

je rovnovážný stav \mathbf{x}_e určen řešením rovnice $\mathbf{A}\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Pro regulární matici \mathbf{A} je řešení jediné, a to $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Pro singulární matici systému \mathbf{A} máme celý podprostor rovnovážných stavů, jehož dimenze je $(n - \text{hod } \mathbf{A})$.

Nyní uvedeme různé definice stability rovnovážných stavů. Tyto definice se vztahují ke stabilitě izolovaných rovnovážných stavů.

Definice: (Ljapunovská stabilita) Rovnovážný stav \mathbf{x}_e je Ljapunovsky stabilní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon) > 0$ takové, že každé řešení $\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, které vychází z některého bodu δ -okolí rovnovážného stavu

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \delta \quad (3.237)$$

leží celé v ε -okolí rovnovážného stavu

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon \quad (3.238)$$

Tato definice stabilního rovnovážného stavu \mathbf{x}_e opět nevyžaduje, aby blízké řešení konvergovalo do rovnovážného stavu. Vyžadujeme pouze, aby se mu příliš nevdálilo.

Říkáme, že řešení $\mathbf{x}(t)$ je ohraničené, jestliže pro zvolené $\delta > 0$ vždy existuje $\varepsilon(\delta)$, které splňuje nerovnosti (3.237) a (3.238).

Uvedeme nyní přísnější definice stability, které konvergenci blízkého řešení do rovnovážného stavu vyžadují.

Definice: (Kvaziasymptotická stabilita) Rovnovážný stav \mathbf{x}_e je kvaziasymptoticky stabilní právě tehdy, když existuje takové číslo $\delta > 0$, že každé řešení $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$ systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, které vychází z některého bodu δ -okolí rovnovážného stavu

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \delta \quad (3.239)$$

konverguje k počátku pro $t \rightarrow \infty$, neboli platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e \quad (3.240)$$

Pokud číslo $\delta = +\infty$, je rovnovážný stav \mathbf{x}_e globálně kvaziasymptoticky stabilní. Je-li systém globálně stabilní, musí mít ovšem pouze jediný rovnovážný stav.

Poznámka. Je zajímavé, že kvaziasymptoticky stabilní rovnovážný stav nemusí být vždy Ljapunovsky stabilní.

Definice: (Asymptotická stabilita) Rovnovážný stav \mathbf{x}_e je asymptoticky stabilní právě tehdy, když je Ljapunovsky stabilní i kvaziasymptoticky stabilní.

Asymptotická stabilita rovnovážných stavů systému má pro praxi největší význam.

Zdánlivě úplně jiná je definice tzv. Lagrangeovy stability nebo také omezeného řešení.

Definice: Stav \mathbf{x}_0 systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ je stabilní v Lagrangeově smyslu, existuje-li pro každé t_0 konstanta $\alpha(\mathbf{x}_0, t_0) < \infty$ taková, že

$$\|\varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \alpha \quad \text{pro } t > t_0 \quad (3.241)$$

To znamená, že norma řešení $\mathbf{x}(t)$ vycházející ze stavu \mathbf{x}_0 je omezena. Při této definici stav \mathbf{x}_0 nemusí být rovnovážný stav. Lze ukázat, že rovnovážný stav \mathbf{x}_e daného systému je Ljapunovsky stabilní tehdy a jen tehdy, když libovolný stav tohoto systému je stabilní v Lagrangeově smyslu.

V předcházejících definicích stability jsme definovali stabilitu stavů systému. Je zřejmé, že podobně bychom mohli definovat stabilitu výstupu systému. Může nastat situace, že nestabilní složky stavu se na výstupu neprojeví. Potom je systém na výstupu stabilní, i když nemá žádný stabilní rovnovážný stav. Je-li systém pozorovatelný, projeví se každá složka stavu na výstupu a stabilita stavu a výstupu splývá.

Stabilitu systému můžeme také definovat jako takovou vlastnost systému, že každému omezenému vstupu odpovídá omezený výstup. To je vlastně stabilita vnějššího chování systému.

Mezi touto definicí stability a asymptotickou stabilitou existuje těsná souvislost, přitom ale obě definice nejsou totožné.

3.5.2. Ljapunovova věta o stabilitě a její aplikace na lineární systémy

Jednou z nejvíce používaných metod pro zjišťování stability nelineárních systémů je druhá Ljapunovova metoda.

Ljapunovova metoda je založena na zobecnění toho, že je-li systém asymptoticky stabilní ve svém rovnovážném stavu, nahromaděná energie v systému se s rostoucím časem zmenšuje, až konečně dosáhne v rovnovážném stavu své minimální hodnoty.

Druhá Ljapunovova metoda spočívá v nalezení nějaké fixní funkce energie, nazývané Ljapunovova funkce. Konstruujeme tedy reálné Ljapunovovy funkce $V(\mathbf{x}, t)$. Jejich znaménko spolu se znaménkem jejich časové derivace podél řešení stavové rovnice nám dá informaci o stabilitě systému.

Zavedeme nejprve pomocné pojmy. Uvažujeme, že rovnovážný stav je $\mathbf{x}_e = 0$.

Definice: Necht funkce $V(\mathbf{x}, t)$ je reálná funkce spojitá na množině $Z = X \times \langle a, \infty \rangle$, kde X je nějaké okolí počátku prostoru \mathbb{R}^n . Funkce $V(\mathbf{x}, t)$ je

a) pozitivně semidefinitní (negativně semidefinitní) na Z právě tehdy, když $V(\mathbf{x}, t) \geq 0$ ($V(\mathbf{x}, t) \leq 0$) pro všechna $(\mathbf{x}, t) \in Z$,

b) pozitivně definitní (negativně definitní) na Z právě tehdy, když existuje reálná funkce $W(\mathbf{x})$ spojitá na X taková, že platí

$$V(\mathbf{x}, t) \geq W(\mathbf{x}) > 0 \quad (V(\mathbf{x}, t) \leq -W(\mathbf{x}) < 0) \quad \text{pro } \mathbf{x} \neq 0$$

c) stejnoměrně omezená pro $\mathbf{x} \rightarrow 0$ právě tehdy, když existuje reálná funkce $W(\mathbf{x})$ spojitá na X taková, že $W(0) = 0$ a $V(\mathbf{x}, t) \leq W(\mathbf{x})$ pro všechna $(\mathbf{x}, t) \in Z$.

