *stochastické*. Procesy, u kterých nám znalost jejich chování v nějakém časovém intervalu umožňuje zcela určit jejich chování i mimo tento interval, nazýváme *deterministické*. Systémy automatického řízení, ve kterých tyto procesy probíhají, nazýváme *deterministické systémy*. Umožňuje-li znalost chování procesů v nějakém časovém údobí určit pouze pravděpodobnostní charakteristiky těchto procesů vně tohoto časového intervalu, nazýváme takové systémy *stochastické*. Deterministické procesy lze uvažovat jako zvláštní případ procesů stochastických. Objem apriorní informace bývá pro *deterministické* procesy obvykle větší než u procesů *stochastických*.

Při zobrazování činnosti systémů automatického řízení používáme funkční schéma a blokové schéma. Ve funkčním schématu odpovídá každému funkčnímu elementu systému určitý člen. V blokovém schématu odpovídá určitý člen každé provedené transformaci v systému.

Princip práce systému automatického řízení závisí na charakteru informace získané o systému, možnosti identifikace řízeného objektu, tvaru statických charakteristik a především na úkolu, který má být systémem automatického řízení splněn. Při vyšetřování řízených objektů řešíme především problém čím tyto objekty řídit. Dalším problémem je stanovení cíle řízení a způsob a volba prostředků k jeho dosažení.

Vydeme-li z těchto hledisek, můžeme rozlišovat

a) *stabilizaci*, při které máme udržovat se zadanou přesností stanovené řízené veličiny;

b) *programové řízení*, při kterém je zákon změny řízených veličin předem znám a je zadáván operátorem, který obsluhuje systém řízení;

c) *vlečné řízení* (regulace), při němž je systémem sledována některá měřená veličina, jejíž časový průběh není předem znám. Řízená veličina sleduje se zadanou přesností měřitelnou veličinou nebo nějakou její funkcí. Tyto systémy se také nazývají *servosystémy*;

d) *adaptivní řízení*, kdy systém přizpůsobuje své vlastnosti měnícím se podmínkám tak, aby tyto vlastnosti udržoval nebo je zlepšoval, popř. aby pracoval optimálně.

Systémy automatického řízení dělíme na *otevřené* a *uzavřené* (systémy se zpětnou vazbou). V otevřených systémech je vektor řídicí veličiny zadán a není ovlivňován skutečnými hodnotami řízené veličiny. Jeho velikost i tvar vychází z cíle řízení, charakteristik řízeného objektu a z předem známých vnějších signálů. U těchto systémů chybí kompenzace vlivu neměřitelných poruchových signálů. Používají se při stabilizaci a programovém řízení. Ve zpětnovazebních

systemech se vektor řídicí veličiny vytváří v přímé závislosti na řízené veličině. Setkáváme se s dvěma základními principy – *automatickým řízením podle poruchy a podle odchylky*.

Podle povahy práce lze systémy automatického řízení dělit na *spojitě pracující (spojité), diskrétní (nespojité) a hybridní*, obsahující spojitě i diskrétně pracující části. Tento případ nastává velmi často – řízený objekt pracuje spojitě a k řízení jako podstatné části řídicího systému je použit počítač.

V dalších kapitolách budou postupně probrány základy teorie jednotlivých typů systémů automatického řízení.

2. Základy teorie dynamických systémů

V současné etapě rozvoje vědy a techniky jsou technická zařízení většinou poměrně složité systémy, které se skládají z řady jednodušších systémů nebo prvků. Zkoumáme-li podstatu činnosti takových systémů, uvažujeme fyzikální a energetická hlediska. Při vyšetřování vlastního chování systémů a způsobu jejich řízení provádíme analýzu z hlediska kybernetického. Zkoumáme přitom

- a) jak působí jedna část systému na jinou část,
- b) jaký vliv mají tyto interakce na chování celého systému v daném prostředí,
- c) jak zpětně působí systém na prostředí nebo na jiné systémy.

Systémy mohou být nejrůznější povahy, např. technické systémy, biologické systémy, společenskoekonomické systémy apod. Předmětem zkoumání jsou především obecné vlastnosti těchto systémů. Analogie v chování různých systémů dovo-lují vyšetřovat chování zcela určitého systému a z něho potom soudit na chování ostatních systémů jemu podobných. Pro vyšetřování si samozřejmě vybíráme systém, který bude ve všech ohledech jednodušší než ostatní, s výjimkou těch vlastností, které určí podstatu zkoumaného jevu. Takový systém nazýváme model. Může to být nejen exaktně definovaný matematický model – abstraktní systém, ale např. také jednoduchý fyzikální model. Vymezení pojmu systém, který se stal základním pojmem ve vědě a technice, je věnována řada publikací [9], [14], [15]. V teorii automatického řízení nás zajímá důležitá třída tzv. dynamických systémů. Teorie dynamických systémů [4], [7], [9] byla motivována původně problémy dynamiky tuhých těles. Při automatickém řízení však (oproti problémům dynamiky tuhých těles) převážně jde o tzv. orientované systémy, u kterých je explicitně vyjádřen vstup a výstup. Definici orientovaných systémů zavedl Kalman [2]. V teorii systémů je důležitá také definice orientovaného systému s konečným počtem prvků, zavedená v teorii konečných automatů. Ukázalo se, že lze zavést jednu definici abstraktního dynamického systému, jak to udělali Zadeh a Desoer [14], a rozšířit ji i na systémy stochastické.

2.1. Systém a jeho základní vlastnosti

Systém se skládá z jednotlivých částí, které jsou určitým způsobem spolu spojeny. Každou takovou část lze považovat za množinu S_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Systém je tvořen průnikem těchto množin, tj.

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \dots \cap S_n \quad (2.1)$$

Každá množina S_i může obsahovat několik prvků systému nebo naopak každý prvek lze interpretovat jako množinu S_i . Mezi jednotlivými prvky S_i existují různé vztahy (relace) R_{ji} , $j = 1, 2, \dots, m$.

K množině S tedy existuje množina vztahů R

$$R = \{R_1, \dots, R_m\} \quad (2.2)$$

Každý systém je tedy tvořen množinou prvků (2.1) a množinou vztahů (2.2) mezi nimi.

Množina vztahů systému obsahuje prvky R_j , které samy představují určitou posloupnost vztahů

$$R_j = \{V_{j1}, V_{j2}, V_{j3}, \dots, V_{jr}\} \quad (2.3)$$

z množiny vztahů

$$V = \{V_1, V_2, \dots, V_i\} \quad (2.4)$$

K tomu, aby bylo možné určit vytváření posloupnosti R_j , je nutné určit ještě množinu pravidel

$$P = \{P_1, \dots, P_s\} \quad (2.5)$$

Množina vztahů R obsahuje kromě vztahů V ještě určité parametry L , jejichž jednotlivé hodnoty nejsou předem určeny. Potom místo (2.2) lze psát

$$R = \{V, L\} \quad (2.6)$$

a V označujeme jako strukturu systému.

Příklad. Pro dynamický člen druhého řádu, popsáný diferenciální rovnicí

$$T_1 T_2 x'' + T_1 x' + x = Ku$$

je struktura systému dána posloupností vztahů

$$V = \{p^2, p, \cdot, +\}$$

kde symboly $p^2, p, \cdot, +$ znamenají druhou derivaci, první derivaci, násobení a sčítání. Parametry jsou T_1, T_2 a K , tj.

$$L = \{T_1, T_2, K\} \quad \text{a}$$

$$R = \{p^2, p, \cdot, +, T_1, T_2, K\}$$

Pojem struktura se také ztotožňuje s pojmem organizace. Strukturu lze definovat jako množinu vzájemných vztahů mezi prvky systému a všech k tomu izomorfních skladeb. Izomorfní skladby jsou takové, u kterých zůstávají zachovány vztahy mezi jejich jednotlivými prvky. Izomorfie má základní význam pro modelování systémů.

Příklad. Mechanické kmity lze modelovat elektrickými kmity, jsou-li příslušné elektrické obvody popsány stejnou diferenciální rovnicí jako vyšetřovaný mechanický systém. Tyto systémy mají tedy stejnou strukturu.

2.1.1. Abstraktní systémy

U fyzikálních systémů jsou vztahy mezi jednotlivými jejich prvky určovány fyzikálními veličinami (elektrický proud, napětí, tlak, teplota, mechanické výchylky apod.). Kromě toho má fyzikální systém mnoho dalších příznaků (např. fyzikální složení, chemické složení apod.), které nejsou podstatné pro vyšetřování jeho chování.

U *abstraktního systému* jsou určující pouze ty proměnné (veličiny), které charakterizují vztahy mezi jednotlivými prvky systému nebo vztah systému k vnějšmu prostředí. Označme tyto proměnné w_1, \dots, w_n (předpokládáme, že jsou t -variantní). Množinu proměnných $\{w_1, \dots, w_s\}$ spojenou s nějakým abstraktním systémem potom nazýváme *vnější proměnné*. Vztahy mezi těmito proměnnými nazýváme *vnější vztahy systému*. Lze tedy systém charakterizovat soustavou rovnic

$$\left. \begin{aligned} A^{(1)}(w_1, \dots, w_s) &= 0 \\ A^{(2)}(w_1, \dots, w_s) &= 0 \\ \vdots & \\ A^{(l)}(w_1, \dots, w_s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

kde každá z rovnic $A^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, l$ udává vztah mezi vnějšími proměnnými.

Je-li nějaký abstraktní systém A popsán vztahy (2.7) a není přitom určeno, které proměnné jsou vstupní a které proměnné jsou výstupní, nazýváme jej neorientovaný systém. Příkladem takového neorientovaného systému je soustava hmotných bodů.

Jestliže však určitou množinu proměnných označíme jako vstupní proměnné (signály) a určitou množinu jako výstupní proměnné (signály) daného systému, je tento systém orientovaný. Takový je každý řízený systém.

Teorie systémů se nezabývá přímo fyzikálními systémy, ale jejich abstraktními modely. Z výkladu vyplývá, že pod pojmem abstraktní systém rozumíme množinu proměnných a množinu relací mezi nimi.

Označíme-li vstupní proměnné u_1, u_2, \dots, u_r a považujeme-li je za nezávislé proměnné a označíme-li výstupní proměnné y_1, y_2, \dots, y_p a považujeme-li je za závislé proměnné, lze soustavu rovnic (2.7) zapsat ve tvaru

$$\left. \begin{aligned} A^{(1)}(u_1, u_2, \dots, u_r, y_1, y_2, \dots, y_p) &= 0 \\ A^{(2)}(u_1, u_2, \dots, u_r, y_1, y_2, \dots, y_p) &= 0 \\ \vdots & \\ A^{(l)}(u_1, u_2, \dots, u_r, y_1, y_2, \dots, y_p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

vektorově

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

Je zřejmé, že každý fyzikální systém má abstraktní model, avšak ne každý abstraktní (orientovaný nebo neorientovaný) systém má fyzikální realizaci. Abstraktní systémy lze tedy rozdělit na systémy fyzikálně realizovatelné a systémy fyzikálně nerealizovatelné.

Je vidět, že je třeba formulovat podmínky, jejichž splnění zaručuje, že systém má fyzikální realizaci. Jsou to tzv. *podmínky fyzikální realizovatelnosti*.

Příklad. Předpokládejme, že abstraktní systém A je fyzikálně realizovatelný. Může být tedy realizován různými fyzikálními systémy S_1, S_2 . Potom $A(S_1), A(S_2)$ budou představovány stejným abstraktním systémem A .

a) Uvažujme abstraktní neorientovaný systém A , charakterizovaný proměnnými w_1, w_2 a relací

$$A : w_1(t) = jw_2(t), \quad \forall t, \quad j = \sqrt{-1} \quad (2.9)$$

Je vidět, že daný systém nemá fyzikální realizaci, protože v opačném případě by musel existovat fyzikální systém charakterizovaný příznaky w_1 a w_2 a relací (2.9), přičemž alespoň jeden z příznaků by musel být komplexní.

b) Abstraktní systém

$$A : ky = u$$

je zřejmě fyzikálně realizovatelný např. mechanickým systémem

$$mx'' = F$$

nebo elektrickým systémem

$$Ri = u$$

c) Může nastat situace, ve které abstraktní systém A je fyzikálně realizovatelný jako neorientovaný, ale nemusí mít fyzikální realizaci při určité předem dané orientaci. Mějme abstraktní systém

$$A : w_2(t) = w_1(t + \tau), \quad \forall t$$

Systém A lze realizovat ideální zpožďovací linkou se zpožděním τ , je-li w_2 vstup zpožďovací linky a w_1 výstup zpožďovací linky.

Chápeme-li však A jako orientovaný systém s předem danou orientací pro $w_1 =$ vstup a $w_2 =$ výstup, není systém A fyzikálně realizovatelný.

2.1.2. Stav systému

Mějme abstraktní orientovaný dynamický systém A se vstupními veličinami $u_i, i = 1, 2, \dots, r$ a výstupními veličinami $y_j, j = 1, 2, \dots, p$. Předpokládáme, že u_i a y_j jsou funkce času, přičemž $u_i(t)$ a $y_j(t)$ jsou hodnoty těchto veličin v okamžiku t .

Množinu všech možných vstupních vektorů, jež mohou přicházet na vstup systému A , označíme U . Je to vstupní prostor systému. Je-li vstupní prostor U konečná množina, nazývá se obvykle vstupní abeceda. Ve většině případů je tento prostor Eukleidovým prostorem E^n .

Uvažme nyní takovýto experiment: V počátečním okamžiku t_0 nechme působit na systém A vektor vstupní veličiny u , a to až do okamžiku $t_1, t_1 \geq t_0$. Ze zkušenosti je známo, že výstupní vektor $y(t, t_0)$ reagující obecně jen na

Vnitřní popis je nejdokonalejší popis systému. Zde jej budeme vyjadřovat stavovými rovnicemi.

Různé vnější popisy systému spolu těsně souvisejí a existuje také těsná souvislost mezi vnitřním a vnějším popisem systému. Tyto problémy rozebereme v následujících třech odstavcích.

3.1.2. Vnější popisy spojitého lineárního systému

Relace mezi vstupem a výstupem systému může být vyjádřena různě. Nejprve uvedeme různé popisy lineárních spojitých systémů s jednou vstupní i výstupní veličinou. Zobecnění těchto popisů na systémy s více vstupními i výstupními veličinami je v odst. 3.1.4.

Vnější popis lineárního spojitého systému s jednou vstupní a výstupní veličinou můžeme vyjádřit

- a) lineární diferenciální rovnicí systému,
- b) přenosem systému v Laplaceově transformaci,
- c) impulsovou charakteristikou systému,
- d) přechodovou charakteristikou systému,
- e) frekvenčním přenosem systému,
- f) frekvenční charakteristikou systému,
- g) polohou pólů a nul přenosu systému,
- h) odezvou systému na známý obecný vstupní signál.

Popis systému lineární diferenciální rovnicí

Lineární stacionární spojitý systém s jednou vstupní a výstupní veličinou má relaci mezi vstupní a výstupní veličinou popsanou diferenciální rovnicí ve tvaru

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t) \quad (3.1)$$

kde a_i, b_j jsou konstantní koeficienty,

$u(t)$ je vstupní veličina,

$y(t)$ výstupní veličina systému.

Z podmínky fyzikální realizovatelnosti systému plyne, že musí platit nerovnost

$$m \leq n$$

tzn. že stupeň nejvyšší derivace výstupní veličiny není menší než stupeň derivace vstupní veličiny. Řád diferenciální rovnice n je roven řádu systému.

Řešení diferenciální rovnice získáme, známe-li počáteční podmínky $y(0)$ až $y^{(n-1)}(0)$ a $u(0)$ až $u^{(m-1)}(0)$ a průběh vstupní veličiny.

V systémech s konečnou rychlostí šíření signálu se často vyskytuje tzv. dopravní zpoždění. Systém reaguje na změnu vstupní veličiny až po určité době, kterou nazýváme dopravní zpoždění a označujeme T_d . Diferenciální rovnice systému

s dopravním zpožděním je

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t - T_d) \quad (3.2)$$

Systémy tohoto typu se vyskytují při dopravě materiálů (např. pásovými dopravníky) apod.

Systém, u něhož průběh výstupní veličiny je roven zpožděnému průběhu vstupní veličiny – systém s tzv. čistým dopravním zpožděním, má relaci mezi vstupní a výstupní veličinou popsanou rovnicí

$$y(t) = u(t - T_d) \quad (3.3)$$

Příklad. Střídavý servomotor je dynamický systém, jehož vstupní veličinou je napětí u na řídicí fázi a výstupní veličinou je poloha $\varphi(t)$ hřídele servomotoru. Diferenciální rovnice popisující vztah mezi vstupní veličinou a výstupní veličinou servomotoru je

$$Ku = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} \quad (3.4)$$

kde K je momentová konstanta,

J moment setrvačnosti,

B součinitel viskózního tlumení servomotoru.

Předcházející rovnice vyjadřuje rovnost momentů na hřídeli servomotoru. Střídavý servomotor je popsán systémem 2. řádu a průběh výstupní veličiny $\varphi(t)$ získáme, známe-li počáteční podmínky $\varphi(0)$ a $\varphi'(0)$ a průběh vstupního napětí $u(t)$.

Přenos systému v Laplaceově transformaci

Přenos systému je roven poměru Laplaceova obrazu výstupní veličiny k Laplaceovu obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách. Systém popsáný diferenciální rovnicí (3.1) má přenos

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad (3.5)$$

Opět musí být splněna podmínka fyzikální realizovatelnosti, tzn. že stupeň čitatele přenosu nemůže být větší než stupeň polynomu ve jmenovateli přenosu.

Kořeny polynomu ve jmenovateli přenosu se nazývají póly systému. Polynom ve jmenovateli přenosu (nazývaný také charakteristický polynom) můžeme vyjádřit jako součin kořenových činitelů, tj.

$$a_n p^n + \dots + a_0 = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) \quad (3.6)$$

kde p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, jsou póly systému.

Protože koeficienty a_i charakteristického polynomu jsou reálné, jsou póly systému buď reálné, nebo po dvou komplexně sdružené.

Kořeny polynomu v čitateli přenosu se nazývají nuly systému. Polynom v čitateli přenosu můžeme také vyjádřit jako součin kořenových činitelů, tj.

$$b_m p^m + \dots + b_0 = b_m (p - n_1)(p - n_2) \dots (p - n_m)$$

kde n_j ; $j = 1, 2, \dots, m$ jsou nuly systému. Nuly jsou také buď reálné, nebo po párech komplexně sdružené.

