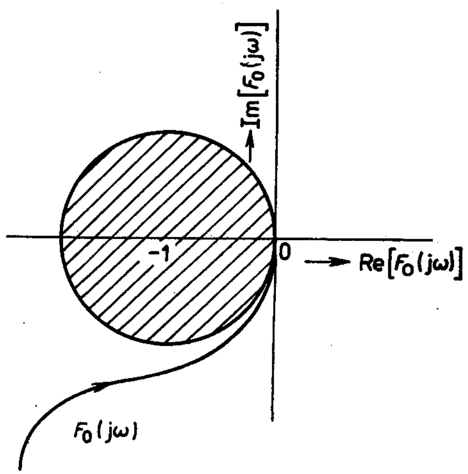
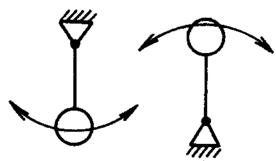
$$S(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + F_0(\mathrm{j}\omega)} = \frac{F_0^{-1}(\mathrm{j}\omega)}{1 + F_0^{-1}(\mathrm{j}\omega)}$$

kde $F_0(\mathrm{j}\omega)$ je frekvenční charakteristika otevřené smyčky.

Frekvenční charakteristiku inverzního přenosu $F_0^{-1}(\mathrm{j}\omega)$ snadno získáme v logaritmických souřadnicích překlopením amplitudové charakteristiky kolem osy 0 dB a změnou znaménka fázové charakteristiky. Vyneseme-li $F_0^{-1}(\mathrm{j}\omega)$ do Nicholsova diagramu, přímo z něho můžeme zjistit poměrnou citlivostní funkci $S(\mathrm{j}\omega)$.

Aby byla splněna podmínka (3.229), musí platit $|1 + F_0(\mathrm{j}\omega)| \geqq 1$, a proto se frekvenční charakteristika otevřené smyčky vynesená v komplexní rovině musí vyhýbat vnitřku jednotkové kružnice se středem v bodě $(-1, \mathrm{j}0)$. Na obr. 96 je vyšrafována zakázaná oblast a nakreslena frekvenční charakteristika rozpojeného regulačního obvodu, který splňuje podmínku (3.229). Je zřejmé, že řada regulačních obvodů tuto podmínku nesplňuje, a je tedy pro některé úhlové kmitočty více citlivá na změnu parametrů než při ovládání systému bez zpětné vazby.





Obr. 97. Kyvadlo v klidové poloze upevněné nad těžištěm a pod těžištěm

Obr. 96. Oblast, ve které nesmí ležet frekvenční charakteristika otevřeného regulačního obvodu vyplývající z citlivostní analýzy regulačního obvodu

3.5. Stabilita spojitých lineárních systémů

3.5.1. *Fyzikální význam a definice stability systému*

Stabilita je pojem, pro který máme intuitivně vybudovanou představu, že je to schopnost zachovávat daný stav.

Je zřejmé, že kyvadlo má dvě klidové polohy – jednu je-li těžiště kyvadla v klidu kolmo pod bodem upevnění a druhou je-li těžiště kyvadla v klidu kolmo nad bodem upevnění (obr. 97). První polohu označíme jistě za stabilní a druhou za nestabilní, neboť při malém vychýlení nastává pohyb kyvadla dolů. Přitom je zajímavé, že první klidovou polohu kyvadla intuitivně nazveme stabilní, i když teoreticky vzato i při malém vychýlení se do ní kyvadlo nevrátí a kývá stále kolem ní.

Mluvit o stabilitě jiné polohy kyvadla nemá smysl, neboť v žádné jiné poloze kyvadlo nezůstane. Je tedy zřejmé, že má smysl mluvit o stabilitě pouze klidových stavů, ve kterých systém bez působení vnějších podnětů zůstane. Tyto stavy jsou tzv. rovnovážné stavy systému.

Pojem stability můžeme však zobecnit a zajímat se o stabilitu řešení nebo pohybu. Změníme-li počáteční výchylku kyvadla o málo, změní se pohyb kyvadla také o málo. Můžeme tedy prohlásit, že pohyb kyvadla je stabilní. Naopak, pohybujeme-li se např. přesně po okraji střechy domu, znamená malá odchylka pád dolů. Proto pohyb po okraji střechy označíme za nestabilní pohyb.