Definice: Funkce $V(\mathbf{x}, t)$ definovaná na množině Z je

a) Ljapunovovou funkcí prvního druhu právě tehdy, když $V(\mathbf{x}, t)$ je spojitě diferencovatelná na Z , pozitivně definitní na Z a má negativně semidefinitní derivaci podél řešení,

b) Ljapunovovou funkcí druhého druhu právě tehdy, když $V(\mathbf{x}, t)$ je spojitě diferencovatelná na Z , pozitivně definitní na Z , stejnoměrně omezená pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ a má negativně definitní derivaci podél řešení,

c) Ljapunovovou funkcí třetího druhu právě tehdy, když $V(\mathbf{x}, t)$ je spojitě diferencovatelná na Z , stejnoměrně omezená pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, má definitní derivaci podél řešení a existuje $t_0 \geq a$ tak, že v každém okolí počátku existuje bod (t_0, \mathbf{x}_0) , ve kterém platí $V'(\mathbf{x}_0, t_0) V(\mathbf{x}_0, t_0) > 0$.

Nyní můžeme formulovat základní větu druhé Ljapunovy metody.

Věta: Ljapunovova věta: Nechť je dána soustava $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, kde funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ je spojitá vzhledem k proměnné t a spojitě diferencovatelná vzhledem k proměnné \mathbf{x} na množině Z , $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$. Nechť existuje Ljapunovova funkce 1., popř. 2., popř. 3. druhu pro tuto soustavu. Pak její triviální řešení je Ljapunovsky stabilní (asymptoticky stabilní, nestabilní).

Poznámka. Zjišťujeme-li stabilitu rovnovážného stavu u stacionárního systému, je Ljapunovova funkce $V(\mathbf{x})$ pouze funkcí stavu. Potom je funkce $V(\mathbf{x})$ stejnoměrně omezená, když je spojitá a $V(\mathbf{0}) = 0$.

Ljapunovova funkce $V(\mathbf{x}, t)$ je pozitivně definitní, spojitá spolu se svými prvními derivacemi v okolí rovnovážného stavu systému. Její derivace podle času podél trajektorie systému je u stabilního systému negativně definitní. Odtud plyne, že Ljapunovova funkce klesá s rostoucím časem a v rovnovážném stavu nabývá své minimální hodnoty.

Ljapunovova funkce není pro daný systém jediná. Ljapunovova metoda je postačující podmínkou stability, což znamená, že nenalezneme-li Ljapunovovu funkci splňující dané požadavky, nemůžeme o stabilitě, popř. nestabilitě systému rozhodnout.

Nejjednodušší pozitivně definitní funkce je ve tvaru kvadratické formy

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

kde \mathbf{Q} je pozitivně definitní matice s prvky q_{ij} .

Pro lineární systémy stačí hledat Ljapunovovu funkci ve tvaru kvadratické formy. Obecně nemusí mít Ljapunovova funkce kvadratickou formu, ovšem nejnížší mocnina členů v Ljapunovově funkci musí být sudá.

Příklad. Určete stabilitu rovnovážného stavu systému popsaného stavovou rovnicí

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 - ax_1(x_1^2 + x_2^2) & a > 0 \\ x_2' &= -x_1 - ax_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Rovnovážný stav tohoto systému je zřejmě počátek $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Zvolme Ljapunovovu funkci $V(\mathbf{x})$ ve tvaru

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

kteřá je zřejmě pozitivně definitní. Její derivace podle času je

$$V'(\mathbf{x}) = \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}$$

Odtud

$$V'(\mathbf{x}) = -2a(x_1^2 + x_2^2)^2$$

Tato funkce je negativně definitní a stejnoměrně omezená, a proto je systém asymptoticky stabilní, a to dokonce globálně.

Křivky stejné hodnoty Ljapunovovy funkce jsou v tomto případě soustředně kružnice ve stavové rovině se středy v počátku. Poloměr kružnic se rovná odmocnině z Ljapunovovy funkce. Každá trajektorie systému protíná kružnice z vnějšku směrem dovnitř.

Z této geometrické interpretace můžeme Ljapunovovu funkci považovat za míru vzdálenosti stavu systému \mathbf{x} od počátku souřadnic. Derivaci Ljapunovovy funkce můžeme považovat za míru rychlosti, s jakou se blížíme počátku souřadnic.

Ljapunovova analýza stability lineárních stacionárních spojitých systémů je určena touto větou.

Věta: Lineární systém popsaný vektorovou diferenciální rovnicí

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (3.242)$$

má rovnovážný stav $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ asymptoticky stabilní tehdy a jen tehdy, když k libovolné pozitivně definitní reálné symetrické matici \mathbf{Q} existuje taková pozitivně definitní reálná symetrická matice \mathbf{P} , že platí

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (3.243)$$

Přitom kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ je Ljapunovovou funkcí systému.

Důkaz: Dokážeme pouze podmínku postačující, tzn. podmínku, že existuje-li pozitivně definitní matice \mathbf{P} splňující (3.243), je rovnovážný stav systému stabilní.

Zvolme Ljapunovovu funkci

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Její derivace $V'(\mathbf{x})$ podél trajektorie systému (3.242) je

$$V'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}' + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}'$$

Po úpravě dostaneme

$$V'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} < 0$$

Derivace Ljapunovovy funkce je zřejmě negativní pro všechna $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, a proto je počátek souřadnic systému asymptoticky stabilní.

Ke zvolené symetrické matici \mathbf{Q} hledáme tedy symetrickou matici \mathbf{P} , která musí být pozitivně definitní.

Symetrická matice \mathbf{P} má $n(n+1)/2$ neznámých prvků p_{ij} , protože platí $p_{ij} = p_{ji}$. Rovnice (3.243) tedy představuje soustavu $n(n+1)/2$ lineárních rovnic.

Tato soustava rovnic je řešitelná, jsou-li vlastní čísla matice \mathbf{A} nenulová popř. je-li součet dvou párů vlastních čísel matice \mathbf{A} nenulový. Pochopitelně pro stabilní systém je předcházející podmínka splněna.

S ohledem na jednoduchost řešení můžeme za pozitivně definitní matici zvolit jednotkovou matici \mathbf{I} .

Příklad. Určete stabilitu rovnovážného stavu systému

$$\dot{x}'_1 = x_2; \quad \dot{x}'_2 = -4x_1 - 5x_2$$

Rovnovážený stav systému je počátek souřadnic $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$.