Záporně vzatým převráceným hodnotám reálných pólů a nul říkáme časové konstanty systému a označujeme je τ nebo také T . Platí tedy

$$\tau_i = -\frac{1}{p_i}, \quad T_j = -\frac{1}{n_j} \quad (3.7)$$

p_i, n_j reálné.

Přenos systému můžeme tedy vyjádřit pomocí pólů a nul ve tvaru

$$F(p) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(p - n_1)(p - n_2) \dots (p - n_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

Znalost pólů a nul systému spolu s poměrem koeficientů u nejvyšších mocnin polynomů v čitateli a jmenovateli přenosu také jednoznačně určuje vnější vlastnosti systému.

Jsou-li všechny nuly i póly systému reálné, můžeme přenos systému vyjádřit také pomocí časových konstant ve tvaru

$$F(p) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{(1 + pT_1)(1 + pT_2) \dots (1 + pT_m)}{(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2) \dots (1 + p\tau_n)} \quad (3.8)$$

kde $T_j = -\frac{1}{n_j}$ jsou časové konstanty čitatele přenosu,

$\tau_i = -\frac{1}{p_i}$ časové konstanty jmenovatele přenosu,

$\frac{b_0}{a_0}$ je zesílení systému.

Systém s dopravním zpožděním popsaný diferenciální rovnicí (3.2) má přenos

$$F(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} e^{-pT_d} \quad (3.9)$$

neboť obraz posunuté funkce je

$$L\{f(t - T_d)\} = L\{f(t)\} e^{-pT_d} = F(p) e^{-pT_d}$$

Systém s čistým dopravním zpožděním má přenos

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = e^{-pT_d}$$

Obraz výstupní veličiny systému s přenosem (3.5) za nenulových počátečních podmínek je

$$Y(p) = F(p) U(p) + F_p(p) \quad (3.10)$$

kde $F_p(p)$ je operátor počátečních podmínek.

Použitím věty o obrazu derivace

$$L\{f^{(i)}(t)\} = p^i F(p) - \sum_{j=0}^{i-1} p^j f^{(i-1-j)}(0+)$$

dostaneme pro operátor počátečních podmínek $F_p(p)$ vztah

$$F_p(p) = \frac{M_p(p)}{N(p)}$$

kde polynom $N(p)$ je roven charakteristickému polynomu přenosu $F(p)$ a polynom $M_p(p)$ je (pro $m = n$)

$$\begin{aligned} M_p(p) = & [a_n y(0) - b_n u(0)] p^{n-1} + \\ & + [a_n y'(0) - b_n u'(0) + a_{n-1} y(0) - b_{n-1} u(0)] p^{n-2} + \dots + \\ & + [a_n y^{(n-2)}(0) + \dots + a_2 y(0) - b_n u^{(n-2)}(0) - \dots - b_2 u(0)] p + \\ & + a_n y^{(n-1)}(0) + \dots + a_1 y(0) - b_n u^{(n-1)}(0) - \dots - b_1 u(0) \end{aligned}$$

Příklad. Dynamické vlastnosti servomotoru z předcházejícího příkladu můžeme popsat přenosem

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{U(p)} = \frac{K}{Jp^2 + Bp}$$

kde $\Phi(p) \doteq \varphi(t)$ a $U(p) \doteq u(t)$ jsou obrazy výstupní a vstupní veličiny. Systém zřejmě dva póly

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{B}{J}$$

Přenos servomotoru často upravujeme na tvar

$$F(p) = \frac{K/B}{p \left(\frac{J}{B} p + 1 \right)} = \frac{K_v}{p(\tau p + 1)}$$

kde K_v je rychlostní konstanta servomotoru,
 τ časová konstanta servomotoru.

Impulsová charakteristika systému

Impulsová charakteristika je grafické znázornění impulsové funkce.

Impulsová funkce systému je odezva systému na Diracův impuls při nulových počátečních podmínkách. Označujeme ji $g(t)$. Diracův impuls $\delta(t)$ je ideální funkce (distribuce), fyzikálně nerealizovatelná, charakterizovaná vztahy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \quad \delta(t) = 0 \quad \text{pro } \forall t, \quad t \neq 0$$

Laplaceův obraz Diracova impulsu je $L\{\delta(t)\} = 1$, a proto Laplaceův obraz impulsové funkce se rovná přenosu systému

$$L\{g(t)\} = F(p) \cdot L\{\delta(t)\} = F(p)$$

Podle věty o počáteční hodnotě

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

můžeme z přenosu systému určit počáteční hodnotu impulsové funkce

$$g(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \begin{cases} \infty & \text{pro } b_n \neq 0 \\ \frac{b_{n-1}}{a_n} & \text{pro } b_n = 0 \\ 0 & \text{pro } b_n = b_{n-1} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Odtud je zřejmé, že nekonečně vysoký impuls projde systémem až na výstup, je-li stupeň polynomu v čitateli i jmenovateli přenosu stejný. Impulsová funkce má v nule nespojitost (skok z hodnoty $g(t) = 0$ pro $t < 0$ na $g(0) = b_{n-1}/a_n$), je-li stupeň jmenovatele pouze o jednotku větší, než je stupeň čitatele. Impulsová funkce začíná v nule s nulovou hodnotou, je-li stupeň jmenovatele alespoň o dvě vyšší než stupeň čitatele.

Poznámka. Je-li stupeň jmenovatele i čitatele přenosu stejný, můžeme čitatele dělit jmenovatelem a dostaneme přenos ve tvaru

$$F(p) = \frac{b_n}{a_n} + \frac{\bar{b}_{n-1}p^{n-1} + \dots + \bar{b}_0}{a_n p^n + \dots + a_0} \quad (3.13)$$

kde koeficienty \bar{b}_i jsou

$$\bar{b}_i = b_i - \frac{a_i}{a_n} b_n; \quad i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

Podle (3.13) je přenos roven součtu dvou přenosů, z nichž jeden je konstanta b_n/a_n , která způsobí, že vstupní impuls projde až na výstup. Druhý člen v (3.13) udává průběh impulsové funkce pro $t > 0$.

Je-li systém popsán impulsovou funkcí a chceme-li získat odezvu na obecný vstupní signál $u(t)$, použijeme větu o konvoluci. Pro obraz výstupního signálu platí

$$Y(p) = F(p) U(p) \quad (3.14)$$

V originále proto platí

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

popř.

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (3.16)$$

U systémů s dopravním zpožděním je impulsová funkce posunuta o čas T_d doprava.

Příklad. Impulsovou funkcí střídavého servomotoru z předcházejícího příkladu určíme zpětnou transformaci jeho přenosu. Provedeme rozklad na částečné zlomky. Potom

$$F(p) = \frac{K_v}{p(\tau p + 1)} = \frac{K_v}{p} - \frac{K_v \tau}{\tau p + 1} = \frac{K_v}{p} - \frac{K_v}{p + \frac{1}{\tau}}$$

Impulsová funkce je

$$g(t) = K_v(1 - e^{-t/\tau})$$

Určete pomocí impulsové funkce a konvolutorního integrálu odezvu servomoto na průběh napětí

$$u(t) = \begin{cases} 5t & \text{pro } 0 \leq t < 10 \\ 0 & \text{pro } t \geq 10 \end{cases}$$

Přechodová charakteristika systému

Přechodová charakteristika systému je grafické znázornění přechodové funkce. Přechodová funkce je odezva na jednotkový skok při nulových počátečních podmínkách. Označujeme ji $h(t)$. Jednotkový skok $1(t)$ je funkce definovaná vztahem

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}$$

Laplaceův obraz jednotkového skoku je

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{p}$$

a proto obraz přechodové funkce je

$$L\{h(t)\} = H(p) = \frac{1}{p} F(p) \quad (3.1)$$

Přechodová a impulsová funkce spolu těsně souvisejí. Impulsová funkce je podle předcházejícího výrazu dána derivací přechodové funkce

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (3.18)$$

Hodnota přechodové funkce v nule je nulová, je-li stupeň jmenovatele přenosu systému alespoň o jednotku vyšší než stupeň čitatele.

Všimněme si nyní ustálených hodnot přechodové funkce. Podle věty o konečných hodnotě

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (\text{pokud první limita existuje})$$

je ustálená hodnota přechodové funkce rovna

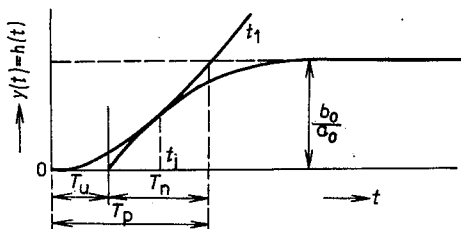
$$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pH(p) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p) = \begin{cases} \frac{b_0}{a_0} \\ \infty \end{cases} \quad \text{pro } a_0 = 0 \quad (3.19)$$

Je-li absolutní člen a_0 ve jmenovateli přenosu nenulový, je ustálená hodnota funkce konečná. Systémům s touto vlastností říkáme statické systémy. Poměr b_0/a_0 udává zesílení systému.

Je-li absolutní člen a_0 nulový, přechodová funkce se neustálí na konečné hodnotě. Takovým systémům říkáme astatické systémy.

Typická přechodová charakteristika statického systému vyššího řádu je na obr. 21.

Tečna přechodové charakteristiky v inflexním bodě vytíná na ose času tři úseky (obr. 21), které se v praxi často používají k přibližné charakteristice dynamických vlastností systému. Je to doba náběhu T_n , doba průtahu T_u a doba přechodu $T_p = T_u + T_n$.



Obr. 21. Přechodová charakteristika statického systému

Přenos astatického systému můžeme vždy upravit do tvaru

$$F(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{p^i (a_n p^{n-i} + \dots + a_i)} \quad (3.20)$$

Astatický systém má vždy nulový pól. Násobnost i nulového pólu astatického systému označujeme jako řád astaticismu.

Astatický systém má vždy integrační charakter, neboť násobení $1/p$ odpovídá v časové oblasti integraci. Přechodová charakteristika astatického systému konverguje pro $t \rightarrow \infty$ do nekonečna.

Příklad. Přechodovou funkci střídavého servomotoru vypočítáme pomocí Laplaceovy transformace. Platí

$$H(p) = \frac{1}{p} F(p) = \frac{K_v}{p^2(\tau p + 1)}$$

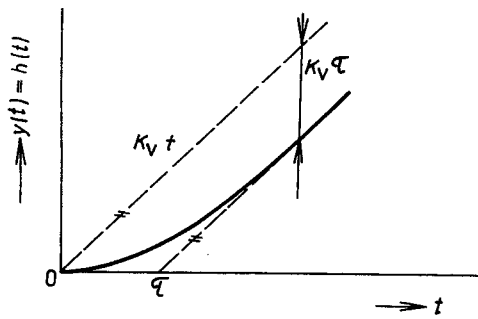
kde přenos servomotoru byl určen v předcházejících příkladech. Zpětnou transformaci opět provedeme rozkladem na částečné zlomky

$$H(p) = \frac{K_v}{p^2} - \frac{K_v \tau}{p} + \frac{K_v \tau^2}{\tau p + 1}$$

Odtud

$$h(t) = K_v \left[t - \tau(1 - e^{-t/\tau}) \right]$$

Tento výraz bychom také dostali integrací impulsové funkce. Servomotor, jehož vstupní veličinou je napětí na řídicí fázi a výstupní veličinou je poloha hřídele, je astatický systém druhého řádu s řádem astaticismu rovným jedné. Přechodová charakteristika servomotoru je na obr. 22.



Obr. 22. Přechodová charakteristika servomotoru

Máme-li systém popsáný přechodovou funkcí $h(t)$ a chceme-li určit odezvu systému na obecný vstupní signál $u(t)$, použijeme opět větu o konvoluci. Platí

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t h(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (3.2)$$

popř.

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

Derivaci integrálu podle parametru provedeme podle Leibnitzova vzorce

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, \tau) d\tau = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau) d\tau + \frac{\partial b(t)}{\partial t} f[t, b(t)] - \frac{\partial a(t)}{\partial t} f(t, a(t))$$

Pro výstupní signál dostaneme potom následující tvary konvolutorního integrálu

$$y(t) = h(0) u(t) + \int_0^t \frac{\partial h(t - \tau)}{\partial t} u(\tau) d\tau = h(0) u(t) - \int_0^t \frac{\partial h(t - \tau)}{\partial \tau} u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = u(0) h(t) + \int_0^t \frac{\partial u(t - \tau)}{\partial t} h(\tau) d\tau = u(0) h(t) - \int_0^t h(\tau) \frac{\partial u(t - \tau)}{\partial \tau} d\tau$$

$$y(t) = h(t) u(0) + \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

$$y(t) = u(t) h(0) + \int_0^t \frac{\partial h(\tau)}{\partial \tau} u(t - \tau) d\tau \quad (3.23)$$

Frekvenční přenos

Frekvenční přenos $F(j\omega)$ systému je roven podílu Fourierova obrazu výstupní veličiny systému a Fourierova obrazu vstupní veličiny (opět při nulových počátečních podmínkách)

$$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (3.24)$$

Aby funkce měla Fourierův obraz, musí být absolutně integrovatelná. Frekvenční přenos systému (pokud existuje) získáme z přenosu systému v Laplaceově transformaci formální záměnou proměnné p za $j\omega$.

Potom

$$F(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1j\omega + a_0} \quad (3.25)$$

Frekvenční přenos lze získat také Fourierovou transformací impulsové funkce

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.26)$$

Frekvenční přenos se stal základem frekvenčních metod, vycházejících z grafického vyjádření frekvenčního přenosu pomocí frekvenční charakteristiky.

Frekvenční charakteristika

Frekvenční charakteristika systému je grafické zobrazení frekvenčního přenosu

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j \arg F(j\omega)} = \operatorname{Re}[F(j\omega)] + j \operatorname{Im}[F(j\omega)] \quad (3.27)$$

Frekvenční charakteristiku můžeme zobrazit v komplexní rovině $\operatorname{Re}[F(j\omega)]$ a $\operatorname{Im}[F(j\omega)]$. Frekvenční charakteristika je křivka v komplexní rovině, jejíž parametr je úhlový kmitočet ω .

Frekvenční charakteristiku můžeme také zobrazit v logaritmických souřadnicích. Na ose souřadnic je vyneseno úhlový kmitočet ω v logaritmické stupnici a na osu pořadnic vynášíme amplitudu frekvenčního přenosu v decibelech. Tuto charakteristiku nazýváme logaritmická amplitudová frekvenční charakteristika. Vynášíme-li na osu pořadnic fázi frekvenčního přenosu, získáme logaritmickou fázovou frekvenční charakteristiku.

Frekvenční metody, jejichž základem je frekvenční charakteristika, mají velký praktický význam, neboť frekvenční charakteristiku můžeme získat měřením na systému, aniž známe jeho parametry. Frekvenční charakteristiku získáme změřením závislosti na úhlovém kmitočtu poměru vektoru sinusového výstupního signálu k vektoru sinusového vstupního signálu. Pro určitý úhlový kmitočet získáme bod frekvenční charakteristiky změřením zesílení amplitudy sinusového průběhu mezi výstupním a vstupním signálem a současným změřením jejich vzájemné fáze.

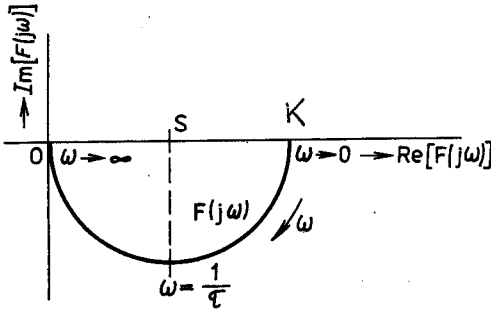
Frekvenční charakteristika v komplexní rovině

Uvažujme nejprve statický systém prvního řádu s frekvenčním přenosem

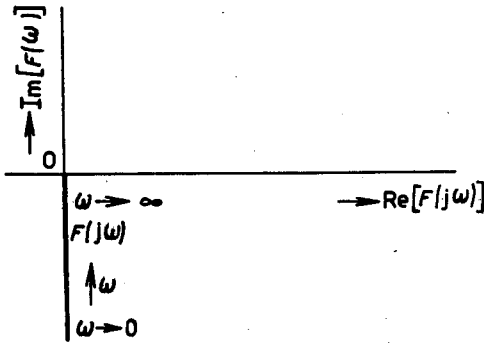
$$F(j\omega) = \frac{K}{j\omega\tau + 1} \quad (3.28)$$

pro $\omega = 0$ je $\lim_{\omega \rightarrow 0} F(j\omega) = K$ a pro $\omega \rightarrow \infty$ je $\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(j\omega) = 0$.

Výraz $1 + j\omega\tau$ představuje pro $\omega > 0$ polopřímku v komplexní rovině. Inverze polopřímky je polokružnice. Frekvenční charakteristika systému s přenosem (3.28) je polokružnice (obr. 23).



Obr. 23. Frekvenční charakteristika statického systému prvního řádu



Obr. 24. Frekvenční charakteristika astatického systému prvního řádu

Nejjednodušší astatický člen prvního řádu má frekvenční přenos

$$F(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = -j \frac{K}{\omega}$$

Jeho frekvenční charakteristika v komplexní rovině je na obr. 24. Frekvenční charakteristiky složitějších systémů získáme součinem těchto základních typů charakteristik.

Pro usnadnění konstrukce frekvenční charakteristiky v komplexní rovině použijeme nomogram na obr. 25. Tímto nomogramem zjišťujeme absolutní hodnotu A a fázi φ přenosu

$$\frac{1}{Tj\omega + 1} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.29)$$

nebo přenosu

$$Tj\omega + 1 = \frac{1}{A(\omega)} e^{-j\varphi(\omega)} \quad (3.30)$$

pro dané časové konstanty a různé úhlové kmitočty ω .