Nyní tuto intuitivní představu stability budeme přesněji formulovat. Mějme spojitý systém popsaný stavovou rovnicí

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.230}$$

Tento systém je obecně nelineární a argument času ve funkci $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ respektuje vliv vstupních signálů. Řešení rovnice (3.230) při daném počátečním stavu označíme $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$. Jiné blízké řešení (např. při jiném počátečním stavu) označme $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$. Platí

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{x}(t)$$

kde $\boldsymbol{x}(t)$ je přírůstek. Hledejme nyní vlastnosti přírůstku $\boldsymbol{x}(t)$. Řešení $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ a $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ splňují rovnici systému (3.230), a proto platí

$$\boldsymbol{x}'(t) = \tilde{\boldsymbol{x}}'(t) - \bar{\boldsymbol{x}}'(t) = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}, t)$$

Protože funkci $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ známe, je pravá strana pouze funkcí $(\boldsymbol{x}, t)$. Označíme

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}, t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.231}$$

Budeme tedy hledat vlastnosti soustavy diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.232}$$

která se nazývá rovnice perturbovaného pohybu. Přitom podle (3.231) platí $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}$.

Řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ rovnice $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{0}$ nazýváme triviální řešení. Budeme tedy vyšetřovat stabilitu přírůstku řešení $\boldsymbol{x}(t)$, který je popsán rovnicí (3.232). To znamená, že vyšetřujeme stabilitu triviálního řešení soustavy rovnic (3.232).

Existuje mnoho různých definic stability, z nichž pro praxi má největší význam Ljapunovova stabilita a asymptotická stabilita.

Předpokládejme, že funkce $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$ je definována v oblasti $X \times \langle a, \infty)$, kde a je reálné číslo a $X \in \mathrm{R}^n$ je podmnožina prostoru R^n obsahující počátek.

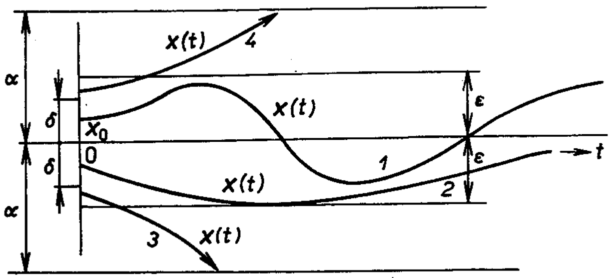
<u>Definice:</u> (Ljapunovská stabilita) Triviální řešení soustavy $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}$, je ljapunovsky stabilní právě tehdy, když platí

a) ke každému $t_0 \geqq a$ existuje $\alpha = \alpha(t_0)$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x}_0 \in X$ a $t \in \mathrm{R}^1$ vyhovující nerovnostem $\|\boldsymbol{x}_0\| < \alpha$, $t \geqq t_0$, je řešení $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ definováno;

b) ke každému $t_0 \geqq a$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tak, že pro všechna $\mathbf{x}_0 \in X$ a $t \in \mathrm{R}^1$ vyhovující nerovnostem $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, $t \geqq t_0$, platí

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \mathbf{x})\| < \varepsilon \tag{3.233}$$

Schematicky je ljapunovská stabilita pro jednorozměrný vektor stavu znázorněna na obr. 98. Zvolíme-li počáteční stav $\mathbf{x}_0$ v δ-okolí počátku, nepřesáhne řešení zvolené ε-okolí počátku. Při této definici nepožadujeme, aby $\mathbf{x}(t)$ se blížilo počátku (konvergovalo do nuly).



Obr. 98. Trajektorie ve smyslu Ljapunova stabilního (křivky *1*, *2*) a ve smyslu Ljapunova nestabilního (křivky *3*, *4*) systému

Nesplňuje-li triviální řešení $\mathbf{x}(t)$ požadavky předcházející definice, je nestabilní. Pro úplnost uvedeme definici ljapunovské nestability.

Definice: Triviální řešení soustavy (3.232) je ljapunovsky nestabilní právě tehdy, když existuje $\varepsilon > 0$ a $t_0 \geqq a$ a ke každému $\delta > 0$ existuje $\mathbf{x}_0 \in X$ a $t_1 \geqq t_0$ takové, že $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ a

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t_1, t_0, \mathbf{x}_0)\| \geqq \varepsilon$$

Takto je definována stabilita, resp. nestabilita řešení $\bar{\mathbf{x}}(t)$ stavové rovnice nelineárního systému (3.230). Mnohem častěji než stabilita řešení nás zajímá stabilita rovnovážných stavů systému.

Rovnovážný stav $\mathbf{x}_e$ můžeme definovat u systémů popsaných stavovou rovnicí

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3.234}$$

u nichž prává strana explicitně nezávisí na čase. Jsou to stacionární systémy, které nejsou vystaveny působení vstupních signálů, popř. vstupní signály jsou konstantní. Proto stabilita rovnovážných stavů systému je vnitřní vlastností systému a nezávisí na řízení.

Rovnovážný stav $\mathbf{x}_e$ je určen vztahem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \tag{3.235}$$

Velmi často je rovnovážným stavem systému počátek. Pak $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$.

U lineárních systémů popsaných stavovou rovnicí

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{3.236}$$