Řešení.

Řešme rovnici $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$

$$\text{neboli } \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vezmeme-li v úvahu, že $p_{21} = p_{12}$, dostaneme soustavu tří lineárních rovnic. Porovnáním jednotlivých prvků matic platí

$$\begin{aligned} -8p_{12} &= -1 \\ p_{11} - 4p_{22} - 5p_{12} &= 0 \\ 2p_{12} - 10p_{22} &= -1 \end{aligned}$$

Řešení této soustavy je

$$p_{11} = \frac{9}{8}, \quad p_{12} = p_{21} = \frac{1}{8}, \quad p_{22} = \frac{1}{8}$$

Matice \mathbf{P} je

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 9/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Tato matice je podle Sylvestrova kritéria pozitivně definitní, a proto počátek souřadnic systému je asymptoticky stabilní. Ljapunovova funkce je

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \frac{9}{8} x_1^2 + \frac{1}{4} x_1 x_2 + \frac{1}{8} x_2^2$$

Derivace Ljapunovovy funkce podél trajektorie systému je

$$V'(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} = -x_1^2 - x_2^2$$

Ljapunovova funkce těsně souvisí s kritériem jakosti při posuzování kvality regulačního pochodu. Tuto souvislost využijeme při výpočtu obecné kvadratické regulační plochy v čl. 3.6.

3.5.3. *Nutné a postačující podmínky stability lineárních systémů*

Mějme lineární stacionární systém, který je popsán stavovou rovnicí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.244}$$

Řídící veličiny systému jsou nulové. Vhodnou transformací můžeme matici systému

A převést do Jordanova kanonického tvaru. Jsou-li vlastní vektory matice **A** lineárně nezávislé, je Jordanova matice **A_J** diagonální

$$\mathbf{A}_J = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \quad (3.245)$$

kde λ_i jsou charakteristická čísla matice **A** určená rovnicí

$$\det (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (3.246)$$

Poznámka. Systém (3.244) transformujeme do Jordanova kanonického tvaru, volíme-li transformační matici **T** po sloupcích složenou z lineárně nezávislých vlastních vektorů matice **A** (pokud existují). Potom

$$\mathbf{A}_J = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \mathbf{v}(t) \quad (3.247)$$

kde $\mathbf{v}(t)$ je stav systému v Jordanově tvaru.

Systém v Jordanově tvaru se potom rozpadne na n nezávislých podsystémů popsaných stavovými rovnicemi

$$v_i'(t) = \lambda_i v_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

kde $v_i(t)$ jsou složky stavu $\mathbf{v}(t)$. Řešení předcházejících rovnic je

$$v_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$$

Konstanty c_i určíme z počátečních podmínek

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(t_0)$$

Řešení $\mathbf{x}(t)$ původního systému je lineární kombinací stavů $\mathbf{v}(t)$ systému v Jordanově tvaru. Platí

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} \quad (3.248)$$

kde konstanty α_i určíme z počátečních podmínek. Z předcházejícího vztahu pro řešení $x_i(t)$ stavových rovnic systému plyne, že řešení konverguje k rovnovážnému stavu $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ pouze tehdy, platí-li

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad (3.249)$$

Podobné závěry platí i pro násobná vlastní čísla λ_i matice **A**. Proto platí následující věta.

Věta: Lineární stacionární spojitý systém je asymptoticky stabilní tehdy a jen tehdy, když vlastní čísla matice systému **A** mají záporné reálné části.

V čl. 3.1 jsme ukázali, že vlastní čísla matice systému jsou totožná s póly přenosové matice, a proto je systém stabilní, když všechny póly jeho přenosové matice mají záporné reálné části. Oblast, ve které leží stabilní póly systému, je v komplexní rovině levá polorovina s vyloučením imaginární osy.

Jsou-li póly systému na imaginární ose, říkáme, že je systém na mezi stability.

Má-li systém reálné kladné póly, je nestabilní a této nestabilitě říkáme monotónní nebo aperiodická nestabilita, neboť nestabilnímu reálnému pólu

odpovídají složky řešení, které divergují monotónně (funkce e^{at} , $a > 0$). Oscilační nestabilita je způsobena komplexními póly s kladnou reálnou částí, neboť těmto nestabilním pólům odpovídají kmitavé složky řešení, které divergují (funkce $e^{at} \sin(\omega t + \varphi)$; $a > 0$).

Jednonásobným pólům na imaginární ose odpovídají kmitavé netlumené složky řešení s konstantní amplitudou. Jednonásobnému pólu v počátku odpovídá konstantní složka řešení. Proto je lineární stacionární systém Ljapunovsky stabilní, mají-li jeho póly záporné nebo nulové reálné části a na imaginární ose se vyskytují pouze jednonásobné póly, neboť podle definice nevyžaduje Ljapunovova stabilita konvergenci řešení do rovnovážného stavu.

Známe-li všechny póly systému, resp. vlastní čísla matice systému, je snadné rozhodnout o stabilitě či nestabilitě systému. Leží-li všechny póly v levé polorovině komplexní roviny, je systém stabilní, v opačném případě je nestabilní.

Příklad. Systém s přenosem

$$F(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p + 1)^2 (2p + 3) (0,1p + 1) (p^2 + 2p + 2)}$$

je stabilní, neboť jeho póly jsou

$$p_{1,2} = -1, \quad p_3 = \frac{-3}{2}, \quad p_4 = -\frac{1}{0,1}, \quad p_5 = -1 + j, \quad p_6 = -1 - j.$$

Póly systému jsou určeny řešením charakteristické rovnice systému, což je lineární algebraická rovnice n -tého řádu. U složitějšího systému ji lze řešit pouze na číslicovém počítači. Proto byla nalezena kritéria stability, která nám umožní rozhodnout o stabilitě systému pouze ze znalosti koeficientů charakteristické rovnice bez výpočtu jejich kořenů.

Přitom platí nutné podmínky stability, které říkají, že koeficienty charakteristického polynomu, jehož kořeny leží ve stabilní oblasti, jsou nenulové a mají stejná znaménka. Platí tedy

$$a_i \neq 0, \quad \text{sign } a_i = \text{sign } a_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.25)$$

kde a_i jsou koeficienty charakteristického polynomu. Nutné podmínky plynou z toho, že charakteristický polynom můžeme vyjádřit jako součin kořenových činitelů.

$$f(p) = a_n p^n + \dots + a_0 = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$$

kde p_i jsou póly.