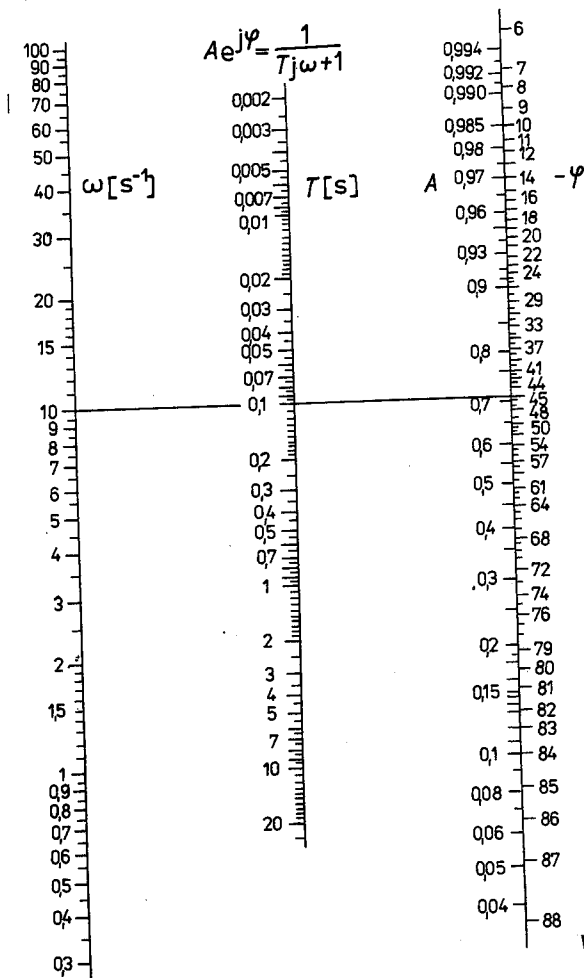
Pro zjištění bodů frekvenční charakteristiky složitějšího přenosu použijeme tab. 1. V ní rozložíme přenos na členy typu (3.29) nebo (3.30) a amplitudu a fázový posun jejich frekvenčního přenosu určíme z nomogramu na obr. 25. Frekvenční charakteristiky pro určité ω je dána s celková amplituda je dána součinem amplitud c

Tabulka 1. Tabulka pro určení bodů frekvenční charakteristiky systému s přenosem

$$F(p) = \frac{5}{p} \frac{2p + 1}{(5p + 1)(0,5p + 1)^2}$$

Amplituda jednotlivých členů je označena $||$ a jejich fáze je označena φ

ω	$\frac{5}{p}$		$\frac{1}{5p + 1}$		$2p + 1$		$\frac{1}{(0,5p + 1)^2}$		$F(p)$	
	$ $	φ	$ $	φ	$ $	φ	$ $	φ	$ F $	$\arg F$
2	2,5	-90°	0,095	-84°	$\frac{1}{0,24}$	$+76^\circ$	2,0,714	$-2,45^\circ$	1,49	-188°
atd.										



Obr. 25. Nomogram pro řešení vztahu

Již z tvaru frekvenční charakteristiky v komplexní rovině poznáme některé základní vlastnosti systému:

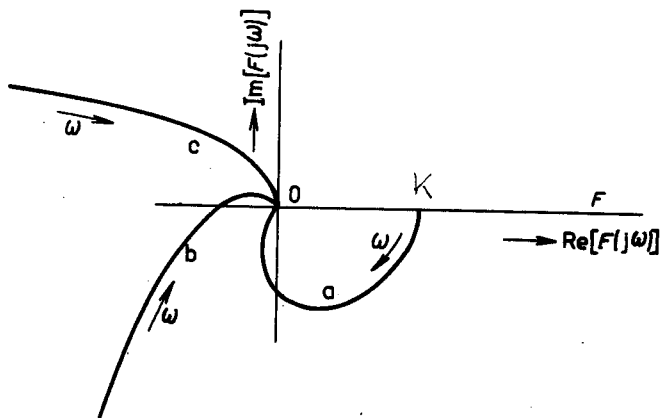
a) Statický systém má frekvenční charakteristiku začínající pro $\omega = 0$ na reálné ose, přitom hodnota $\text{Re}[F(j\omega)]$ pro $\omega = 0$ se rovná zesílení systému.

b) Frekvenční charakteristika astatického systému začíná pro $\omega = 0$ v nekonečnu. Je-li řád astaticismu roven jedné, pak je

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}[F(j\omega)] = -\infty$$

příčemž je reálná část konečná. Je-li řád astaticismu roven dvěma, je

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}[F(j\omega)] = -\infty$$



Obr. 26. Typické frekvenční charakteristiky systémů. Křivka a je frekvenční charakteristika statického systému, křivka b je frekvenční charakteristika astatického systému s řádem astaticismu 1, křivka c je frekvenční charakteristika astatického systému s řádem astaticismu 2

Na obr. 26 jsou typické frekvenční charakteristiky statického a astatického systému.

c) Frekvenční charakteristika končí pro $\omega \rightarrow \infty$ v počátku, je-li stupeň jmenovatele přenosu vyšší než stupeň čitatele. Jsou-li stupně stejné, končí frekvenční charakteristika na reálné ose v bodě b_n/a_n .

d) Počet kvadrantů, kterými prochází frekvenční charakteristika statického systému, je nejvýše roven řádu systému. **Určit řád systému podle tohoto pravidla je obtížné, neboť pro vyšší úhlové kmitočty je amplituda frekvenční charakteristiky malá, a proto je určení fáze nepřesné. Nuly systému mohou způsobit, že frekvenční charakteristika systému prochází méně nebo i více kvadranty.**

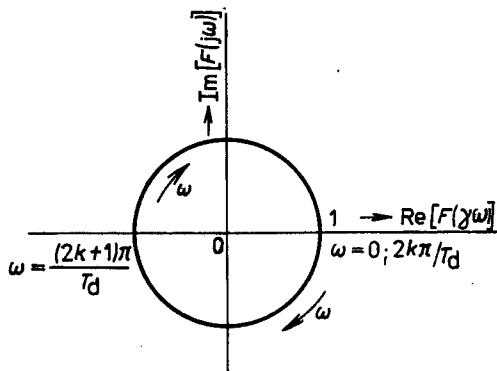
Počet kvadrantů, kterými prochází frekvenční charakteristika astatického systému, je nejvýše roven řádu systému zmenšenému o řád astaticismu.

e) U většiny fyzikálních objektů nastává zpoždování výstupního signálu za vstupním signálem vlivem akumulace energie. Proto velká část systému má frekvenční charakteristiku procházející postupně čtvrtým kvadrantem, třetím kvadrantem atd.

Frekvenční charakteristika systému s dopravním zpožděním, jehož frekvenční přenos je

$$F(j\omega) = e^{-j\omega T_d}$$

je na obr. 27.



Obr. 27. Frekvenční charakteristika systému s čistým dopravním zpožděním $F(j\omega) = e^{-j\omega T_d}$

Frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích

Logaritmickou frekvenční charakteristiku dostaneme logaritmováním frekvenčního přenosu (3.27). Pak platí

$$\ln F(j\omega) = \ln |F(j\omega)| + j \arg F(j\omega) \quad (3.30)$$

Vynášíme zvlášť logaritmus amplitudy frekvenčního přenosu, který nazýváme amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika, a zvlášť fázi frekvenčního přenosu a tuto charakteristiku nazýváme fázová logaritmická frekvenční charakteristika.

Na osu pořadnic amplitudové charakteristiky vynášíme frekvenční přenos v decibelech, což jsou jednotky definované jako dekadický logaritmus poměru obrazu výstupního a vstupního signálu, násobený dvaceti, tj.

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |F(j\omega)| \quad (3.31)$$

Význam zavedení logaritmických frekvenčních charakteristik spočívá ve zjednodušení výpočtů charakteristik složených systémů a v jejich jednoduchém sestrojování. Násobení přenosů při sériovém spojení systémů (viz čl. 3.15) se totiž v logaritmických charakteristikách zjednodušuje na sčítání charakteristik, protože např. pro přenos

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) = |F_1(j\omega)| e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot |F_2(j\omega)| e^{j\varphi_2(\omega)}$$

platí

$$20 \log |F(j\omega)| = 20 \log |F_1(j\omega)| + 20 \log |F_2(j\omega)|$$

a

$$\varphi(\omega) = \arg F(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

Přenos lineárních systémů má v čitateli i jmenovateli mnohočleny, které lze napsat jako součiny kořenových činitelů podle rovnice (3.8). Jsou-li všechny kořeny reálné (systém má reálné nuly i póly), může mít přenos např. tvar

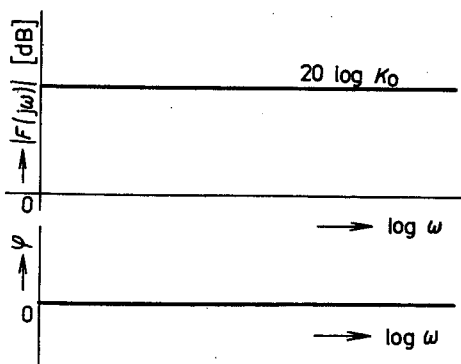
$$F(j\omega) = K_0 \frac{1 + j\omega T_1}{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} \quad (3.32)$$

Pro jednoduchost označíme časové konstanty T_1 , T_2 , T_3 od jejich největších hodnot k nejmenším. Pro přenos (3.32) je amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika určena výrazem

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log K_0 + 20 \log |1 + j\omega T_1| - 20 \log |1 + j\omega T_2| - 20 \log |1 + j\omega T_3| \quad (3.33)$$

Fázová charakteristika je

$$\varphi(\omega) = \text{arctg } \omega T_1 - \text{arctg } \omega T_2 - \text{arctg } \omega T_3 \quad (3.34)$$



Obr. 28. Logaritmická frekvenční charakteristika přenosu $F(p) = K_0$

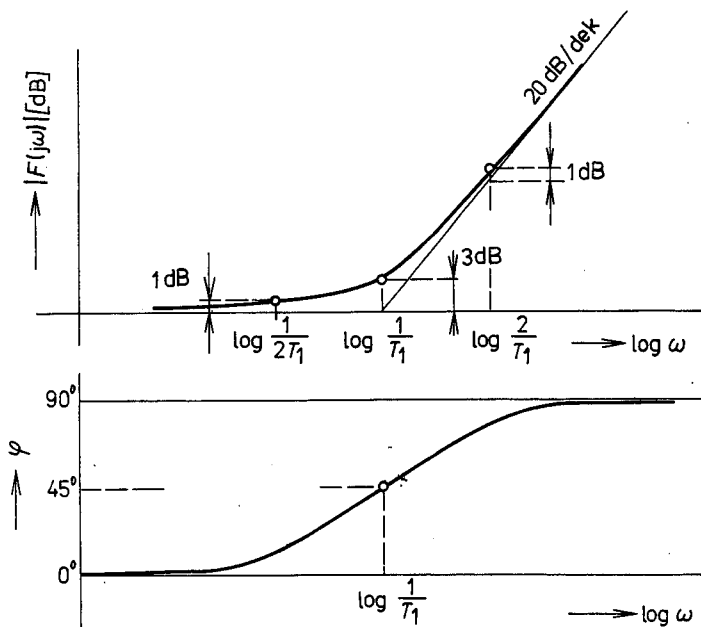
Amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika se podle (3.33) snadno sestojí. První člen $20 \log K_0$ je konstanta nezávislá na úhlovém kmitočtu (obr. 28). Ostatní členy jsou závislé na úhlovém kmitočtu. Frekvenční průběh členu

$$20 \log |1 + j\omega T_1| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \quad (3.35)$$

je na obr. 29. Pro $\omega \ll 1/T_1$ platí $(\omega T_1)^2 \ll 1$, a proto člen $\omega^2 T_1^2$ můžeme v (3.35) zanedbat proti jedničce. Výraz (3.35) se pak pro $\omega \ll 1/T_1$ zjednoduší na $20 \log 1 = 0$. Pro $\omega \ll 1/T_1$ bude frekvenční charakteristika rovnoběžná s osou souřadnic a její pořadnice bude 0 dB. Pro $\omega \gg 1/T_1$ je $(\omega T_1)^2 \gg 1$, a ve výrazu (3.35) můžeme tedy zanedbat jedničku proti $(\omega T_1)^2$. Potom výraz (3.35) bude možné napsat ve tvaru

$$20 \log |1 + j\omega T_1| \doteq 20 \log \omega T_1 = 20 \log \omega + 20 \log T_1, \quad \text{pro } \omega \gg 1/T_1$$

Tento výraz v souřadnicích $|F(j\omega)|_{dB}$ a $\log \omega$ určuje přímkou o směrnici 20 dB na dekádu nebo 6 dB na oktávu. Dekáda znamená desetinásobek kmitočtu a oktáva dvojnásobek úhlového kmitočtu. Pro $\omega = 1/T_1$ platí $20 \log \omega T_1 = 0$, a proto tato přímkou prochází osou 0 dB při kmitočtu $\omega = 1/T_1$. Amplitudovou frekvenční



Obr. 29. Logaritmická frekvenční charakteristika výrazu $1 + j\omega T_1$

charakteristiku členu $(1 + j\omega T_1)$ můžeme tedy pro $\omega \ll 1/T_1$ nahradit asymptotou o sklonu 0 dB/dek a pro $\omega \gg 1/T_1$ nahradit asymptotou o sklonu 20 dB/dek (obr. 29).

Polopřímky o sklonech 0 dB/dek a 20 dB/dek nazýváme asymptoty proto, že skutečný průběh frekvenční charakteristiky se k těmto polopřímkám asymptoticky blíží. Pro úhlový kmitočet $\omega = 1/T_1$ (bod lomu asymptot) je rozdíl mezi skutečným průběhem frekvenční charakteristiky a aproximací asymptotami největší, protože výraz $(\omega T_1)^2 = 1$, a proto zanedbáním kteréhokoli výrazu pod odmocninou v (3.35) vzniká stejná chyba. Pro úhlový kmitočet $\omega = 1/T_1$ můžeme přímo vypočítat tuto chybu. Platí

$$20 \log \sqrt{1 + 1} \doteq 3 \text{ dB}$$

Pro kmitočet $\omega = 1/(2T_1)$ platí

$$20 \log \sqrt{1 + (\omega T_1)^2} = 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \doteq 1 \text{ dB}$$

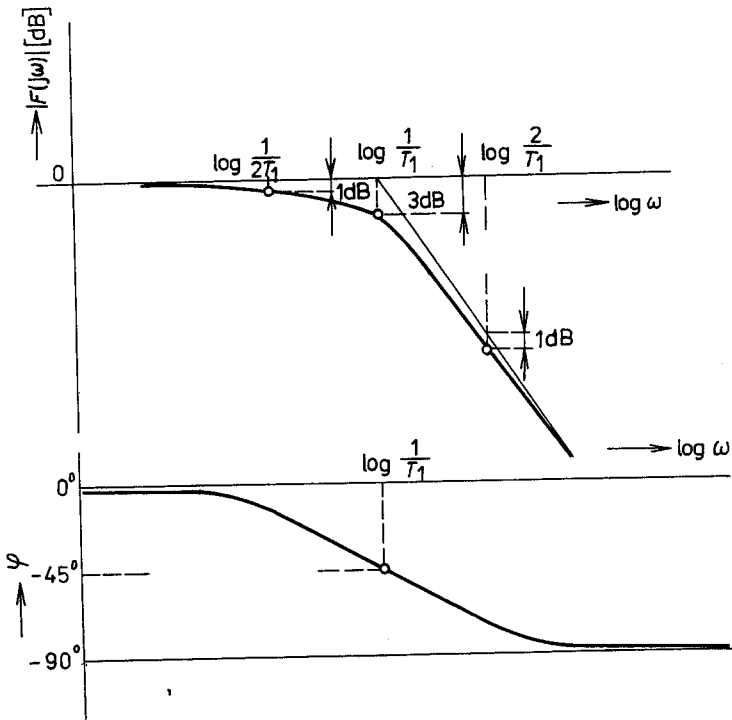
pro $\omega = 2/T_1$ platí

$$20 \log \sqrt{1 + (\omega T_1)^2} = 20 \log \sqrt{1 + 4} \doteq 7 \text{ dB}$$

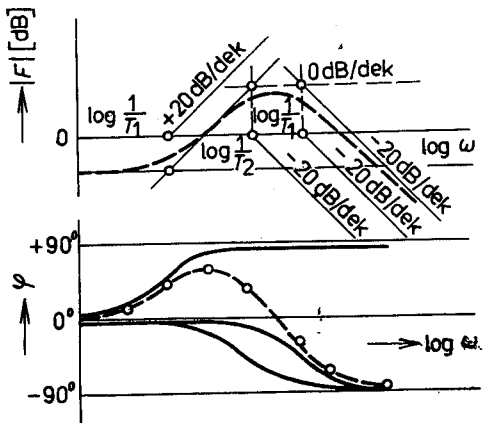
Protože asymptota $20 \log \omega T_1$ má v bodě $\omega = 2/T_1$ hodnotu

$$20 \log 2 \doteq 6 \text{ dB}$$

je rozdíl mezi skutečnou charakteristikou a asymptotou opět 1 dB.



Obr. 30. Logaritmická frekvenční charakteristika výrazu $1/(1 + j\omega T_1)$



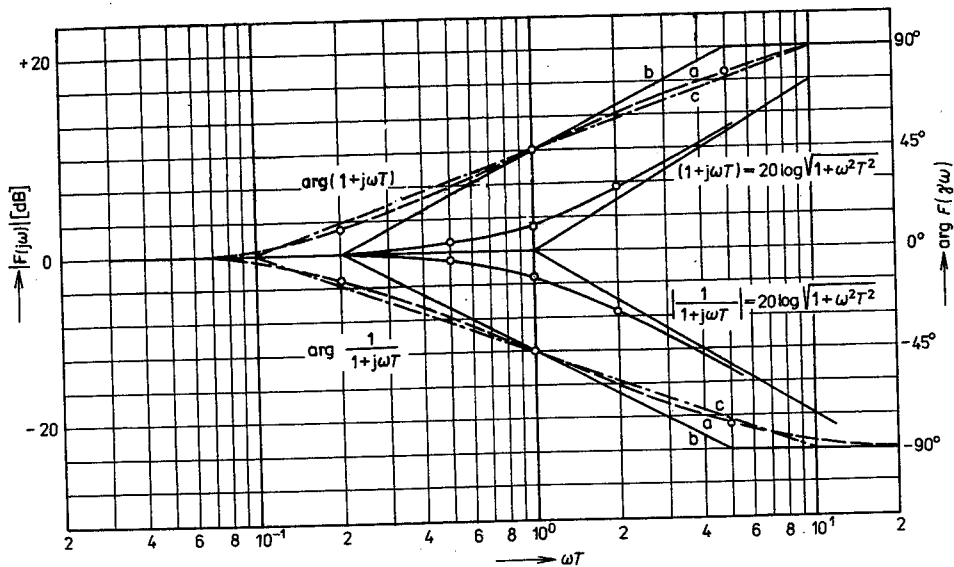
Obr. 31. Logaritmická frekvenční charakteristika systému s přenosem

$$F(p) = K_0 \frac{1 + pT_1}{(1 + pT_2)(1 + pT_3)}$$

$T_1 > T_2 > T_3$, získaná složením frekvenčních charakteristik dílčích členů

Chyba aproximace logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky výrazu $(1 + j\omega T_1)$ asymptotami je v lomu asymptot 3 dB a pro frekvence dvakrát větší nebo dvakrát menší než úhlový kmitočet lomu je chyba aproximace 1 dB.

Shrneme-li předcházející výklad, je zřejmé, že amplitudovou frekvenční charakteristiku výrazu $(1 + j\omega T_1)$ můžeme dostatečně přesně sestavit pomocí asymptoty a tří bodů, které určíme uvedenými opravami asymptotických průběhů.



Obr. 32. Bezrozměrové logaritmické frekvenční charakteristiky

a) skutečný průběh fáze, b) aproximace fáze asymptotami, lomy $\omega = \frac{5}{T}$; $\omega = \frac{1}{5T}$,

c) aproximace fáze asymptotami, lomy $\omega = \frac{10}{T}$; $\omega = \frac{1}{10T}$

Frekvenční průběh členu $1/(1 + j\omega T_1)$ je na obr. 30. Rozdíl proti průběhu na obr. 29 je v záporné směrnici asymptoty (-20 dB/dek) a záporných hodnotách chyb aproximace skutečného průběhu asymptotami.

Výslednou logaritmickou frekvenční charakteristiku přenosu (3.32) dostaneme sečtením uvedených dílčích frekvenčních charakteristik (obr. 31). Fázovou charakteristiku vyneseme podle vztahu (3.34). Průběhy fází k jednotlivým amplitudovým charakteristikám jsou přikresleny u příslušných obrázků. Pro snadnější vynášení fáze k dříve uvedeným průběhům je na obr. 32 vynesena tzv. bezrozměrová frekvenční charakteristika členů

$$\frac{1}{1 + j\omega T_1} \quad \text{a} \quad (1 + j\omega T_1)$$

Mají-li mnohočleny $M(p)$ a $N(p)$ přenosu

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$$

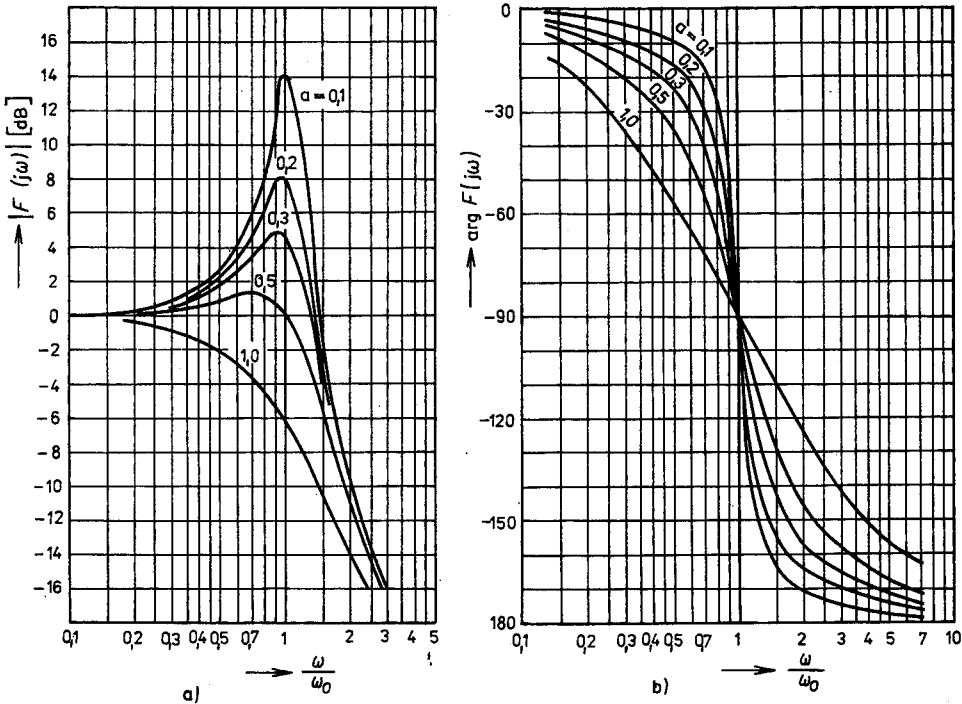
také komplexně sdružené kořeny, budou mít polynomy $M(j\omega)$ a $N(j\omega)$ při rozkladu na kořenové činitele kromě členů typu $(1 + j\omega T)$ také kvadratické trojčleny typu $[1 + 2aTj\omega + (Tj\omega)^2]$. Převrácenou hodnotu tohoto výrazu, tzn.

$$\frac{1}{1 + 2aTj\omega + (Tj\omega)^2} \quad (3.37)$$

můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] + j2a \frac{\omega}{\omega_0}}; \quad \omega_0 = \frac{1}{T}$$

Pro sestrojení výsledné logaritmické frekvenční charakteristiky je třeba sestrojít frekvenční průběh výrazu (3.37). Sestrojíme ho jednoduše pomocí grafu na obr. 33, kde jsou průběhy amplitudy a fáze odpovídající příslušným hodnotám ω . Při sestrovování amplitudové frekvenční charakteristiky pomocí asymptot stačí nahradit člen (3.37) asymptotami o sklonu 0 a -40 dB/dek, které se protínají v bodě o souřadnicích (0 dB; ω_0). Pro sestrovování přesného průběhu provedeme potom opravy v okolí úhlového kmitočtu ω_0 podle grafů na obr. 33.



Obr. 33. Frekvenční charakteristika kmitavého systému s přenosem

$$F(j\omega) = \frac{1}{(\tau j\omega)^2 + 2a\tau j\omega + 1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2a \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

a) průběh $|F|$, b) průběh $\arg F(j\omega)$

Má-li přenos nulové póly, tj. členy typu $K/j\omega$, odpovídá jim logaritmická frekvenční charakteristika podle obr. 34. Je to přímka o sklonu -20 dB/dek a fáze je konstantní $\varphi(\omega) = -\pi/2$.

Logaritmickou frekvenční charakteristiku přenosu ve tvaru (3.8) i s kvadratickými členy (3.37) lze jednoduše sestřít takto:

1. Určíme úhlové kmitočty odpovídající jednotlivým časovým konstantám

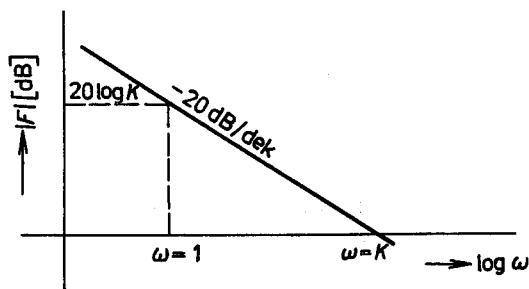
$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2}$$

kteř seřadíme tak, aby

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3, \dots, \quad \text{tj.} \quad T_1 > T_2 > T_3, \dots$$

V těchto úhlových kmitočtech nastává lom asymptot.

2. Sestrojíme asymptotickou amplitudovou charakteristiku. Začneme od nejnižších kmitočtů. Nemá-li přenos pól v počátku, začíná amplitudová charakteristika asymptotou o sklonu 0 dB/dek, posunutou o $20 \log K$, kde K je zesílení systému. Má-li přenos jednonásobný pól v počátku, má první asymptota sklon -20 dB/dek. Její poloha je určena tím, že pro $\omega = 1$ musí procházet bodem o souřadnici $20 \log K$ nebo protíná osu 0 dB při úhlovém kmitočtu $\omega = K$ (obr. 34).



Obr. 34. Logaritmická amplitudová frekvenční charakteristika výrazu

$$\frac{K}{\omega}$$

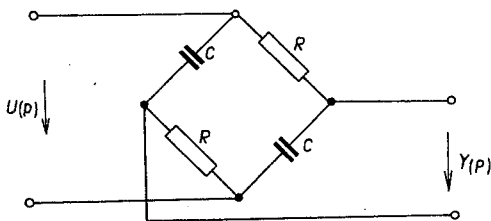
3. První asymptota probíhá od nejnižších úhlových kmitočtů $\omega \rightarrow 0$ až do úhlového kmitočtu ω_1 odpovídajícím prvnímu členu $(1 + j\omega T_1)$. V úhlovém kmitočtu $\omega = \omega_1$ nastává lom asymptot. Nová asymptota má sklon o $+20$ dB/dek nebo -20 dB/dek větší než předcházející asymptota podle toho, je-li člen $(1 + j\omega T_1)$ v čitateli nebo jmenovateli přenosu.

4. Dále pokračujeme v sestřování jednotlivých asymptot, jejichž sklony se zvětšují nebo zmenšují vždy o ± 20 dB/dek podle toho, je-li příslušný člen v čitateli nebo jmenovateli přenosu.

5. Obsahuje-li přenos kvadratický člen (3.37), mění se sklon asymptoty při úhlovém kmitočtu ω_0 o ± 40 dB/dek.

6. Výsledný průběh logaritmické frekvenční charakteristiky se sestřovuje s použitím dříve uvedených korekcí pro asymptotické charakteristiky a podle grafu na obr. 33.

V logaritmických souřadnicích často pracujeme pouze s amplitudovými logaritmickými frekvenčními charakteristikami. Pracovat pouze s jedním druhem charakteristik lze u systémů s minimální fází, neboť u nich existuje jednoznačná souvislost amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky. Systémy s minimální



Obr. 35. Elektrický obvod, který je systémem s neminimální fází

fázi jsou takové systémy, které mají při stejné amplitudové charakteristice nejmenší fázový posun. Systémy s minimální fází nemají žádné nuly ani póly v pravé polorovině komplexní roviny.

Příkladem systému s neminimální fází je elektrický obvod nakreslený na obr. 35. Jeho přenos je

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1 - p\tau}{1 + p\tau}; \quad \tau = RC$$

Systémy s dopravním zpožděním jsou také systémy s neminimální fází, nebo dopravní zpoždění neovlivňuje amplitudu frekvenční charakteristiky, ale mění fází.

Pro systémy s minimální fází odvodil Bode, že pro určitý úhlový kmitočet ω lze fází vyjádřit vztahem

$$\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{dA}{d\mu} \right)_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{dA}{d\mu} - \left(\frac{dA}{d\mu} \right)_{\omega=\omega_0} \right] \ln \operatorname{ctgh} \frac{|\mu|}{2} d\mu \quad (3.38)$$

kde $A = \ln F(j\omega); \quad \mu = \ln \frac{\omega}{\omega_0}$

Fáze φ při libovolném úhlovém kmitočtu ω_0 je podle (3.38) určena tangentou úhlu sklonu logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky $\frac{dA}{d\mu}$ a váhovou funkcí $\ln \operatorname{ctgh} \frac{|\mu|}{2}$. Integrál této váhové funkce v mezích od $-\infty$ do $+\infty$ tj. 2 pro hodnoty úhlového kmitočtu ω od 0 do $+\infty$, je roven nule.

Ze vztahu (3.38) plyne, že je-li v celém rozsahu kmitočtů sklon amplitudové frekvenční charakteristiky $n20$ dB/dek, je fáze konstantní $\varphi = n\pi/2$. Z průběhu váhové funkce plyne, že největší změna fáze je v blízkosti bodů, ve kterých se mění sklon logaritmické amplitudové charakteristiky. Fáze při libovolném kmitočtu je převážně určena sklonem amplitudové charakteristiky v blízkosti tohoto kmitočtu.

3.1.3. Vzájemná souvislost vnějších popisů systému

Souvislost mezi frekvenčními a časovými charakteristikami systému

Laplaceův obraz výstupní veličiny $Y(p)$ určený např. vztahem (3.10) můžeme rozdělit na regulární část $Y_{rg}(p)$ a neregulární část $Y_{ng}(p)$

$$Y(p) = Y_{rg}(p) + Y_{ng}(p)$$

Regulární část přenosu má póly jen v levé polorovině, neregulární část má póly jen v pravé polorovině a na imaginární ose. Platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{rg}(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{ng}(t) = \begin{cases} \pm \infty & \text{jsou-li pouze reálné póly v pravé polorovině,} \\ \text{konst} & \text{je-li pouze jediný pól, a to } p = 0, \\ \text{neexistuje} & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Úsečka absolutní konvergence regulární části $Y_{rg}(p)$ je $c = 0$, a proto Fourierův obraz regulární části je roven Laplaceovu obrazu, kde $p = j\omega$.
Fourierův obraz regulární části je

$$Y_{rg}(j\omega) = \int_0^{\infty} y_{rg}(t) e^{-j\omega t} dt$$

zpětná transformace je určena vztahem

$$y_{rg}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_{rg}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.40)$$

Regulární část $Y_{rg}(j\omega)$ rozložíme na reálnou a imaginární část

$$Y_{rg}(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega) \quad (3.41)$$

Pro jednoduchost vynecháme u reálné a imaginární části index rg. Vztah (3.41) dosadíme do zpětné transformace (3.40).

Odtud plyne

$$y_{rg}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\text{Re}(\omega) \cos \omega t - \text{Im}(\omega) \sin \omega t] d\omega + \\ + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\text{Re}(\omega) \sin \omega t + \text{Im}(\omega) \cos \omega t] d\omega$$

Protože $y_{rg}(t)$ je reálná funkce, musí být imaginární část na pravé straně rovnice rovna nule. Protože reálná část $\text{Re}(\omega)$ je sudá funkce a imaginární část lichá funkce, můžeme předchozí výraz upravit na tvar

$$y_{rg}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\text{Re}(\omega) \cos \omega t - \text{Im}(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (3.42)$$

Při použití jednostranné Fourierovy transformace je $y_{rg}(t) = 0$ pro $t < 0$. Platí tedy

$$0 = y_{rg}(-t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\text{Re}(\omega) \cos(-\omega t) - \text{Im}(\omega) \sin(-\omega t)] d\omega$$

Odtud je

$$0 = \int_0^{\infty} [\text{Re}(\omega) \cos \omega t + \text{Im}(\omega) \sin \omega t] d\omega$$

Z předchozího vztahu plyne, že reálná a imaginární část frekvenčního přenosu regulární části spolu těsně souvisejí, a proto stačí používat pouze jednu z nich.

Dosadíme-li předchozí vztah do (3.42), dostaneme výsledné vztahy pro výpočet originálu

$$y_{\text{rg}}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}(\omega) \cos \omega t \, d\omega; \quad t > 0 \quad (3.43)$$

nebo

$$y_{\text{rg}}(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}(\omega) \sin \omega t \, d\omega; \quad t > 0 \quad (3.44)$$

Tyto vztahy vyjadřující souvislost mezi frekvenčními a časovými charakteristikami systému platí pro libovolný obraz výstupu $Y(p)$; $p = j\omega$, mající póly pouze v levé polorovině.

Souvislost frekvenční charakteristiky a impulsové funkce

Z předcházejícího výkladu víme, že Laplaceův obraz $F(p)$ impulsové funkce $g(t)$ je roven přenosu systému. Má-li tento přenos póly pouze v levé polorovině (nemá neregulární část), můžeme frekvenční přenos $F(j\omega)$ rozdělit na reálnou a imaginární část

$$F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (3.45)$$

Dosažením předchozích vztahů dostaneme souvislost reálné části $P(\omega)$ nebo imaginární části $Q(\omega)$ frekvenční charakteristiky systému a impulsové funkce

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t \, d\omega, \quad t > 0 \quad (3.46)$$

nebo

$$g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t \, d\omega, \quad t > 0 \quad (3.47)$$

Souvislost mezi frekvenční a přechodovou charakteristikou

Laplaceův obraz $H(p)$ přechodové funkce $h(t)$ je

$$H(p) = \frac{1}{p} F(p)$$

Je-li $F(p)$ regulární, je ustálená hodnota přechodové funkce rovna

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = F(0)$$

Obraz $H(p)$ rozložíme na regulární a neregulární část

$$H_{\text{ng}}(p) = \frac{F(0)}{p}$$

z toho

$$h_{\text{ng}}(t) = F(0) \cdot 1(t) = P(0) \cdot 1(t)$$

$$H_{\text{rg}}(p) = \frac{F(p)}{p} - \frac{F(0)}{p}$$

Fourierův obraz regulární části je po rozložení přenosu $F(p)$ podle (3.45) na reálnou a imaginární část

$$H_{rg}(j\omega) = \frac{Q(\omega)}{\omega} + j \frac{P(0) - P(\omega)}{\omega}$$

Časový průběh regulární části je podle (3.43)

$$h_{rg}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t \, d\omega, \quad t > 0$$

nebo

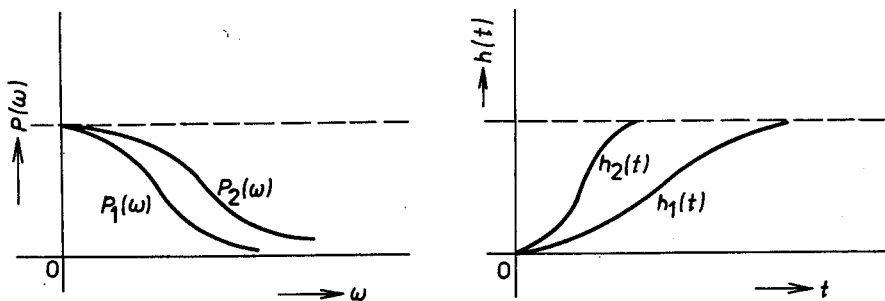
$$h_{rg}(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [P(0) - P(\omega)] \frac{\sin \omega t}{\omega} \, d\omega, \quad t > 0$$

Sečteme-li časové průběhy regulární a neregulární části přechodové charakteristiky, dostaneme po úpravě vztahy mezi přechodovou a frekvenční charakteristikou

$$h(t) = P(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} \, d\omega, \quad t > 0 \quad (3.48)$$

nebo

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} \, d\omega, \quad t > 0 \quad (3.49)$$



Obr. 36. Souvislost mezi frekvenční a přechodovou charakteristikou

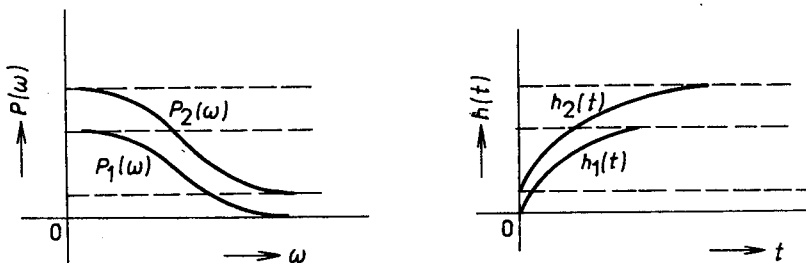
Souvislosti mezi tvarem frekvenční a přechodové charakteristiky lineárního systému

Souvislost mezi přechodovou a frekvenční charakteristikou systému je analyticky určena vztahem (3.49). Dále uvedeme bez odvození některé důležité souvislosti mezi tvary těchto charakteristik, které usnadňují rychlou orientaci.