Mají-li všechny póly reálnou část zápornou, mají vskutku všechny koeficienty a_i stejná znaménka a musí být nenulové, protože platí

$$a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (-p_i); \dots; a_{n-1} = a_n \sum_{i=1}^n (-p_i)$$

Příklad. Charakteristické polynomy

$$p^3 + p + 1$$

$$p^4 - 2p^3 + 3p^2 + 2p + 5$$

mají nestabilní kořeny, neboť u prvního je nulový koeficient u p^2 a u druhého nemají všechny koeficienty stejná znaménka.

Pokud má charakteristický polynom koeficienty nenulové se stejnými znaménky, nemůžeme o stabilitě či nestabilitě jeho kořenů rozhodnout jednoduše a musíme použít kritéria stability, která budou popsána v následujícím odstavci.

Uvažujme nyní lineární nestacionární systém popsaný stavovou rovnicí (3.244), kde $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$. Je-li řízení systému omezeno, hledáme, jaké podmínky musí být splněny, aby také řešení stavových rovnic systému (3.244) bylo omezeno. Přitom je zajímavé, že stabilita systému nezaručuje omezené řešení $\mathbf{x}(t)$, je-li řízení $\mathbf{u}(t)$ omezeno. Tento problém řeší následující věta.

Věta: Mějme lineární systém popsaný stavovou rovnicí (3.244). Je-li stavová matice přechodu $\Phi(t, t_0)$ omezena a také

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau)\| d\tau \quad (3.251)$$

je omezena, je každé řešení $\mathbf{x}(t)$ systému (3.244) omezeno, je-li omezeno také řízení $\mathbf{u}(t)$. Tuto větu snadno dokážeme, uvážíme-li, že řešení systému je podle (3.56).

Zajímavé je, že je-li omezený výstup systému při omezeném vstupu, nemusí být systém asymptoticky stabilní v rovnovážném stavu. Uvažujme např. systém popsaný diferenciální rovnicí

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0$$

Tento systém je zřejmě nestabilní, neboť vlastní číslo matice systému je $\lambda = 1$. Řešení předcházejících stavových rovnic systému je

$$x(t) = e^t x_0 + u(e^t - 1)$$

Působí-li na tento systém konstantní vstupní signál $u(t) = -x_0$, je výstup systému konstantní $x(t) = x_0$. Výstup systému je tedy omezený, přestože systém je nestabilní.

Podobně lze ukázat, že asymptotická stabilita rovnovážného stavu nezaručuje omezený výstup při omezeném vstupu. Uvažujme např. systém popsaný diferenciální rovnicí

$$\dot{x}(t) = \frac{-1}{1+t} x + u; \quad x(t_0) = x_0$$

Tento systém je asymptoticky stabilní v počátku souřadnic, neboť řešení při řízení $u(t) = 0$ je

$$x(t) = \frac{1+t_0}{1+t} x_0$$

Pro konstantní vstupní signál $u(t) = c$ je řešení systému

$$x(t) = \frac{1 + t_0}{1 + t} x_0 + \frac{t(2 + t)}{2(1 + t)} c$$

Řešení není zřejmě omezeno, přestože systém je asymptoticky stabilní.

Je-li systém lineární a stacionární, zaručuje asymptotická stabilita systému omezený výstup při libovolném omezeném vstupu.

Stabilitu vnějšího chování systému, která vyžaduje, aby omezenému vstupu odpovídal omezený výstup systému, můžeme posoudit podle následující věty.

Věta: Lineární spojitý systém s maticí impulsových funkcí $\mathbf{G}(t, \tau)$ je stabilní v tom smyslu, že každému omezenému vstupu odpovídá omezený výstup systému tehdy a jen tehdy, existuje-li konečné číslo α takové, že platí

$$\int_0^{\infty} |g_{ij}(t, \tau)| dt = \alpha < \infty \quad (3.25)$$

pro všechna $t \in (-\infty, \infty)$, kde $g_{ij}(t, \tau)$ jsou prvky matice impulsových funkcí.

Předcházející podmínky jsou pro stacionární systém totožné s podmínkou, že přenosová matice systému nemá žádný pól v pravé polorovině.

3.5.4. Kritéria stability lineárních systémů

Kritéria stability lineárních stacionárních spojitých systémů umožní rozhodnout o stabilitě, popř. nestabilitě systému bez výpočtů jeho pólů, reálných částí charakteristických čísel. Zde uvedeme kritéria Routhova, Hurwitzova a Schurova. Tato kritéria vycházejí z charakteristického polynomu systému, který má tvar

$$f(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 \quad (3.26)$$

Charakteristický polynom $f(p)$ se rovná jmenovateli přenosu systému, reálnému charakteristickému polynomu matice systému.

Pro zmenšení pracnosti numerických výpočtů je vhodné provést normalizaci koeficientů charakteristické rovnice. Normalizaci provedeme vynásobením celého charakteristického polynomu $f(p)$ konstantou c tak, aby absolutní člen byl normalizací roven jedné. Pak

$$c = \frac{1}{a_0} \text{sign } a_0, \quad a_0 \neq 0 \quad (3.27)$$

Dále provedeme substituci $p = d\bar{p}$ tak, aby po této substituci byl koeficient u nejvyšší mocniny charakteristického polynomu také roven jedné. Platí tedy

$$a_n c d^n = 1$$

Odtud

$$d = \sqrt[n]{1/a_n c}, \quad a_n \neq 0 \quad (3.28)$$

Potom normalizovaný charakteristický polynom $f(p)$ je

$$f(\bar{p}) = cd^n a_n \bar{p}^n + cd^{n-1} a_{n-1} \bar{p}^{n-1} + \dots + ca_0 \quad (3.256)$$

Jsou-li jeho kořeny \bar{p}_i , pak kořeny původního polynomu $f(p)$ jsou $p_i = d\bar{p}_i$. Oblasť stability se normalizací nemění.

Routhovo kritérium stability

Toto kritérium umožňuje zjistit stabilitu systému a pomocí tohoto kritéria můžeme také určit, kolik kořenů charakteristického polynomu má kladnou, nulovou nebo zápornou reálnou část.