1. Změníme-li měřítko ω reálné části frekvenční charakteristiky $P(\omega)$, změní se v obráceném poměru také měřítko času přechodové charakteristiky $h(t)$ (obr. 36). Odtud plyne, že čím vyšší kmitočet bude systém přenášet

bude jeho odezva. Funkci $P(n\omega)$ odpovídá přechodová charakteristik

Regulární
v pravé



Obr. 37. Souvislost mezi frekvenční a přechodovou charakteristikou

2. Změníme-li měřítko na ose pořadnic reálné frekvenční charakteristiky $P(\omega)$, změní se ve stejném poměru měřítko na ose pořadnic přechodové charakteristiky $h(t)$ (obr. 37).

3. Podle věty o konečné hodnotě platí

$$h(0) = P(\infty); \quad h(\infty) = P(0)$$

Průběh frekvenční charakteristiky pro $\omega \rightarrow 0$ určuje ustálené stavy odezvy a průběh frekvenční charakteristiky pro velké ω určuje průběh přechodové charakteristiky kolem počátku.

Příklad. Určete podle předcházejících vět počáteční a konečnou hodnotu přechodové charakteristiky systému s přenosem

$$F(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega(\tau j\omega + 1)}$$

Vysvětlíte zřejmý nesouhlas výsledků se skutečností.

4. Je-li pro některé $\omega = \omega_1$ $\lim_{\omega \rightarrow \omega_1} P(\omega) = \infty$, znamená to, že pro $\omega = \omega_1$ má frekvenční přenos pól na imaginární ose.

5. Aby přechodová charakteristika měla maximální překývnutí vždy menší než 18 % ustálené hodnoty, je třeba, aby reálná část frekvenční charakteristiky $P(\omega)$ byla kladná nerostoucí funkce ω . Je-li

$$P(\omega) \geq 0 \quad \text{a} \quad \frac{dP}{d\omega} \leq 0$$

potom

$$h(t) = 1,18h(\infty)$$

Poznámka. Je-li reálná frekvenční charakteristika $P(\omega)$ přibližně obdélníková, je překývnutí přechodové charakteristiky právě 18 %.

6. Aby přechodový děj byl monotónní, stačí, aby reálná frekvenční charakteristika $P(\omega)$ byla spojitá, kladná funkce ω se zápornou derivací $P(\omega)$ podle ω klesající v absolutní hodnotě, neboli

$$P(\omega) \geq 0, \quad \frac{dP}{d\omega} = f(\omega)$$

kde

$$f(\omega) \leq 0, \quad \frac{df}{d\omega} > 0$$

7. Určení horní hranice maximálního překývnutí, má-li reálná frekvenční charakteristika maximum P_{\max} pro $\omega_{\max} \neq 0$. Pro průběh přechodové charakteristiky platí vždy nerovnost

$$\frac{h(t)}{h(\infty)} < 1,18 \frac{P_{\max}}{P(0)}$$

Odtud plyne, že překývnutí δ % bude vždy menší než

$$\delta \% < 1,18 \frac{P_{\max} - P(0)}{P(0)} 100 \%$$

Maximum reálné části nikdy nepřevyšuje maximum amplitudové charakteristiky (absolutní hodnoty přenosu) a odtud plyne známý požadavek, aby rezonanční převýšení $A_{\max} = A_r$ (viz čl. 3.6) frekvenční charakteristiky regulačního obvodu bylo omezeno nerovností

$$\frac{A_{\max}}{A(0)} \leq 1,2 \text{ až } 1,3$$

Potom překývnutí odezvy bude v každém případě menší než 40 až 50 %.

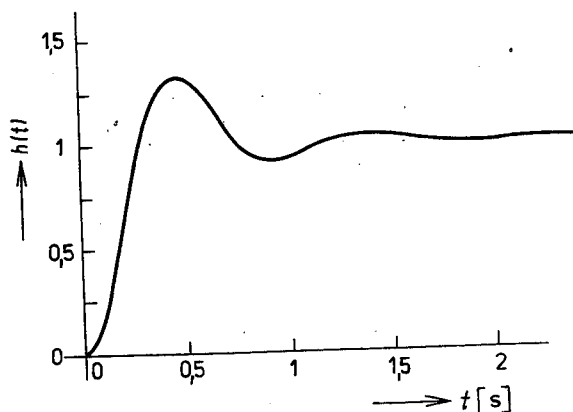
8. Liší-li se reálná frekvenční charakteristika jen málo od lichoběžníku, leží doba T přechodového jevu v oblasti

$$\frac{\pi}{\omega_n} < T < \frac{4\pi}{\omega_n}$$

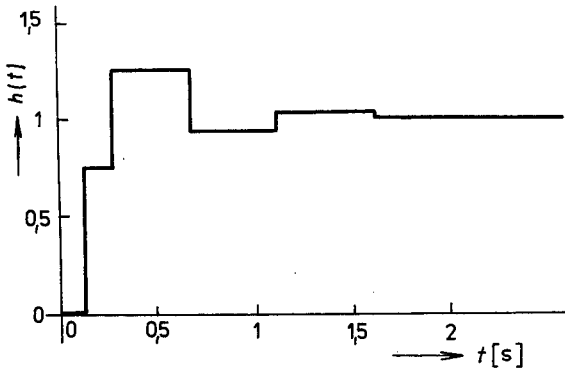
kde ω_n je úhlový kmitočet, pro který platí $P(\omega_n) = 0$.

9. Spodní mezní hodnota doby T přechodového jevu podle intervalu (0 až ω_n), ve které je $P(\omega) > 0$, je

$$T > \frac{\pi}{\omega_n}$$



Obr. 38. Přechodová charakteristika sys



Obr. 39. Aproximace
přechodové charakteristiky
z obr. 38 stupňovitou křivkou

Tabulka 2. Aproximace přechodové charakteristiky stupňovou křivkou – tabulka jednotlivých stupňů

Stupeň	Počáteční bod [s]	Výška	Rozdíl výšek
1	0,14	0,75	0,75
2	0,34	1,25	0,5
3	0,65	0,94	-0,31
4	1,1	1,05	0,11
5	1,63	1	-0,05

Určení frekvenční charakteristiky z přechodové charakteristiky nahrazením přechodové charakteristiky stupňovitou funkcí

Tato metoda předpokládá aproximaci přechodové charakteristiky stupňovitou funkcí, která se rovná součtu různě vysokých a různě zpožděných skoků. Přenos soustavy potom nahradíme přenosem paralelně řazených bloků s dopravním zpožděním a za tohoto předpokladu můžeme snadno zjistit přibližnou frekvenční charakteristiku. Ukažme si postup na příkladu. Přechodová charakteristika nechť má tvar podle obr. 38.

Její průběh můžeme nahradit stupňovitým průběhem podle obr. 39. Charakteristické hodnoty jednotlivých stupňů jsou v tabulce 2.

Aproximovanou přechodovou charakteristiku můžeme tedy napsat v analytickém tvaru

$$h(t) \doteq 0,75 \cdot 1(t - 0,14) + 0,5 \cdot 1(t - 0,34) - 0,31 \cdot 1(t - 0,65) + 0,11 \cdot 1(t - 1,1) - 0,05 \cdot 1(t - 1,63)$$

kde $1(t - T)$ je jednotkový skok v čase $t = T$.

Impulsovou funkci získáme derivací předchozího

$$g(t) = h'(t) = 0,75\delta(t - 0,14) + 0,5\delta(t - 0,34) - 0,31\delta(t - 0,65) + 0,11\delta(t - 1,1) - 0,05\delta(t - 1,63)$$

kde $\delta(t - T)$ má význam zpožděného Diracova impulsu

Fourierova transformace způzděného Diracova impulsu je

$$\mathcal{F}\{\delta(t - T)\} = \int_0^{\infty} \delta(t - T) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega T}$$

Protože přenos systému se rovná Fourierově transformaci impulsové funkce, můžeme přenos systému vyjádřit ve tvaru

$$F(j\omega) = 0,75 e^{-0,14j\omega} + 0,5 e^{-0,34j\omega} - 0,31 e^{-0,65j\omega} + 0,11 e^{-1,1j\omega} - 0,05 e^{-1,63j\omega}$$

Předcházející výraz lze snadno vyčíslit podle Eulerova vzorce nebo určit graficky v komplexní rovině, neboť vektor $e^{-j\omega T}$ má konstantní jednotkovou délku a pouze různý úhel pro různá ωT . Tato metoda je dobrá pro rychlou informaci, ale nevyhniká zvláštní přesností.

3.1.4. Vnitřní popis lineárního spojitého systému a jeho souvislost s vnějším popisem

Vnitřní popis systému vyjadřující vztah mezi vstupem, stavem a výstupem systému můžeme obecně vyjádřit ve tvaru

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \varphi(t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

kde φ je přechodová funkce stavu, která vyjadřuje, jak se stav $\mathbf{x}(t_0)$ v čase t_0 působením řízení $\mathbf{u}_{(t_0, t]}$ na intervalu $t_0 < \tau \leq t$ změnil na stav $\mathbf{x}(t)$ v čase t , \mathbf{g} zobrazení okamžitého stavu, řízení a času na výstup.

U lineárních spojitých systémů je funkce φ lineární vzhledem ke stavu a řízení a vývoj stavu můžeme popsat diferenciální rovnicí

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

kde \mathbf{A} je matice systému rozměru $n \times n$,
 \mathbf{B} matice řízení rozměru $n \times r$,
 \mathbf{C}, \mathbf{D} jsou výstupní matice rozměrů $m \times n$, resp. $m \times r$,
 \mathbf{x}_0 je počáteční stav systému v čase t_0 ,
 n, r, m počet stavů, vstupů a výstupů systému.

Rovnice (3.51) nazýváme stavové rovnice lineárního spojitého systému. Nemění-li lineární systém své vlastnosti v čase (je stacionární, t -invariantní), jsou matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ konstantní matice.

Vnitřní popis lineárního spojitého systému je plně určen čtveřicí matic $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})_n$.

Příklad. Určete stavové rovnice stejnosměrného motoru s cizím buzením. Stejnosměrný motor zde považujeme za dynamický systém se dvěma vstupními veličinami – napětím na kotvě a zatěžovacím momentem a jedinou

Podle (3.53) je řešení při $\mathbf{x}(0) = 0$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{B}_j + \mathbf{D}_j \delta(t - t_0)$$

kde \mathbf{B}_j a \mathbf{D}_j jsou j -té sloupce matic \mathbf{B} a \mathbf{D} . Výstupní vektor $\mathbf{y}(t)$ je vektor impulsových funkcí při impulsu v j -tém řízení. Matice složená z těchto jednotlivých odezv je matice impulsových funkcí $\mathbf{G}(t)$. Platí

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t); \quad t \geq 0 \quad (3.6)$$

Z vnitřního popisu charakterizovaného čtveřicí matic $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})_n$ získáme matici impulsových funkcí podle vztahu (3.67). Dosadíme-li matici impulsových funkcí $\mathbf{G}(t)$ do obecného řešení stavových rovnic, dostaneme vztah

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{G}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau; \quad t \geq t_0 \quad (3.68)$$

První člen na pravé straně předcházející rovnice vyjadřuje odezvu systému na počáteční stav $\mathbf{x}(t_0)$ a druhý člen je maticový zápis konvolutorního integrálu.

Poznámka. Často se zavádí matice

$$\mathbf{K}(t, \tau) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \quad \text{pro všechna } t \quad (3.69)$$

Předcházející vztah se liší od matice impulsových funkcí tím, že platí pro všechna t . Tato matice se nazývá matice váhových funkcí.

Pro lineární nestacionární systém nemůžeme použít přenosy, resp. přenosové matice. Lze u nich ale definovat matici impulsových funkcí. Matici impulsových funkcí lineárního nestacionárního systému je

$$\mathbf{G}(t, \tau) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) + \mathbf{D}(t) \delta(t - \tau) \quad (3.70)$$

Matice impulsových funkcí má dva argumenty – průběžný čas t a čas τ , ve kterém vznikl Diracův impuls. Pomocí této matice zapíšeme odezvu systému

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{G}(t, \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.71)$$

Druhý člen na pravé straně rovnice je opět maticový zápis konvoluce pro nestacionární systém. Matice váhových funkcí lineárního spojitého nestacionárního systému je

$$\mathbf{K}(t, \tau) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \quad \text{pro všechna } t, \tau$$

Nemá fyzikální význam, pouze pro $t \geq \tau$ je totožná s maticí impulsových funkcí

3.1.5. Vazby mezi systémy

Dynamický systém může být složen z podsystemů, přičemž každý podsystem má své dynamické vlastnosti popsané svým vnějším nebo vnitřním popisem. Základní vazby mezi systémy jsou paralelní, sériová a zpětná vazba.

Ukážeme, jaký je vnější a vnitřní popis systému složeného z lineárních spojitých podsystémů, spojených uvedenými vazbami.

Nechť systém S_1 je popsán stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}_1 \end{aligned} \quad (3.72)$$

nebo přenosovou maticí $\mathbf{F}_1(p)$, tj.

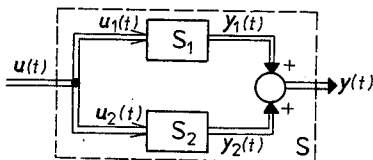
$$\mathbf{Y}_1(p) = \mathbf{F}_1(p) \cdot \mathbf{U}_1(p) \quad (3.73)$$

Systém S_2 je popsán stavovými rovnicemi

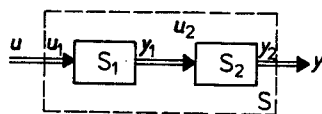
$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_2 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (3.74)$$

nebo přenosovou maticí $\mathbf{F}_2(p)$, tj.

$$\mathbf{Y}_2(p) = \mathbf{F}_2(p) \cdot \mathbf{U}_2(p) \quad (3.75)$$



Obr. 41. Paralelní spojení systémů S_1 a S_2



Obr. 42. Sériové spojení systémů S_1 a S_2

Paralelní spojení

Paralelní spojení systémů S_1 a S_2 je na obr. 41. Složený systém S tvořený paralelním spojením systémů S_1 a S_2 má vnější popis

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{F}(p) \mathbf{U}(p)$$

Vazební podmínky při paralelním spojení jsou (obr. 41)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$$

Protože vektor výstupní veličiny $\mathbf{y}(t)$ je součtem vektorů výstupních veličin systémů S_1 a S_2 , platí

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{Y}_1(p) + \mathbf{Y}_2(p) = [\mathbf{F}_1(p) + \mathbf{F}_2(p)] \mathbf{U}(p)$$

Přenosová matice $\mathbf{F}(p)$ složeného systému S je při paralelním spojení tvořena součtem přenosových matic $\mathbf{F}_1(p)$ a $\mathbf{F}_2(p)$ podsystémů S_1 a S_2

$$\mathbf{F}(p) = \mathbf{F}_1(p) + \mathbf{F}_2(p) \quad (3.76)$$

Stavové rovnice složeného systému získáme zavedením složeného stavového vektoru \mathbf{x} tvořeného stavovými vektory podsystémů S_1 a S_2

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

vstupním vektoru $\mathbf{u}(t_0, t_1)$, ale také na počátečních podmínkách systému na začátku experimentu. Tyto počáteční podmínky tvoří přibližně počáteční stav systému A . Máme-li tedy počáteční stav systému A , který označíme $\mathbf{x}(t_0)$, můžeme tvrdit, že výstupní vektor $\mathbf{y}(t_0, t_1)$ závisí na $\mathbf{x}(t_0)$ a $\mathbf{u}(t_0, t_1)$, ale nezávisí na hodnotách vstupního vektoru \mathbf{u} před okamžikem t_0 . Jinak řečeno znalost počátečního stavu a následujících hodnot vstupní veličiny \mathbf{u} je vše, co potřebujeme k určení výstupního vektoru \mathbf{y} po uplatnění vstupního vektoru \mathbf{u} .

Počáteční podmínky systému A mohou být obecně vyjádřeny velmi různě. Vzniká přirozeně otázka, zda určitý popis počátečních podmínek lze označit jako počáteční stav systému A . Předpokládejme, že $\mathbf{x}(t_0)$ je proměnná, která se může měnit v prostoru X . Tento prostor označme jako stavový prostor systému A a pro jednoduchost předpokládejme, že X nezávisí na t_0 . Dále nechť $\mathbf{x}(t) = \alpha$ je stav systému A , přičemž α je prvek z prostoru X . Potom lze zavést definici stavu systému [14]:

Proměnnou $\mathbf{x}(t)$ lze označit jako stav systému A v okamžiku t , splňuje-li tyto tři podmínky konzistence, tj. vlastnosti relace vstup – stav – výstup:

1. Vektory $\mathbf{x}(t_0)$ a $\mathbf{u}(t_0, t)$, kde $\mathbf{u}(t_0, t)$ vyjadřuje segment vstupního vektoru na polouzavřeném intervalu (t_0, t) , jednoznačně určují segment výstupního vektoru $\mathbf{y}(t_0, t)$ pro všechny počáteční stavy vektoru $\mathbf{x}(t_0) \in X$, pro všechny okamžiky $t_0 \in T$, pro všechny $t \geq t_0$ a všechny vstupní funkce $\mathbf{u} \in U$, tj. z prostoru vstupních funkcí systému A . Platí, že

$$\mathbf{y}(t_0, t) = \tilde{F}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)] \quad (2.10)$$

nebo

$$\mathbf{y}(t) = F[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)] \quad (2.11)$$

Z výkladu vyplývá, že A je deterministický systém (nemá prvky náhodné povahy) a není anticipativní, tzn. že současné hodnoty výstupu nezávisí na budoucích vstupních hodnotách.

2. Nechť t_1 je jakýkoliv okamžik mezi t_0 a t . Potom pro každý vstupní vektor $\mathbf{u}(t_0, t)$ a pozorovaný výstupní vektor $\mathbf{y}(t_0, t)$, které jsou uvažovány od okamžiku t_1 tak, že dávají segmenty $\mathbf{u}(t_1, t)$ a $\mathbf{y}(t_1, t)$, existuje neprázdná podmnožina prvků z prostoru X , označená $\Sigma[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)]$, jejíž každý prvek α vyhovuje vztahu

$$\mathbf{y}(t_1, t) = F[\alpha; \mathbf{u}(t_0, t)] \quad (2.12)$$

Tato podmínka zaručuje, že každému páru $\mathbf{u}(t_1, t)$, $\mathbf{y}(t_1, t)$ přísluší počáteční stav $\mathbf{x}(t_1)$ v X .

3. Jestliže vstupní vektor $\mathbf{u}(t_0, t_1)$ je neměnný a $\mathbf{u}(t_1, t)$ se mění přes všechny vstupy prostoru vstupních funkcí systému A , je průnik množin $\Sigma[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)]$ uvažovaných přes všechny $\mathbf{u}(t_1, t)$ neprázdná množina.

Tato podmínka zajišťuje existenci alespoň jednoho stavu v X , který se vztahuje ke všem možným párům vstupů a výstupů.

Z podmínky 2 a 3 vyplývá, že stav systému A v okamžiku t je určen počátečním stavem vektoru $\mathbf{x}(t_0)$ a vektorem vstupních funkcí $\mathbf{u}(t_0, t)$, tj.

$$\mathbf{x}(t) = G[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)] \quad (2.13)$$

kde G je jednoznačná funkce svých argumentů. Rovnice (2.13) je stavová rovnice systému.

Podle toho můžeme dva stavové vektory α' a α'' považovat za ekvivalentní, jestliže pro všechna \mathbf{u} ze vstupního prostoru funkcí systému A je odezva systému při počátečním stavu α' totožná s odezvou příslušnou počátečnímu stavu α'' .

Máme-li zaveden pojem stav systému, můžeme uvést definici dynamického systému podle R. E. Kalmana [2].

Dynamický systém je matematická struktura, definovaná těmito axiomy:

- 1° Je dán stavový prostor X a množina T hodnot času, na nichž je definováno chování systému. Prvky prostoru X jsou stavy systému; množina T je podmnožina reálných čísel;
- 2° Je dán prostor Ω funkcí času, definovaný na T , které jsou příslušnými vstupy systému; Ω je vstupní prostor systému;
- 3° a) Pro libovolný počáteční čas t_0 , $t_0 \in T$, libovolný počáteční stav \mathbf{x}_0 , $\mathbf{x}_0 \in X$, a pro libovolný vstupní vektor \mathbf{u} , $\mathbf{u} \in \Omega$, definovaný pro $t = t_0$, jsou budoucí stavy systému určeny funkcí φ , definovanou na kartézském součinu $\Omega \times T \times T \times X$ s hodnotami v X , tj.

$$\varphi : \Omega \times T \times T \times X \rightarrow X'$$

vyjádřenými ve tvaru

$$\varphi_{\mathbf{u}}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_1, \quad t \geq t_0$$

Funkce φ je přechodná funkce systému.

- b) Pro libovolné prvky t_0, t_1, t_2 množiny T , $t_0 \leq t_1 \leq t_2$, libovolné \mathbf{x}_0 , $\mathbf{x}_0 \in X$, a libovolné dané \mathbf{u} , $\mathbf{u} \in \Omega$, definované na průniku $\langle t_0, t_1 \rangle \cap T$, platí vztahy

$$\varphi_{\mathbf{u}}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\varphi_{\mathbf{u}}(t_2; t_0, \mathbf{x}_0) = \varphi_{\mathbf{u}}(t_2; t_1, \varphi_{\mathbf{u}}(t_1, t_0, \mathbf{x}_0))$$

- c) Systém musí být nonanticipativní (tj. reaguje jen na minulé a přítomné hodnoty vstupů), tj. jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Omega$, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$ na intervalu $\langle t_0, t \rangle \cap T$, musí platit vztah

$$\varphi_{\mathbf{u}}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \varphi_{\mathbf{v}}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$$

- d) Každá výstupní funkce systému je reálnou funkcí ψ , definovanou na kartézském součinu $T \times X$.
- e) Funkce φ a ψ jsou spojité na oborech, na nichž jsou definovány.

Systém je deterministický, můžeme-li jeho výstupní vektor a stav v jakémkoli okamžiku t určit s jistotou pomocí jeho stavového vektoru v nějakém okamžiku $t_0 < t$ a ze známého vstupního vektoru na polouzavřeném intervalu $\langle t_0, t \rangle$.

System je stochastický, jestliže znalost jeho stavového vektoru v nějakém okamžiku t_0 a vstupního vektoru na intervalu $\langle t_0, t \rangle$ umožňuje určit výstupní vektor a stavový vektor systému v okamžiku $t > t_0$ jen s určitou pravděpodobností nebo jiným statistickým způsobem.

Jsou-li vstupní, stavové a výstupní vektory definovány pro každé t z nějakého časového intervalu, nazýváme systém spojitý. Jsou-li vstupní a stavové vektory definovány jen v diskrétních okamžicích času t_k , kde k je posloupnost čísel (zpravidla celých) z nějakého intervalu, nazýváme systém diskrétní.

Zavedením stavu systému je výstupní vektor systému pro $t > t_0$ jednoznačně určen vztahem

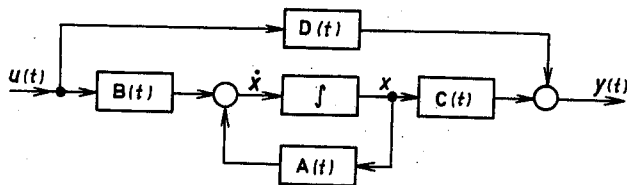
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t)] \quad (2.14)$$

a nazývá se odezva systému. Pro funkci $\mathbf{Y}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t)]$ musí platit, že odezva odpovídající počátečnímu stavu vektoru $\mathbf{x}(t_0)$ a vstupnímu vektoru $\mathbf{u}(t_0, t_1)$ odpovídá odezvě na signál $\mathbf{u}(t_0, t)$ při $\mathbf{x}(t_0)$ a na za ním následující signál $\mathbf{u}(t, t_1)$ při počátečním stavu vektoru $\mathbf{x}(t)$ pro $t_0 \leq t \leq t_1$.

Na základě uvedeného výkladu lze lineární dynamické systémy popsat rovnicemi typu (2.13) a (2.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

kde $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ a $\mathbf{D}(t)$ jsou t -variantní matice. Bloková interpretace rovnic (2.15) je na obr. 8.



Obr. 8. Bloková interpretace stavových rovnic lineárního dynamického systému

Stavové rovnice nelineárních dynamických systémů mají tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{X}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{Y}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \end{aligned} \quad (2.16)$$

\mathbf{X} a \mathbf{Y} jsou obecné nelineární funkce proměnných $\mathbf{x}(t)$ a $\mathbf{u}(t)$. Konečný automat lze popsat stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n] &= \mathbf{X}[\mathbf{x}(n-1), \mathbf{u}(n-1)] \\ \mathbf{y}[n] &= \mathbf{Y}[\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Stochastické systémy popisujeme stavovou rovnicí

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(r) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(r) \mathbf{u}(t) \quad (2.18)$$

kde matice $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ jsou funkce náhodného vektoru \mathbf{r} . Po zavedení definice stavu systému lze zjednodušeně formulovat podmínku fyzikální realizovatelnosti takto:

Fyzikálně realizovatelné jsou systémy, jejichž stav a výstup jsou v libovolném okamžiku t_0 funkcí jen takových vstupních signálů (proměnných), které působily před okamžikem t_0 , tj. pro $t < t_0$.

Na základě vymezení pojmu systém můžeme jeho stav definovat také jako nejmenší množinu čísel, které musíme znát v čase $t = t_0$, abychom mohli jednoznačně určit další chování systému pro libovolný čas $t \geq t_0$ a libovolný vstupní signál z dovolené množiny vstupních signálů. Přitom předpokládáme, že vstupní signál je definován pro všechna $t > t_0$.

K danému fyzikálnímu systému lze určit stavový vektor \mathbf{x} s různými složkami, které nazýváme stavové proměnné. Stavové proměnné lze určit pro tentýž systém různými postupy; pojednáme o nich v další části této kapitoly.

2.1.3. Ekvivalence systémů

V axiomatické teorii systémů je stavový vektor \mathbf{x} uvažován jako abstraktní veličina, kterou nelze obecně přímo měřit. Vektory vstupu \mathbf{u} a výstupu \mathbf{y} jsou naopak veličiny, které mají konkrétní fyzikální význam.

Obecné stavové rovnice dynamického systému (2.16)

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{X}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$$

lze v podstatě chápat jako:

a) abstraktní relace mezi abstraktními veličinami \mathbf{u} , \mathbf{x} , \mathbf{y} definované pomocí abstraktních transformací \mathbf{X} a \mathbf{Y} .

b) abstraktní model fyzikálních relací mezi fyzikálními veličinami \mathbf{u} a \mathbf{y} a abstraktní veličinou \mathbf{x} , přičemž předpokládáme, že v libovolném okamžiku t jsme zvolili libovolný, ale pevný souřadnicový systém ve vektorovém prostoru; symbol $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ můžeme interpretovat jako n -tici čísel, představující souřadnice stavového vektoru. V teorii automatického řízení je účelné vycházet z druhého přístupu. Podstata spočívá v tom, že výběr souřadnicového systému ve stavovém prostoru X je zcela libovolný, zatímco ve vstupním a výstupním prostoru žádná libovolnost není přípustná, protože vektory \mathbf{u} a \mathbf{y} jsou definovány svými složkami, které mají zcela konkrétní fyzikální význam.

Z možnosti volby souřadnicového systému prostoru X však plynou výhody, vycházející z tzv. ekvivalence systémů. Dva systémy S a \bar{S} jsou ekvivalentní fyzikálně, dávají-li na stejné vstupy $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ stejné odezvy $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}$ pro všechna $\mathbf{u} \in U$ a pro všechny počáteční stavy \mathbf{x}_0 a $\bar{\mathbf{x}}_0$, které vyhovují podmínce

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$$

(2.19)

Je zcela přirozené, řekneme-li, že dva systémy S a \bar{S} jsou ekvivalentní, jestliže ve všech situacích vykazují stejné chování nebo jestliže reagují zcela stejně na stejné podněty. Nejdůležitější je, zda pozorovatel je schopen rozlišit systém S od systému \bar{S} na základě experimentování, tj. působením na vstupy obou systémů s pozorováním jejich výstupů. Jestliže pozorovatel nemůže žádným výběrem vstupu rozlišit systém S od systému \bar{S} , lze říci, že oba systémy jsou ekvivalentní. Protože mohou existovat různé situace (jsou nebo nejsou známy počáteční stavy systémů S a \bar{S} , množina přípustných vstupů může nebo nemusí být omezená apod.), je třeba definovat různé typy ekvivalence [7].

Důležitý případ např. nastane, jde-li o ekvivalenci při prostém zobrazení. Toto zobrazení je lineární, tj. platí

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{P}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}\tag{2.20}$$

kde \mathbf{P} je regulární matice typu $n \times n$ s konstantními prvky,

$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ je vektor stavu systému S ,

$\bar{\mathbf{x}}(t) = [\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)]$ je vektor stavu systému \bar{S} .

Ekvivalentní realizací přenosové funkce je pro speciální případ i Lurjeho transformace.

O ekvivalenci stavů systému jsme se zmínili v odst. 2.1.2.

2.2. Popis dynamických systémů ve stavovém prostoru

2.2.1. Vektorově maticový model systému

V tomto článku se budeme zabývat systémy, jejichž dynamické chování lze popsat obyčejnou diferenciální rovnicí řádu n nebo n obyčejnými diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Přitom první způsob popisu lze přepsat vždy na druhý a naopak. Např. mějme diferenciální rovnici

$$x^{(n)} = f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}, u, t)\tag{2.21}$$

kde u je akční veličina soustavy. Definujeme-li nové proměnné

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\ x_2 &= x' \\ &\vdots \\ x_n &= x^{(n-1)}\end{aligned}$$

můžeme rovnici (2.21) přepsat na tvar

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n \\ x'_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, u, t)\end{aligned}\tag{2.22}$$

kde (2.22) je soustava diferenciálních rovnic prvního řádu.

Mnohorozměrovou soustavu s r vstupy a p výstupy můžeme popsat soustavou n diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru

$$x'_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.23)$$

kde x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, jsou stavové veličiny a u_i , $i = 1, 2, \dots, r$, jsou akční veličiny. Poznamenejme, že stavové veličiny nemusí být nutně měřitelné. Měřitelné mohou být jen vstupní a výstupní veličiny soustavy a ty umožňují odhadovat stavové veličiny.

Výstupní veličiny soustavy jsou funkcí stavových a vstupních veličin.

$$y_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \quad j = 1, 2, \dots, p \quad p \leq n \quad (2.24)$$

Rovnici (2.23) nazýváme rovnice dynamiky a rovnici (2.24) nazýváme rovnice výstupu soustavy.

I pro dosti malá n je účelné psát rovnici (2.23) a (2.24) ve vektorově maticovém zápisu

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

kde $\mathbf{x} \in R_x^n$, $\mathbf{u} \in R_u^r$ a $\mathbf{y} \in R_y^p$.

Ve zvláštním případě lineárních t -variantních systémů můžeme rovnice (2.23) a (2.24) psát ve tvaru

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= a_{i1}(t)x_1 + \dots + a_{in}(t)x_n + b_{i1}(t)u_1 + \dots + b_{ir}(t)u_r \\ i &= 1, 2, \dots, n \\ y_j &= c_{j1}(t)x_1 + \dots + c_{jn}(t)x_n + d_{j1}(t)u_1 + \dots + d_{jr}(t)u_r \\ j &= 1, 2, \dots, p \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

nebo ve vektorově maticovém zápisu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \quad (2.28)$$

Pro lineární t -invariantní systémy se rovnice (2.27) zjednoduší na tvar

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.30)$$

kde \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} jsou číselné matice rozměrů $(n; n)$, $(n; r)$, $(p; n)$, $(p; r)$. Tyto rozměry plynou z rozměru vektorů \mathbf{x} , \mathbf{u} , \mathbf{y} , definovaných při (2.25). U systému s jedním vstupem a s jedním výstupem je $r = 1$ a $p = 1$. Matice stavového popisu označme \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T , d .

Použijeme dále toto pojmenování: Soustava stavových rovnic se skládá z rovnice dynamiky (2.27) a z rovnice výstupu (2.28). V rovnici dynamiky je $\mathbf{A}(t)$ matice dynamiky a $\mathbf{B}(t)$ váhová matice vstupu. V rovnici výstupu je $\mathbf{C}(t)$ váhová matice stavového vektoru a $\mathbf{D}(t)$ váhová matice vstupu. Pro stručnost vyjadřování můžeme psát krátce o maticích místo o váhových maticích.

Jednoznačnost řešení uvedených rovnic lze kontrolovat pomocí této věty:

Věta 2.2.1: Nechť pro dynamický systém definovaný rovnicemi

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

platí:

a) funkce $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ jsou jednoznačné a spojité v oblasti Γ definované pro

$$\begin{aligned} |x_i - x_{i0}| &< h_i, & i = 1, 2, \dots, n \\ 0 &\leq t - t_0 < \tau \end{aligned}$$

a existují kladná čísla M_i , $i = 1, 2, \dots, n$, taková, že

$$|f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)| \leq M_i$$

v oblasti Γ a

b) jsou splněny Lipschitzovy podmínky, že

$$|f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) - f_i(z_1, z_2, \dots, z_n, t)| \leq K \sum_{j=1}^n |x_j - z_j|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

kde $(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ a $(z_1, z_2, \dots, z_n, t)$ jsou libovolné body z oblasti Γ a K je kladná konstanta.

Pak existuje jednoznačné řešení definované na intervalu

$$0 \leq t - t_0 < T, \quad T = \min \left(\tau, \frac{h_1}{M_1}, \dots, \frac{h_n}{M_n} \right)$$

splňující počáteční podmínky $x_i(t_0) = x_{i0}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Důkaz věty 2.2.1 je v práci [6]. Z formulace věty 2.2.1 snadno můžeme odvodit modifikaci pro systém s jedním vstupem a s jedním výstupem.

Jsou-li předpoklady věty 2.2.1 splněny, můžeme určit množinu řešení $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, pro každou množinu počátečních podmínek x_{j0} , $j = 1, 2, \dots, n$.

Platí tedy

$$x_i(t) = x_i(x_{j0}, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.31)$$

Řešení, které je funkcí n počátečních podmínek, se nazývá obecné řešení systému n -tého řádu.

Lineárně nezávislé složky $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, vektoru $\mathbf{x}(t)$ lineárního systému n -tého řádu označujeme jako stavové veličiny, jestliže jsou jednoznačně určeny počátečním stavovým vektorem $\mathbf{x}(t_0)$ a vstupním vektorem $\mathbf{u}(t)$.

Rovnice (2.25) definující lineární nebo nelineární systém má jednoznačné řešení pro jakékoliv $\mathbf{x}(t_0)$ a $\mathbf{u}(t)$ za předpokladu, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ je jednoznačný vektor funkcí hladkých v intervalu $0 \leq t - t_0$.

V takovém případě je $\mathbf{x}(t)$ stavový vektor a jeho n složek jsou stavové veličiny. Připomeňme, že volba stavových veličin je pro daný systém mnohoznačná.

Poznamenejme, že je-li $\mathbf{u}(t)$ nespojitý signál v okamžiku $t = t_0$, není počáteční vektor $\mathbf{x}(t_0)$ jednoznačný. Za počáteční stav proto bereme stav v $t = t_0^+$ a působení vstupního signálu $\mathbf{u}(t)$ uvažujeme v okamžiku $t = t_0^+$.

Při regulaci otáček motoru měřených tachometrem je výstupní (tj. regulovaná) veličina

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = [0 \ 1 \ 0] \mathbf{x} \quad (2.34)$$

při regulaci úhlu natočení α je však

$$y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \quad (2.35)$$

Přestože můžeme pro regulovanou soustavu ve zvoleném příkladu vyjádřit rovnicemi (2.34) a (2.35) dvě různé regulované veličiny, jde o soustavu jedno-rozměrovou, neboť úhel natočení α a úhlová rychlost ω jsou vzájemně závislé veličiny. Tuto závislost vyjadřuje vztah (2.32).

Obecně lze vyjádřit dynamiku soustavy ve zvoleném příkladu ve stavovém prostoru opět rovnicemi (2.29) a (2.30).

2.2.2. Přepis obyčejné diferenciální a diferenční rovnice na stavové rovnice

Příklady určení matematického modelu regulované soustavy uvedené v čl. 2.2.1 vycházely většinou z konstrukčních údajů o soustavě a z popisu elementárních dějů probíhajících v soustavě. Někdy je třeba sestavit matematický model regulované soustavy ve stavovém prostoru ze známé diferenciální nebo diferenční rovnice popisující dynamiku soustavy. Protože volba stavových veličin není jednoznačná, jak již bylo uvedeno, nelze ukázat jen jeden postup pro přepis diferenciální a diferenční rovnice do stavového prostoru. Ukážeme si proto jen takové příklady přepisu, které se často vyskytují. Příklady uvedené v této kapitole se vztahují k jednorozměrovým soustavám.

Postup I.