Routhovo kritérium vyžaduje výpočet pole Routhových koeficientů, které má tvar

$$\begin{array}{l|llll} p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ p^{n-2} & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots \\ p^{n-3} & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ p^3 & d_3 & d_1 & & \\ p^2 & e_2 & e_1 & & \\ p^1 & f_1 & & & \\ p^0 & g_0 & & & \end{array} \quad (3.257)$$

První dva řádky jsou sestaveny z koeficientů charakteristického polynomu systému, další koeficienty vypočítáme podle vztahů

$$\begin{aligned} b_{n-2} &= a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3}, & c_{n-3} &= a_{n-3} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}} b_{n-4} \\ b_{n-4} &= a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5}, & & \\ \vdots & & & \\ b_{n-2k} &= a_{n-2k} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-2k-1}, & c_{n-2k+1} &= a_{n-2k+1} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}} b_{n-2k} \\ f_1 &= d_1 - \frac{d_3}{e_2} e_0 \\ g_0 &= e_0 \end{aligned} \quad (3.258)$$

Koeficienty následujícího řádku vypočítáme z koeficientů dvou předcházejících řádků. Výpočty koeficientů v řádku provádíme zleva doprava tak dlouho, až jsou další rovny nule. Výpočet Routhových koeficientů je ukončen výpočtem koeficientu v řádce $(n+1)$ označené p^0 . Pole Routhových koeficientů je trojúhelníkové. Abychom si usnadnili numerické výpočty, je možné dělit nebo násobit kladným číslem libovolný řádek. Na základě vypočítaného pole Routhových koeficientů můžeme vyslovit větu.

Věta: Routhovo kritérium stability

Charakteristický polynom má všechny kořeny se zápornou reálnou částí, jsou-li všechny Routhovy koeficienty kladné. Počet kořenů s kladnou reálnou částí se rovná počtu změn znaménka koeficientů v prvním sloupci pole Routhových koeficientů.

Příklad. Charakteristická rovnice systému je

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

Routhovo pole koeficientů je

	1	3	5
	2	4	0
Jedna změna znaménka	↙ 1	5	0
druhá změna znaménka	↘ 6	0	
		5	

Z toho plyne, že existují dva kořeny s kladnou reálnou částí.

Zvláštní případy:

a) Rovná-li se některý koeficient v prvním sloupci nule, ale ostatní koeficienty v tomtéž řádku jsou nenulové, nahradíme nulový člen velmi malým kladným číslem ε a spočítáme zbytek pole Routhových koeficientů. Jsou-li znaménka koeficientů nad nulovým a pod nulovým koeficientem stejná, charakteristický polynom má pár imaginárních kořenů (s nulovou reálnou částí). Jsou-li znaménka koeficientů nad nulovým koeficientem a pod ním opačná, znamená to po jednu změnu znaménka v poli Routhových koeficientů.

Příklad. Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

Vypočítáme pole Routhových koeficientů

λ^3	1	1
λ^2	2	2
λ^1	$0 \approx \varepsilon$	0
λ	2	

Tento polynom má dva imaginární kořeny $\lambda_{1,2} = \pm j$, neboť znaménka koeficientů nad a pod nulovým koeficientem jsou stejná.

Příklad. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

Vypočítejte pole Routhových koeficientů

λ^3	(1	-1
λ^2	-2	2
λ^1	(0 $\approx \varepsilon$	0

Tento polynom má dva kořeny s kladnou reálnou částí, neboť koeficient v prvním sloupci mění dvakrát znaménko

$$\lambda_1 = +1 \quad \lambda_2 = +2 \quad (\lambda_3 = 1)$$

b) Jsou-li koeficienty určitého řádku nulové, znamená to, že polynom má pár nebo páry reálných kořenů stejné velikosti, ale opačného znaménka, nebo pár či páry sdružených imaginárních kořenů.

V tomto případě zbytek pole koeficientů vypočítáme tak, že nahradíme nulový řádek koeficienty, které jsou rovny derivaci polynomu $P(\lambda)$ podle λ .

Polynom $P(\lambda)$ utvoříme z koeficientů předcházejícího řádku. Je-li polynom $P(\lambda)$ stupně $2n$, existuje n párů kořenů stejné amplitudy, ale opačného znaménka.

Příklad. Charakteristický polynom

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 + 24\lambda^3 + 48\lambda^2 - 25\lambda - 50$$

Pole Routhových koeficientů

$$\begin{array}{l|lll} \lambda^5 & 1 & 24 & -25 \\ \lambda^4 & 2 & 48 & -50 \\ \lambda^3 & 0 & 0 & \end{array} \begin{array}{l} \text{polynom } P(\lambda) \\ \text{nulový řádek} \end{array}$$

Polynom $P(\lambda)$ má tvar

$$P(\lambda) = 2\lambda^4 + 48\lambda^2 - 50$$

Protože stupeň polynomu $P(\lambda)$ je $2n = 4$, má charakteristická rovnice dva páry opačných kořenů.

Derivace polynomu podle λ

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} = 8\lambda^3 + 96\lambda$$

Koeficienty tohoto polynomu nahradíme nulový řádek a dokončíme výpočet Routhových koeficientů.

Celý výpočet Routhových koeficientů

$$\begin{array}{lll} 1 & 24 & -25 \\ 2 & 48 & -50 \\ 8 & 96 & 0 \\ 24 & -50 & \\ (+112,7 & 0 & \\ -50 & & \end{array} \quad \text{koeficienty } \frac{dP(\lambda)}{d\lambda}$$

Šípkou je označena jedna změna znaménka. Z toho plyne, že polynom obsahuje jeden kořen s kladnou reálnou částí (a stejně velký s opačným znaménkem, ale stabilní) a pár ryze imaginárních kořenů.

Výpočtem kořenů charakteristického polynomu $P(\lambda)$ určíme dva páry opačných kořenů

$$2\lambda^4 + 48\lambda^2 - 50 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_{3,4} = \pm 5j$$

Hurwitzovo kritérium stability

Hurwitzovo kritérium stability opět vychází z charakteristického polynomu systému $f(p)$. Z jeho koeficientů sestavíme tzv. Hurwitzovu matici

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & | & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & | & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Z Hurwitzovy matice počítáme Hurwitzovy determinanty Δ_i , které jsou rozhlavním minorům matice \mathbf{H} . Platí tedy

$$\Delta_1 = a_{n-1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \quad \text{až} \quad \Delta_n = \det \mathbf{H} = a_0 \Delta_{n-1} \quad (3.2)$$

Hurwitzova matice je stejného řádu jako řád systému. O stabilitě systému můžeme rozhodnout na základě následujícího tvrzení.

Věta: Hurwitzovo kritérium stability

Aby charakteristický polynom $f(p)$ měl všechny kořeny se zápornou reálnou částí, je nutné a stačí, aby

$$\begin{aligned} a_n \Delta_1 &> 0 & \vdots \\ \Delta_2 &> 0 & a_n \Delta_n > 0 \text{ pro } n \text{ liché} \\ a_n \Delta_3 &> 0 & \Delta_n > 0 \text{ pro } n \text{ sudé} \\ \Delta_4 &> 0 & \\ & \vdots & \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pro $a_n > 0$ musí být všechny Hurwitzovy determinanty kladné.

Je-li splněna nutná podmínka stability, lze Hurwitzovo kritérium upravit na tvar odvozený Lienardem a Chipardem.

Věta: Jsou-li všechny koeficienty a_i charakteristického polynomu $f(p)$ větší než nula, mají všechny kořeny charakteristického polynomu záporné reálné části, tehdy a jen tehdy, když všechny sudé nebo všechny liché Hurwitzovy determinanty jsou kladné.

Podle uvedené věty tedy stačí vyšetřovat pouze sudé nebo pouze liché Hurwitzovy determinanty, což usnadňuje výpočet.

Je-li jeden kořen charakteristické rovnice nulový, je v charakteristické rovnici $a_0 = 0$, a proto platí $\Delta_n = 0$. Má-li charakteristická rovnice pár imaginárních kořenů, potom $\Delta_{n-1} = 0$. Přechod jakéhokoli kořenu z levé poloviny komplexní roviny na pravou se může uskutečnit pouze přes imaginární osu, která je mezí stability, a proto mez stability můžeme počítat z podmínky

$$a_0 = 0, \quad \Delta_{n-1} = 0 \quad (3.4)$$

Je-li některý koeficient v charakteristické rovnici volitelný, můžeme z předcházející podmínky počítat jeho hodnotu pro mez stability.

Routhovo a Hurwitzovo kritérium spolu těsně souvisejí. Odečteme-li od sudých řádků Hurwitzovy matice předcházející liché řádky násobené podílem koeficientů a_n/a_{n-1} , dostaneme ekvivalentní Hurwitzovu matici

$$\mathbf{H} \sim \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & & a_{n-5} & & \dots \\ 0 & a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3} & a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5} & \dots & & \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

Opakováním tohoto postupu můžeme vynulovat prvky Hurwitzovy matice pod hlavní diagonálou a nakonec dostaneme

$$\mathbf{H} \sim \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & 0 & 0 \\ 0 & b_{n-2} & b_{n-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{n-3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_0 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \quad (3.263)$$

kte \mathbf{R} je Routhova matice sestavená z Routhových koeficientů (viz Routhovo kritérium stability). Prvky prvního sloupce pole Routhových koeficientů lze tedy vyjádřit pomocí Hurwitzových determinantů. Platí

$$a_{n-1} = \Delta_1, \quad b_{n-2} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad c_{n-3} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \quad (3.264)$$

Počet změn znaménka koeficientů prvního sloupce pole Routhových koeficientů se rovná počtu změn znaménka posloupnosti

$$\left(a_n, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \right), \quad \Delta_i \neq 0 \quad (3.265)$$

Tak můžeme také pomocí Hurwitzových determinantů určit počet kořenů s kladnou reálnou částí.

Příklad. Mějme systém s charakteristickým polynomem

$$f(p) = p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p + 5$$

Hurwitzova matice je

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Hurwitzovy determinanty jsou

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 2, \quad \Delta_3 = -12, \quad \Delta_4 = -60$$

Protože všechny Hurwitzovy determinanty nejsou kladné, je systém nestabilní.

V posloupnosti

$$(a_4, \Delta_1, \Delta_2/\Delta_1, \Delta_3/\Delta_1, \Delta_4/\Delta_1) = (1, 2, 1, \overbrace{-6}, \overbrace{+5})$$

nastávají dvě změny znaménka, a proto charakteristický polynom $f(p)$ má dva nestabilní kořeny.

Routhovo – Schurovo kritérium stability

Jiným způsobem lze vypočítat Routhovy koeficienty v Routhově – Schurově kritériu stability. Výhoda tohoto kritéria spočívá v tom, že po malé úpravě provedené J. Nekolným lze pomocí něho určit nejen stabilitu systému, ale i kvadratickou plochu, což využijeme v čl. 3.6.

Při použití Routhova – Schurova kritéria postupujeme podle těchto kroků:

1. Koeficienty charakteristické rovnice napíšeme vedle sebe, a to od nejvyšší nebo nejnižší mocniny.

2. Tuto posloupnost koeficientů rozdělíme na část sudou a lichou (například tak, že každý sudý koeficient podtrhneme).

3. Každý sudý koeficient násobíme podílem prvních dvou koeficientů a napíšeme pod předcházející řadu posunutou o jeden koeficient vlevo. Tuto novou řadu koeficientů odečteme od předcházející.

4. Jsou-li všechny koeficienty v nové posloupnosti kladné, opakujeme postup, čímž se posloupnost zkrátí o jeden člen.

5. Jakmile se při některé redukci objeví některý koeficient záporný, skončíme výpočet, neboť charakteristická rovnice má nestabilní kořen.

6. Dospějeme-li postupnou redukcí až k řadě tří kladných koeficientů, má charakteristická rovnice všechny kořeny ve stabilní oblasti.

Použití popsaného algoritmu nejlépe objasníme na příkladě. Mějme systém s charakteristickou rovnicí

$$f(p) = p^6 + 3p^5 + 5p^4 + 12p^3 + 6p^2 + 9p + 1 = 0$$

Provedeme Routhovu – Schurovu redukcí koeficientů

1	<u>3</u>	5	<u>12</u>	6	<u>9</u>	1	- <u>1</u>
1	←	4	←	3	←		<u>3</u>
0	3	<u>1</u>	12	<u>3</u>	9	<u>1</u>	<u>3</u>
	3	←	9	←	3	←	<u>1</u>
0	1	<u>3</u>	3	<u>6</u>	1		<u>1</u>
	1	←	2	←			<u>3</u>
0	3	<u>1</u>	6	<u>1</u>			<u>3</u>
	3	←	3	←			<u>1</u>
0	1	3	1				

Všechny koeficienty během redukce jsou kladné, systém je tedy stabilní. Z vyřešeného příkladu je patrná výhoda použitého algoritmu, protože pracnost výpočtu neroste s řádem systému zdaleka tak rychle jako u Hurwitzova kritéria.