Mějme soustavu (např. t -invariantní regulovanou soustavu) se vstupní veličinou u a výstupní veličinou y , jejíž dynamika je popsána lineární diferenciální rovnicí

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t), \quad n \geq m, a_n = 1 \quad (2.36)$$

Zavedme pomocnou veličinu $\zeta(t)$ tak, že

$$\sum_{i=0}^n a_i \zeta^{(i)}(t) = u(t), \quad a_n = 1 \quad (2.37)$$

$$\sum_{j=0}^m b_j \zeta^{(j)}(t) = y(t), \quad m \leq n \quad (2.38)$$

a definujme stavové veličiny podle vztahů

$$\zeta^{(i)}(t) = x_{i+1}(t), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.39)$$

$$x_{i+1}(t) = x'_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.40)$$

Rovnici (2.36) můžeme pak nahradit soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= x_1(t) \\ \zeta'(t) &= x_2(t) = x_1'(t) \\ &\vdots \\ \zeta^{(n-1)}(t) &= x_n(t) = x_{n-1}'(t) \\ \zeta^{(n)}(t) &= x_n'(t) = u(t) - a_{n-1}x_n(t) - \dots - a_1x_2(t) - a_0x_1(t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Rovnice (2.38) se zavedenými stavovými veličinami definuje transformaci stavových veličin na výstupní veličinu y

$$b_0x_1(t) + b_1x_2(t) + \dots + b_{n-1}x_n(t) + b_nx_n'(t) = y(t), \quad n = m \quad (2.42)$$

Dosadíme-li za $x_n'(t)$ podle (2.41), dostaneme

$$y(t) = (b_0 - a_0b_n)x_1(t) + (b_1 - a_1b_n)x_2(t) + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)x_n(t) + b_nu(t) \quad (2.43)$$

Rovnice (2.41) a (2.43) lze přepsat na obvyklý tvar stavových rovnic (2.29) a (2.30).

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.44)$$

$$y(t) = [b_0 - a_0b_n, b_1 - a_1b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1}b_n] x(t) + b_nu(t) \quad (2.45)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [b_0 - a_0b_n, b_1 - a_1b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1}b_n], \quad d = b_n \quad (2.46)$$

Matice \mathbf{A} i matice \mathbf{c} ní transponovaná je v tzv. Frobeniově tvaru. Z tvaru matice \mathbf{c}^T je patrné zjednodušení pro $b_n = 0$.

Stavové rovnice definované rovnicemi (2.41) a (2.43) můžeme vyjádřit také jediným blokovým schématem stavových rovnic, uvedeným na obr. 15 plně pro $m = n - 1$ a čárkovaně pro $m = n$.

Pokud jsou konstanty b_1, b_2, \dots, b_{n-1} nulové a $b_0 = 1$, jsou stavové veličiny $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, shodné s výstupní veličinou soustavy a jejími derivacemi, tj. s $y^{(i-1)}(t), i = 1, 2, \dots, n$. To je určitá výhoda použíté definice stavových veličin.

Je třeba poznamenat, že rovnice (2.36) neurčuje vnitřní strukturu soustavy. Volbou stavových veličin byla však tato struktura zvolena a má tu vlastnost, že soustava popsaná rovnicemi (2.44) a (2.45) je vždy říditelná, avšak nemusí být pozorovatelná. Tak je tomu např. ve zvláštním případě, kdy rovnice (2.36) má tvar

$$y'(t) + y(t) = u'(t) + u(t)$$

Definice říditelnosti a pozorovatelnosti je uvedena v odst. 2.3.

Impulsovou charakteristiku určíme jako odezvu na jednotkový impuls při nulových počátečních podmínkách. Řešení rovnice (2.69) je

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}_1(t-\tau)} \mathbf{b}_1 u(\tau) d\tau \quad (2.75)$$

Pro $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, $u(\tau) = \delta(\tau)$ a pomocí (2.70) lze vyjádřit impulsovou charakteristiku výrazem

$$y(t) = \mathbf{c}_1^T e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{b}_1 \quad (2.76)$$

Z porovnání (2.73) a (2.76) plyne

$$\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}_1 t}\} = (\mathbf{I}p - \mathbf{A}_1)^{-1} \quad (2.77)$$

kde

$$P(\mathbf{A}_1) = \det[\mathbf{I}p - \mathbf{A}_1] \quad (2.78)$$

je charakteristický polynom systému popsaného rovnicí (2.69) a (2.70).

2.2.3. Převod stavových rovnic na diferenciální a diferenční rovnice

Opacnou úlohou k úloze řešené v odst. 2.2.2 je určení koeficientů diferenciální nebo diferenční rovnice, známe-li realizaci systému, tj. matice \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T , d . Pokud se nám podaří transformovat dané matice stavového popisu tak, aby matice \mathbf{A} měla Frobeniův tvar, s koeficienty a_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, $a_n = 1$, můžeme považovat úlohu za řešenou. Pak totiž i matice \mathbf{b} , \mathbf{c}^T , d mají zcela určitý tvar umožňující určit konstanty b_i , $i = 0, 1, \dots, n$, diferenční rovnice.

Jedna z možností je transformace na tzv. normální formu dosažitelnosti se stavovým vektorem \mathbf{x}_D

$$\mathbf{x}_D = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_D \quad (2.79)$$

kde \mathbf{T} je nesusingulární transformační matice definovaná výrazem

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{Q} = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (2.80)$$

Dosadíme-li do původních stavových rovnic za \mathbf{x} podle (2.79), dostaneme po transformaci

$$\mathbf{x}'_D(t) = \mathbf{A}_D \mathbf{x}_D(t) + \mathbf{b}_D u(t) \quad (2.81)$$

$$y(t) = \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D(t) + du(t) \quad (2.82)$$

což je zmíněná normální forma dosažitelnosti, kde

$$\mathbf{A}_D = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_D = \begin{bmatrix} c_{D1} \\ c_{D2} \\ \vdots \\ c_{Dn} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Napišeme-li přenos soustavy

$$S(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1}}{a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n} \quad (2.84)$$

jsou koeficienty a_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, přímo prvky matice \mathbf{A}_D v (2.83). Koeficienty b_i , $i = 0, 1, \dots, k, \dots, n-1$, čitatele $S(p)$ jsou obecně definovány vztahem

$$b_k = \sum_{i=1}^{n-k} c_{Di} a_{i+k} \quad (2.85)$$

Protože

$$\mathbf{c}_D^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} = [\mathbf{c}^T \mathbf{b}, \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b}, \dots, \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}] \quad (2.86)$$

a rozvoj impulsové charakteristiky (2.76) v mocninnou řadu je

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}^T \mathbf{A}^k \mathbf{b} \frac{t^k}{k!} \quad (2.87)$$

plyne z porovnání vztahů (2.86) a (2.87) souvislost prvků matice \mathbf{c}_D s impulsovou charakteristikou. V diskrétním případě jsou prvky matice \mathbf{c}_D přímo diskrétními hodnotami impulsové charakteristiky.

Mají-li matice stavového popisu tvar (2.83), musí transformační matice (2.80) z nich sestavená být nutně jednotkovou maticí, neboť ve skutečnosti není třeba žádnou transformaci na normální formu dosažitelnosti provádět. Skutečně

$$\mathbf{T}_D^{-1} = [\mathbf{b}_D, \mathbf{A}_D \mathbf{b}_D, \dots, \mathbf{A}_D^{n-1} \mathbf{b}_D] = \mathbf{I} \quad (2.88)$$

K normální formě dosažitelnosti existuje duální forma, kterou nazveme normální forma pozorovatelnosti, jejíž příslušné matice a stavový vektor označme indexem P. Platí

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_D^T, \quad \mathbf{b}_P = \mathbf{c}_D, \quad \mathbf{c}_P^T = \mathbf{b}_D^T \quad (2.89)$$

Transformaci z původní realizace \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T , d přímo na normální formu pozorovatelnosti umožňuje substituce

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{T} \mathbf{x} \quad (2.90)$$

kde transformační matice \mathbf{T} je

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Z obdobných důvodů, které byly uvedeny v souvislosti s výrazem (2.88), je také

$$\mathbf{T}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_P^T \\ \mathbf{c}_P^T \mathbf{A}_P \\ \vdots \\ \mathbf{c}_P^T \mathbf{A}_P^{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (2.92)$$

Popis určený rovnicemi (2.44) a (2.45) se nazývá normální forma říditelnosti. Příslušné matice označme indexem R. Pro $b_n = 0$ je

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_R = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

K normální formě říditelnosti existuje také duální forma, kterou lze nazvat normální forma rekonstruovatelnosti, jejíž příslušné matice a stavový vektor označme indexem K. Platí

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A}_R^T, \quad \mathbf{b}_K = \mathbf{c}_R, \quad \mathbf{c}_K^T = \mathbf{b}_R^T \quad (2.94)$$

Příslušné transformační matice umožňující určit z původní realizace \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T , d normální formu říditelnosti nebo rekonstruovatelnosti jsou v literatuře [12].

Příklad. Mějme realizaci \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T , d a stanovme realizaci \mathbf{A}_D , \mathbf{b}_D , \mathbf{c}_D^T , d .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

Řešení

Realizace \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , d se shoduje s tvary matic v (2.50) a (2.51) pro $b_n = 0$. K určení konstant a_i , b_i , $i = 0, 1, 2$, není tedy třeba provádět transformaci na normální formu dosažitelnosti, neboť uvedené parametry lze přičíst přímo z realizace \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T , d . Tato okolnost nám však umožní snadno demonstrovat správnost transformace provedené podle zadání.

Podle (2.80) je transformační matice

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & -8 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_D = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -15 & 18 & -23 \\ -7 & 7 & -7 \\ -3 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & -8 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_D = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -15 & 18 & -23 \\ -7 & 7 & -7 \\ -3 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_D^T = \mathbf{c}^T \mathbf{Q} = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & -8 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix} = [1, 1, -5]$$

Podle (2.85) vypočítáme

$$b_0 = c_{D1}a_1 + c_{D2}a_2 + c_{D3}a_3 = 2$$

$$b_1 = c_{D1}a_2 + c_{D2}a_3 = 3$$

$$b_2 = c_{D1}a_3 = 1$$

2.3. Vlastnosti systémů

2.3.1. Dosažitelnost, říditelnost a stabilizovatelnost

Nyní uvedeme některé základní vlastnosti systémů, které vyplývají ze stavového popisu a které můžeme s výhodou využít nejen k analýze, ale v některých případech i k syntéze systémů. Budeme se přitom současně zabývat jak spojitými, tak diskrétními systémy a průběžně upozorníme na případné rozdíly.

Definice 2.3.1: Stav $\mathbf{x}(t_1)$ lineárního systému je dosažitelný, existuje-li časový okamžik $t_0 < t_1$, kde $(t_1 - t_0)$ je konečný interval, a takový vstup $\mathbf{u}(t)$, kterým se systém převede z počátečního stavu $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ do žádaného stavu $\mathbf{x}(t_1)$.

Definice 2.3.2: Stav $\mathbf{x}(t_1) \neq \mathbf{0}$ lineárního systému je říditelný, existuje-li časový okamžik $t_2 > t_1$ a takový vstup $\mathbf{u}(t)$, kterým se systém převede ze stavu $\mathbf{x}(t_1)$ do stavu $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{0}$ a interval $t_2 - t_1$ je konečný.

Byl také zaveden pojem úplná dosažitelnost systému (nebo plná říditelnost) v čase t , což znamená, že každý stav $\mathbf{x}(t) \in X$ může být dosažitelný (nebo říditelný). Místo úplné dosažitelnosti (říditelnosti) systému použijeme dále pro stručnost jen označení dosažitelnost (říditelnost) systému.

U t -invariantních diskrétních systémů dosažitelnost a říditelnost stavu nezávisí na časovém okamžiku t_1 . Pracuje-li navíc systém spojitě, je každý dosažitelný stav rovněž říditelný, takže v odborné literatuře se v souvislosti se spojitě pracujícími systémy hovoří většinou jen o říditelnosti, neboť není třeba dosažitelnost a říditelnost stavu rozlišovat. Říditelný spojitě pracující lineární systém může být převeden z počátečního stavu $\mathbf{x}(t_0)$ vhodným vstupním signálem za konečnou dobu do libovolného jiného stavu. O diskrétním systému to platí jen tehdy, pokud ve stavové rovnici

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{q}\mathbf{u}(k) \quad (2.95)$$

$$\det \mathbf{F} \neq 0 \quad (2.96)$$

Pro diskrétní stavový popis spojitě pracujících systémů platí

$$\mathbf{F} = \exp[\mathbf{A}T] \quad (2.97)$$

kde T je perioda vzorkování a

$$\det \exp[\mathbf{A}T] = \exp[\text{st } \mathbf{A}T] \quad (2.98)$$

kde $\text{st } [\mathbf{A}T]$ znamená stopu matice $\mathbf{A}T$. Pro jakoukoli hodnotu $\text{st } [\mathbf{A}T]$ je $\det \mathbf{F} > 0$, a matice \mathbf{F} je tedy regulární. Proto matice \mathbf{F} příslušná diskrétnímu popisu spojitěho

má hodnotu $h = n$. Pro $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r]$, kde $\mathbf{g}_j, j = 1, 2, \dots, r$ jsou sloupce matice lze n lineárně nezávislých sloupců matice \mathbf{Q}_D vyjádřit obecně tvarem $\mathbf{F}^i \mathbf{g}_j, i = 0, 1, \dots, n-1$, a sestavit z nich matici \mathbf{Q}_{Dn} rozměru (n, n) . Sloupce matice \mathbf{Q}_{Dn} lze vybrat různým způsobem a v závislosti na tomto výběru je možné počítat vektor akčních veličin \mathbf{u}_D , jehož prvky jsou obecně $u_i(n-1-i)$.

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{Q}_{Dn}^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{F}^k \mathbf{x}(0)] \quad (2.115)$$

Má-li soustava jen jeden vstup, je při $h(\mathbf{Q}_D) = n$ vektor $\mathbf{u}_D = [u(n-1), \dots, u(0)]^T$. Podmínky říditelnosti můžeme odvodit také z rovnice (2.116). Podle definice 2.3.2 platí, že $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(n) = \mathbf{0}$ a $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$. Dostaneme

$$\mathbf{F}^n \mathbf{x}(0) = -[\mathbf{G}, \mathbf{F}\mathbf{G}, \dots, \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G}] [\mathbf{u}^T(n-1), \dots, \mathbf{u}^T(0)]^T \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= -[\mathbf{F}^{-n}\mathbf{G}, \mathbf{F}^{-n+1}\mathbf{G}, \dots, \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}] [\mathbf{u}^T(n-1), \dots, \mathbf{u}^T(0)]^T = \\ &= -\mathbf{Q}_R \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Aby systém byl říditelný (tj. podle definice 2.3.2 převeditelný ze stavu $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ krocih při působení vstupní posloupnosti $\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(n-1)$ do stavu $\mathbf{x}(n) = \mathbf{0}$ kde n je rozměr stavového prostoru), musí stav $\mathbf{x}(0)$ být stavem z prostoru nelineárně nezávislými vektory matice $\mathbf{F}^{-n}\mathbf{G}, \mathbf{F}^{-n+1}\mathbf{G}, \dots, \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}$. Z uvedené úvahy plyne

Věta 2.3.6: Stav $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ systému (2.115) je říditelný tehdy a jen tehdy, jestliže hodnota h matice $\mathbf{Q}_R = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}, \mathbf{F}^{-2}\mathbf{G}, \dots, \mathbf{F}^{-n}\mathbf{G}$ je rovna rozměru n stavového prostoru.

Je zřejmé, že uvedená věta má smysl jedině pro invertibilní matici \mathbf{F} . Jak bylo již uvedeno, je tento požadavek vždy splněn u systémů, které vznikají vzorkováním spojitě pracujících systémů. U systémů, které jsou podle své činnosti diskrétní systémy, nemusí být matice \mathbf{F} invertibilní. V takovém případě bychom měli definovat podmínky říditelnosti podle rovnice (2.119).

Jestliže ve větě 2.3.6 existuje inverze matice \mathbf{F} , jde o matici regulární a $\det \mathbf{F} \neq 0$. To je zdůvodnění podmínky (2.96).

Porovnáme-li podmínky dosažitelnosti (věta 2.3.4) a podmínky říditelnosti (věta 2.3.6), je zřejmé, že požadavek reverzibility nutně vyžaduje invertibilitu matice \mathbf{F} , jak bylo dříve vyjádřeno požadavkem (2.96).

Lze také dokázat, že v případě, kdy sloupec $\mathbf{F}^{-i}\mathbf{g}$ je lineárně závislý na sloupcích $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{g}, \dots, \mathbf{F}^{-(i-1)}\mathbf{g}$, jsou také všechny další sloupce $\mathbf{F}^{-m}\mathbf{g}, m > i$ lineárně závislé na uvedených sloupcích. Platí též, že v diskrétním případě, sloupce matice \mathbf{Q}_{Dn} jsou vzájemně lineárně nezávislé, jsou vzájemně lineárně nezávislé také sloupce matice \mathbf{Q}_{Rn} , kde $\mathbf{Q}_{Rn} = \mathbf{F}^{-n}\mathbf{Q}_{Dn}$.

Protože v dalších úvahách o diskrétních systémech půjde převážně o systémy vzniklé vzorkováním spojitě pracujících systémů, u nichž požadavek $\det \mathbf{F} \neq 0$ je vždy splněn, bude stačit zkoumat splnění podmínek dosažitelnosti.

Spojitě pracující systém, jehož vstupem je schodová funkce a jehož výstupem je vzorkován synchronně se změnami na vstupu, nemusí být dosažitelný, i když samotný spojitý systém je říditelný. To nastává, má-li charakteristická rovnice spojitého systému alespoň jednu dvojici komplexních kořenů se stejnou reálnou

částí, tj. $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$. V diskrétní verzi jsou narušeny podmínky dosažitelnosti, je-li perioda vzorkování $T = k\pi/\omega$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Při této příležitosti je třeba poznamenat, že na systém, který není dosažitelný (řiditelný) ve smyslu uvedených podmínek, můžeme přesto působit za určitých předpokladů v uzavřeném regulačním obvodu regulátorem tak, že výsledný regulační pochod je stabilní. Říkáme, že takový systém je stabilizovatelný. Platí podle [13], [8]:

Definice 2.3.5: Spojitý systém (\mathbf{A}, \mathbf{B}) je stabilizovatelný, existuje-li taková reálná matice \mathbf{K} , že matice $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ je stabilní, tj. pro všechna vlastní čísla matice $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ platí, že $\text{Re } \lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Alternativně platí, že systém (\mathbf{A}, \mathbf{B}) je stabilizovatelný tehdy a jen tehdy, jsou-li složky (módy) výstupu příslušné nestabilním vlastním číslům matice \mathbf{A} dosažitelné.