3.5.5. Nyquistovo kritérium stability

Nyquistovo kritérium stability je použitelné pro systémy se zpětnou vazbou. Vychází z průběhu frekvenční charakteristiky systému bez zpětné vazby a umožňuje zjistit stabilitu celého systému se zpětnou vazbou. Tím je vhodné pro určení stability uzavřeného regulačního obvodu ze znalosti frekvenční charakteristiky rozpojeného regulačního obvodu.

Výhodou tohoto kritéria je to, že nemusíme znát přenos nebo diferenciální rovnici otevřeného regulačního obvodu, ale můžeme vycházet pouze z experimentálně zjištěné frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu.

Nyquistovo kritérium se opírá o tzv. větu o argumentu, známou z teorie funkcí komplexní proměnné. Uvedeme ji zde bez odvození.

Věta: Princip argumentu. Je-li komplexní funkce $G(p)$ komplexní proměnné p regulární všude v uzavřené oblasti D kromě konečného počtu pólů a nemá na hranici této oblasti ani póly, ani nuly, pak rozdíl nulových bodů a pólů této funkce uvnitř oblasti D , kde každý pól (resp. nulový bod) počítáme s násobností jeho řádu, se rovná přírůstku argumentu $\arg G(p)$ při jednom oběhu hranice C oblasti D děleném 2π , neboli

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta \arg G(p)) = N - P$$

kde $\Delta \arg G(p)$ je přírůstek $\arg G(p)$ vyjádřený v násobcích 2π ;

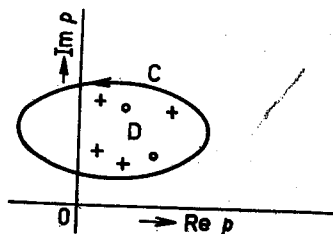
P, N celkový počet pólů a nul v oblasti D .

Poznámka. Oblast D s hraniční křivkou C obíháme v kladném směru, leží-li oblast D při pohybu po křivce C vlevo. Kladný přírůstek argumentu počítáme proti směru pohybu hodinových ruček.

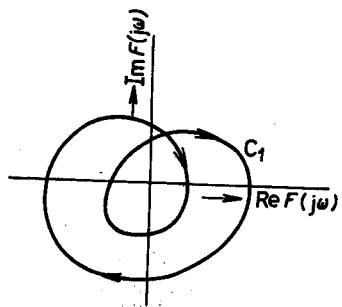
Princip argumentu je názorně ukázán na obr. 99 a 100. Uvažujme zobrazení $F(p)$. V rovině komplexní proměnné p vyznačíme křížky póly funkce $F(p)$ a kroužky nuly funkce $F(p)$ ležící uvnitř zvolené oblasti D s hraniční křivkou C (obr. 99). Zobrazením $F(p)$ se zobrazí křivka C do křivky C_1 (obr. 100). Křivka C_1 obíhá počátek (-2) krát v kladném směru (tzn. 2krát v záporném, to je ve směru pohybu hodinových ruček), neboť rozdíl počtu nul a pólů funkce $F(p)$ uvnitř oblasti D je (-2) .

O stabilitě (popř. nestabilitě) uzavřeného regulačního obvodu rozhodne poloha jeho pólů, které jsou rovny kořenům charakteristického polynomu $f(p)$. Je-li přenos otevřeného regulačního obvodu

$$F_o(p) = \frac{M(p)}{N(p)} \quad (3.266)$$



Obr. 99. Oblast D s hraniční křivkou C . Uvnitř oblasti D se nacházejí 4 póly (značeny křížky) a dvě nuly (značeny kroužky) přenosu $F(p)$



Obr. 100. Princip argumentu. Zobrazením $F(p)$ se křivka C z obr. 99 zobrazí na křivku C_1

je charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu

$$f(p) = M(p) + N(p)$$

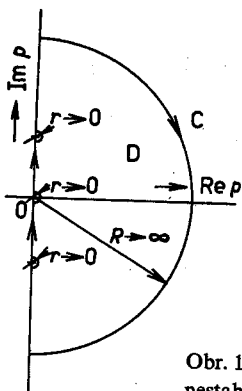
Poloha kořenů tohoto polynomu určuje stabilitu uzavřeného regulačního obvodu. Uvažujme nyní přenos

$$1 + F_0(p) = \frac{M(p) + N(p)}{N(p)}$$

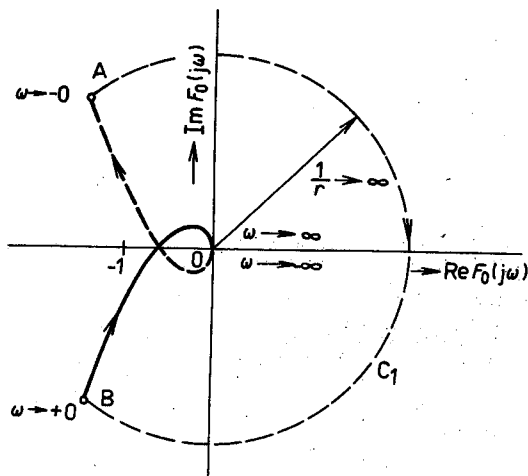
Nuly tohoto přenosu jsou shodné s hledanými póly uzavřeného regulačního obvodu. Póly přenosu $(1 + F_0(p))$ jsou totožné s póly přenosu otevřeného regulačního obvodu a ty obvykle známe.

Počet obklíčení počátku (rovný změně argumentu dělené 2π) při obcházení křivky C u funkce $(1 + F_0(p))$ je stejný jako počet obklíčení bodu (-1) u funkce $F_0(p)$.

Oblast D volíme totožnou s oblastí, ve které mohou ležet nestabilní póly nebo nuly, to je celou pravou polorovinou komplexní roviny p (obr. 101).