Definice 2.3.5 jinými slovy říká, že k stabilizaci stačí regulátor, jehož výstupy (akční veličiny) jsou lineární transformací stavového vektoru, tj.

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (2.121)$$

Definice 2.3.5 platí obdobně i pro diskrétní verzi.

Definice 2.3.6: Diskrétní systém (\mathbf{F}, \mathbf{G}) je stabilizovatelný, existuje-li taková reálná matice \mathbf{K} , že matice $(\mathbf{F} - \mathbf{GK})$ je stabilní, tj. pro všechna vlastní čísla matice $(\mathbf{F} - \mathbf{GK})$ platí, že $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Rovnice (2.121) platí i pro t -variantní systém. Podmínky stabilizovatelnosti jsou ve skutečnosti podmínkami pro stabilitu uzavřeného regulačního obvodu s nestabilní soustavou, přičemž vstupem zpětnovazebního členu jsou veličiny stavového vektoru. K této možnosti konstrukce regulátoru pro uzavřenou regulační smyčku se budeme vracet v kapitolách o syntéze, kdy bude cílem určení matice \mathbf{K} .

2.3.2 Pozorovatelnost, rekonstruovatelnost a detekovatelnost

Stav systému (2.100) není mnohdy měřitelný, a nelze tedy přímo uskutečnit řízení ve smyslu vztahu (2.121). Nabízí se otázka, zda je možné z měřitelného výstupu nebo z měřitelných výstupů mnohorozměrové soustavy určit stavový vektor. V této souvislosti se rozlišuje [5] případ pozorovatelného stavu a rekonstruovatelného stavu.

Definice 2.3.7: Stav $\mathbf{x}(t_0)$ systému je pozorovatelný, jestliže jej lze určit pomocí budoucích hodnot $\mathbf{y}(t)$, $t > t_0$, výstupního vektoru a interval $t - t_0$ je konečný.

Definice 2.3.8: Stav $\mathbf{x}(t_0)$ systému je rekonstruovatelný, jestliže jej lze určit pomocí předchozích hodnot $\mathbf{y}(t)$, $t < t_0$, výstupního vektoru a interval $t_0 - t$ je konečný.

K posouzení pozorovatelnosti a rekonstruovatelnosti systému stačí znát matematický popis volného systému, tj. systému s nulovým vstupem

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

ních systémů odvodíme pomocí rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}^T\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (2)$$

Vypočítáme-li postupně hodnoty výstupní veličiny pro $k, k+1, \dots, k+n$ dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}^T\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) &= \mathbf{C}^T\mathbf{F}\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k+2) &= \mathbf{C}^T\mathbf{F}^2\mathbf{x}(k) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(k+n-1) &= \mathbf{C}^T\mathbf{F}^{n-1}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (2)$$

nebo ve vektorově maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T\mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T\mathbf{F}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (2)$$

nebo zkráceně

$$\mathbf{y}_n(k) = \mathbf{Q}_p\mathbf{x}(k) \quad (1)$$

Nyní můžeme vyslovit tyto podmínky pozorovatelnosti:

Věta 2.3.9: Diskrétní k -invariantní systém popsaný rovnicemi (2.133) úplně pozorovatelný tehdy a jen tehdy, je-li hodnota matice

$$\mathbf{Q}_p^T = [\mathbf{C}, \mathbf{F}^T\mathbf{C}, \dots, (\mathbf{F}^T)^{n-1}\mathbf{C}] \quad (2)$$

rovná rozměru n stavového prostoru.

Podmínky rekonstruovatelnosti můžeme odvodit také pomocí rovnic (2.136), uvážíme-li, že

$$\mathbf{x}(k+n) = \mathbf{F}^n\mathbf{x}(k) \quad (2)$$

Se vztahem (2.138) nabývá rovnice (2.136) tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_n(k) &= \mathbf{Q}_p\mathbf{F}^{-n}\mathbf{x}(k+n) \\ &= \mathbf{Q}_k\mathbf{x}(k+n) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T\mathbf{F}^{-n} \\ \mathbf{C}^T\mathbf{F}^{-(n-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T\mathbf{F}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Rozměr matice \mathbf{Q}_k je $(pn; n)$. Pro

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

kde \mathbf{c}_j , $j = 1, 2, \dots, p$ jsou řádky matice \mathbf{C}^T , lze n lineárně nezávislých řádků matice \mathbf{Q}_K vyjádřit tvarem $\mathbf{c}_j \mathbf{F}^{-i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ a sestavit z nich matici \mathbf{Q}_{Kn} rozměru $(n; n)$. Řádky matic \mathbf{Q}_{Kn} lze vybrat různým způsobem a v závislosti na tomto výběru je možné počítat stavový vektor $\mathbf{x}(k+n)$ pomocí vektoru \mathbf{y}_K , jehož prvky jsou $y_j(k+n-i)$.

$$\mathbf{x}(k+n) = \mathbf{Q}_{Kn}^{-1} \mathbf{y}_K \quad (2.141)$$

Věta 2.3.10: Diskrétní k -invariantní systém popsaný rovnicemi (2.133) je úplně rekonstruovatelný tehdy a jen tehdy, je-li $\det \mathbf{F} \neq 0$ a je-li hodnota matice

$$\mathbf{Q}_K^T = [(\mathbf{F}^T)^{-n} \mathbf{C}, (\mathbf{F}^T)^{-(n-1)} \mathbf{C}, \dots, (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{C}] \quad (2.142)$$

rovná hodnotě n stavového prostoru.

Opět můžeme poznamenat, že o vzájemné lineární závislosti řádků matic \mathbf{Q}_P a \mathbf{Q}_K , definovaných rovnicemi (2.137) a (2.142), platí podobné závěry jako o sloupcích matice \mathbf{Q}_D , formulované větou 2.3.2.

Matice \mathbf{F} je regulární u systémů vzniklých vzorkováním spojitě pracujících systémů, jak bylo již uvedeno v odst. 2.3.1, a proto v takových případech je vždy $\det \mathbf{F} \neq 0$.

Jsou-li některé ze složek výstupu spojitě pracujícího systému nepozorovatelné, ale jsou přitom stabilní, říkáme, že takový systém je detekovatelný. Jinými slovy systém je detekovatelný tehdy a jen tehdy, jsou-li složky (módy) výstupu, příslušné nestabilním vlastním číslům matice \mathbf{A} , pozorovatelné. Podle [13], [8] platí:

Definice 2.3.9: Pár (\mathbf{C}, \mathbf{A}) spojitě pracujícího systému je detekovatelný, existuje-li taková reálná matice \mathbf{R} , že $\mathbf{A} - \mathbf{R}\mathbf{C}^T$ je stabilní, tj. pro všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A} - \mathbf{R}\mathbf{C}^T$ platí, že $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Definice 2.3.9 platí obdobně i pro diskrétní systémy.

Definice 2.3.10: Pár $(\mathbf{C}^T, \mathbf{F})$ diskrétního systému je detekovatelný, existuje-li taková reálná matice \mathbf{R} , že $\mathbf{F} - \mathbf{R}\mathbf{C}^T$ je stabilní, tj. pro všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A} - \mathbf{R}\mathbf{C}^T$ platí, že $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Definice 2.3.9 a 2.3.10 je obdobou definice 2.3.5 a 2.3.6 s kterými jsme se seznámili v souvislosti s otázkami dosažitelnosti. Lze říci, že v určitém smyslu je rekonstruovatelnost přirozeným protějškem nebo jinými slovy duální vlastností k říditelnosti, pozorovatelnost je duální vlastností k dosažitelnosti a detekovatelnost je duální vlastností k stabilizovatelnosti. Máme-li nějaký systém $S_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}^T, \mathbf{D})$ a systém $S_2(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T)$, kde index T značí transpozici, je systém S_2 říditelný, je-li systém S_1 rekonstruovatelný, S_2 je pozorovatelný, je-li S_1 dosažitelný, S_2 je detekovatelný, je-li S_1 stabilizovatelný. Všechny tyto duální vlastnosti platí i naopak.

2.3.3. Identifikovatelnost

V odborné literatuře se můžeme setkat s četnými metodami s odlišnými přístupy k určování dynamických vlastností regulovaných soustav, krátce s rozmanitými metodami identifikace.

V některých případech je snaha provést u stacionárních soustav výpočet matematického modelu soustavy pomocí změřených hodnot veličin na vstupu a výstupu skutečné soustavy jen jednou a použít výsledek řešení k návrhu regulátoru, jinými slovy k syntéze. Jindy se může identifikace uskutečňovat automaticky průběžně v čase a sloužit k přizpůsobování regulátoru, tj. k adaptivnímu řízení. V takovém případě se ani nemusí explicitně vyhodnocovat matematický model regulované soustavy, ale hodnoty veličin měřené na vstupu a výstupu soustavy se využívají přímo k určování parametrů regulátoru nebo dokonce k určování vstupní, tj. akční veličiny regulované soustavy. V každém případě je však nutné, aby regulovaná soustava byla detekovatelná a stabilizovatelná. Chceme-li určovat matematický model regulované soustavy, musí být soustava také identifikovatelná. Nejsou-li splněny podmínky vztahující se k uvedeným vlastnostem soustavy, nelze dospět k jejímu optimálnímu řízení nebo k její identifikaci.

Definice 2.3.11: Dynamická soustava je identifikovatelná, lze-li určit pomocí stavových vektorů $\mathbf{x}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, matici dynamiky minimální realizace řádu n .

Abychom mohli vyjádřit podmínky identifikovatelnosti, mějme opět volný pozorovatelný spojité systém, jehož rovnice dynamiky je

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.143)$$

Pro $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $t_0 = 0$, vytvořme matici

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}'(t_1), \dots, \mathbf{x}'(t_n)] &= \mathbf{A}[\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)] = \\ &= \mathbf{A}[e^{\mathbf{A}t_1}, \dots, e^{\mathbf{A}t_n}] \mathbf{x}(0) = \\ &= \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t_1} [\mathbf{I}, e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)}, \dots, e^{\mathbf{A}(t_n-t_1)}] \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (2.144)$$

Z rovnice (2.144) plyne

$$[\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)] = e^{\mathbf{A}t_1} [\mathbf{I}, e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)}, \dots, e^{\mathbf{A}(t_n-t_1)}] \mathbf{x}(0) \quad (2.145)$$

Po zavedení zjednodušujících maticových symbolů je

$$\mathbf{X}_1^n = e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{X}_0^{n-1} \quad (2.146)$$

Platí tedy

$$e^{\mathbf{A}t_1} = \mathbf{X}_1^n (\mathbf{X}_0^{n-1})^{-1} \quad (2.147)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{t_1} \ln [\mathbf{X}_1^n (\mathbf{X}_0^{n-1})^{-1}] \quad (2.148)$$

Z rovnice (2.146) plyne

Věta 2.3.11: Systém (2.143) je identifikovatelný tehdy a jen tehdy, je-li pozorovatelný a je-li matice

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0^{n-1} &= [\mathbf{I}, e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)}, \dots, e^{\mathbf{A}(t_n-t_1)}] \mathbf{x}(t_0) \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

regulární.

V diskrétním případě mějme opět volný systém, jehož rovnice dynamiky je

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) \quad (2.149)$$

Předpokládejme, že známe počáteční stav $\mathbf{x}(k)$ a že systém je pozorovatelný. Zjistěme, za jakých podmínek je systém identifikovatelný, tj. za jakých podmínek můžeme určit matici \mathbf{F} . Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k+2) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}^2\mathbf{x}(k) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(k+n) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k+n-1) = \mathbf{F}^n\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (2.150)$$

Protože podle předpokladu jsou všechny stavové veličiny pozorovatelné, můžeme po n krocích měření sestavit matici

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}(k+1), \mathbf{x}(k+2), \dots, \mathbf{x}(k+n)] &= \\ &= \mathbf{F}[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \dots, \mathbf{x}(k+n-1)] \end{aligned} \quad (2.151)$$

kteřá nám umožní definovat podmínky identifikovatelnosti.

Věta 2.3.12: Matice \mathbf{F} systému (2.149) je identifikovatelná tehdy a jen tehdy, je-li matice $[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \dots, \mathbf{x}(k+n-1)] = [\mathbf{x}(k), \mathbf{F}\mathbf{x}(k), \dots, \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{x}(k)]$ regulární.

Pro stručnost zápisu označme $[\mathbf{x}(k), \mathbf{F}\mathbf{x}(k), \dots, \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{x}(k)] = \mathbf{Q}_1$.

Ve fyzikální interpretaci tato podmínka znamená, že počáteční stav $\mathbf{x}(k)$ musí vyvolat změny všech složek (módů) systému.

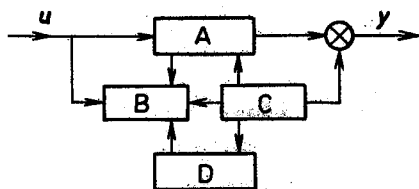
2.3.4. Kanonický rozklad

Stacionární lineární systémy konečného rozměru, tj. s konečným počtem nezávislých výstupních veličin a s konečným řádem jednotlivých subsystémů, lze v obecném případě rozdělit na čtyři dílčí systémy [1], [3] s těmito vlastnostmi:

- A Dílčí systém dosažitelný pozorovatelný.
- B Dílčí systém dosažitelný nepozorovatelný.
- C Dílčí systém nedosažitelný pozorovatelný.
- D Dílčí systém nedosažitelný nepozorovatelný.

Toto rozdělení na dílčí systémy je na obr. 19 a označuje se jako kanonický rozklad.

Jen dosažitelný a pozorovatelný dílčí systém lze popsat způsoby opírajícími se o znalost vstupu a výstupu systému, např. o frekvenční charakteristiku, impulso-



Obr. 19. Kanonický rozklad systému

3. Lineární spojité systémy

Teorie automatického řízení (automatické regulace) rozvíjí metody, které jsou vhodné k určení řízení (regulace) reálných objektů.

Aby tyto metody byly použitelné pro širokou třídu reálných objektů, abstrahujeme od konkrétních fyzikálních vlastností těchto objektů a zajímáme se pouze o vztahy mezi veličinami v těchto objektech. Vytváříme abstraktní modely reálných objektů, které nazýváme systémy.

V této kapitole se budeme zabývat pouze deterministickými systémy, které nejsou vystaveny působení náhodných veličin. Abstrakcí velmi široké třídy reálných objektů vznikly spojité systémy, u nichž jsou všechny veličiny funkcemi spojitěho času t . Často lze vlastnosti objektů vyjádřit s dostatečnou přesností lineárním modelem. Vznikla ucelená teorie lineárních systémů a je vypracována řada metod syntézy lineárních systémů.

Cennou vlastností lineárních systémů je *princip superpozice*, podle něhož reakce systému na součet podnětů se rovná součtu reakcí na jednotlivé podněty.

Pro nelineární systémy ucelenou teorii nemáme a musíme často analyzovat každý konkrétní nelineární systém zvlášť.

V této kapitole budou analyzovány vlastnosti lineárních spojitých řízených systémů. Budou analyzovány různé popisy řízených systémů a uvedeny některé metody určení vlastností systému.

Na systém působilme tím, že měníme nezávislé veličiny systému, které nazýváme řídicí veličiny. Tomuto působení na systém říkáme řízení. Často řídíme systém tak, že měříme jeho výstupní veličiny a podle jejich velikosti vhodně volíme řízení. Tomuto způsobu řízení říkáme regulace. Při regulaci vždy existuje zpětná vazba od výstupu systému na jeho vstup.

Zařízení, které uskutečňuje regulaci, se nazývá řídicí systém nebo také regulátor. V odst. 3.3 budeme analyzovat vlastnosti lineárních regulátorů.

Regulace se uskutečňuje v regulačním obvodu (systému). Je to zvláštní druh složeného zpětnovazebního systému tvořeného řídicím systémem (regulátorem) a řízeným systémem.

Řízený systém v regulačním obvodu se často označuje jako regulovaná soustava. Zde budeme používat obecnější název řízený systém.

V odst. 3.4 provedeme analýzu regulačního obvodu ve frekvenční i časové oblasti. Základní vlastností systému je jeho stabilita. V odst. 3.5 proto uvedeme

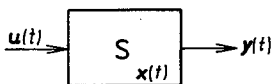
fyzikální význam tohoto pojmu, jeho matematickou definici i podmínky, které zaručují stabilitu systému.

Určení struktury a parametrů regulačního obvodu řeší syntéza regulačního obvodu. V odst. 3.6 uvedeme různé metody syntézy a v následujícím odstavci se stručně zmíníme o regulačních obvodech rozvětvených a mnohorozměrových.

3.1. Analýza vlastností řízených lineárních spojitých systémů

3.1.1. Popis dynamických vlastností systému

Řízený lineární dynamický systém schematicky znázorněný na obr. 20 má vstupní (řídící) veličiny $u(t)$ a výstupní veličiny $y(t)$. Vnitřní veličiny v systému jsou stavové veličiny $x(t)$. Obecně může mít systém více vstupních i výstupních veličin. Řízení $u(t)$ je potom vektor rozměru r , výstup je vektor rozměru m . Stavový vektor má počet složek rovný řádu systému, který označíme n .



Obr. 20. Řízený dynamický systém

Příklad. Dynamické vlastnosti stejnosměrného motoru vyjádříme systémem s jednou vstupní veličinou – napětím na kotvě motoru, a jednou výstupní veličinou – úhlovou rychlostí hřídele motoru. Pro jiné účely může mít stejnosměrný motor jiné vstupní i výstupní veličiny.

Příklad. Letadlo je složitý systém, jehož dynamické vlastnosti podélného pohybu vyjadřujeme systémem s jednou vstupní veličinou (polohou výškovky) a dvěma výstupními veličinami (podélným sklonem a výškou letounu). Při věrnějším popisu uvažujeme ještě dopřednou rychlost letounu, která může být druhou vstupní veličinou.

Dynamické vlastnosti systému můžeme popisovat různě. Všechny popisy systému lze rozdělit na dvě skupiny – na vnější a vnitřní popis systému.

Vnější popis systému je vyjádření dynamických vlastností systému relací mezi vstupem a výstupem systému. Při vnějším popisu systému považujeme systém za černou skříňku se vstupem a výstupem. Nevíme, co se děje uvnitř. Při vnějším popisu systému často předpokládáme, že energie nahromaděná uvnitř systému je na začátku pozorování nulová, přesněji, že stav systému je na začátku pozorování nulový.

Vnější popis systému se přes tyto omezující předpoklady hojně používá pro svou jednoduchost a názornost. Je také zřejmé, že rozbořením změřených vstupních a výstupních veličin systému můžeme získat pouze vnější popis systému.

Vnitřní popis systému je vyjádřen relací mezi vstupem, stavem a výstupem systému. Vnitřní popis systému je popis jeho stavově přechodové struktury.