Obr. 101. Oblast D s hraniční křivkou C , ve které mohou ležet nestabilní póly nebo nuly systému



Obr. 102. Frekvenční charakteristika otevřeného regulačního obvodu s přenosem

$$F_0(p) = \frac{K}{p(\tau p + 1)^2}$$

pro

$$K < \frac{2}{\tau}$$

Čárkovanež je doplněna celá Nyquistova křivka

Část křivky C tvořící hranici oblasti D ležící na kladné imaginární ose ($p = j\omega$, $\omega > 0$) se zobrazí do frekvenční charakteristiky $F_0(j\omega)$ otevřeného regulačního obvodu, po které postupujeme od $\omega = 0$ do $\omega \rightarrow \infty$.

Část křivky C na záporné imaginární ose se zobrazí do frekvenční charakteristiky $F_0(-j\omega)$, která se rovná zrcadlovému obrazu „kladné frekvenční charakteristiky $F_0(j\omega)$ “ podle reálné osy.

Část křivky C tvořené polokružnicí o poloměru $R \rightarrow \infty$ se zobrazí do bodu na reálné ose, jehož souřadnice je

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F_0(p)$$

Má-li otevřený regulační obvod póly na imaginární ose, volíme cestu C tak, aby jimi neprocházela. Póly na imaginární ose obcházíme tedy půlkroužky o poloměru $r \rightarrow 0$ (obr. 101). Tyto půlkroužky se zobrazí do polokružnic o nekonečném poloměru. Ukážeme to např. na pólu v počátku. Nechť $F_0(p)$ má v počátku pól násobnosti k . Potom platí

$$\lim_{p \rightarrow 0} F_0(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^k} K$$

kde K je komplexní konstanta. Komplexní číslo p^k můžeme vyjádřit v goniometrickém tvaru. Pak

$$p^k = |p^k| e^{j\alpha k}$$

Při oběhu na půlkroužku o poloměru $r \rightarrow 0$ platí $|p^k| \rightarrow 0$ a úhel α se mění od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$, čili změní se o $+\pi$ v kladném směru. Potom platí

$$\lim_{p \rightarrow 0} F_0(p) = \lim_{p \rightarrow 0} K \left| \frac{1}{p^k} \right| e^{-j\alpha k} \quad (3.269)$$

Půlkroužky kolem pólů v počátku se tedy zobrazí na kružnici o nekonečném poloměru $|1/p^k| \rightarrow \infty$. Tato kružnice vychází z bodu $\omega = -0$ záporné frekvenční

charakteristiky (bod A na obr. 102) a mění podle (3.269) argument o $k\pi$ v záporném směru, kde k je násobnost nulového pólu, neboť úhel α se mění o $+\pi$.

Podobná úvaha by platila i pro póly na imaginární ose ležící mimo počátek. Mějme např. regulační obvod s přenosem otevřené smyčky

$$F_0(p) = \frac{K}{p(\tau p + 1)^2} \quad (3.270)$$

Pro určitou hodnotu zesílení K je jeho frekvenční charakteristika $F_0(j\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$ vyznačena na obr. 102 plnou čarou. Frekvenční charakteristika $F_0(j\omega)$ pro $-\infty < \omega \leq 0$ je komplexně sdružená ke $F_0(j\omega)$, $\omega > 0$, a je vyznačena na obr. 102 čárkovaně. Část oblasti C tvořená polokružnicí o poloměru $R \rightarrow \infty$ se zobrazí podle (3.270) do počátku. Polokroužek kolem počátku o poloměru $r \rightarrow 0$ se zobrazí na nekonečnou kružnici, která vychází z bodu A na obr. 102 a mění argument o $-\pi$ a v bodě B navazuje na frekvenční charakteristiku $F_0(j\omega)$, $\omega > 0$.

Křivka C tvořící hranici oblasti D se zobrazením $F_0(p)$ podle (3.270) zobrazí na uzavřenou křivku C_1 označenou na obr. 102 šipkami. Tuto křivku budeme nazývat Nyquistova křivka.

Podle obr. 101 obíháme oblast D záporným směrem, a proto ve vztahu (3.269) o argumentu platí

$$-\frac{1}{2\pi} \cdot \arg F_0(p) = -B$$

kde B je počet obklíčení v kladném směru bodu $(-1, j0)$ při oběhu po Nyquistově křivce. Podle věty o argumentu platí

$$-B = N - P$$

neboli

$$B = P - N \quad (3.271)$$

kde P je počet pólů funkce $1 + F_0(p)$ v oblasti D a je totožný se známým počtem nestabilních pólů otevřeného regulačního obvodu.

N je počet nul funkce $1 + F_0(p)$ v oblasti D , který se rovná hledanému počtu pólů uzavřeného regulačního obvodu v nestabilní oblasti.

Hledaný počet nestabilních pólů přenosu uzavřeného regulačního obvodu je tedy

$$N = P - B \quad (3.272)$$

Pokud uzavřený regulační obvod nemá žádný pól v pravé polorovině, platí

$$P = B \quad (3.273)$$

Nyquistovo kritérium můžeme tedy formulovat takto:

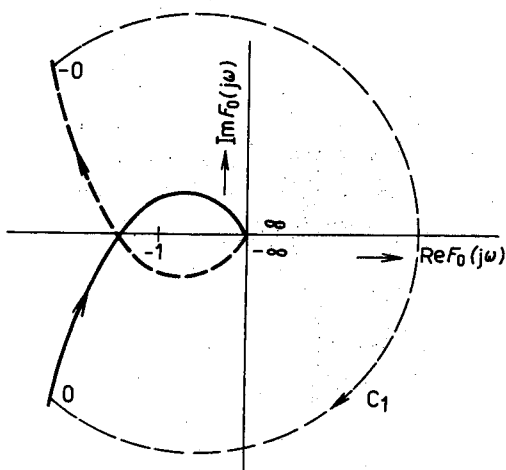
Uzavřený regulační obvod je stabilní tehdy a jen tehdy, když Nyquistova křivka neprochází bodem $(-1, j0)$ a obklíčuje bod $(-1, j0)$ tolikrát, kolik má otevřený regulační obvod nestabilních pólů.

Pokud je otevřený regulační obvod stabilní ($P = 0$), platí zjednodušené Nyquistovo kritérium:

Uzavřený regulační obvod je stabilní, je-li stabilní otevřený regulační obvod, Nyquistova křivka neprochází bodem $(-1, j0)$ a neobkličuje bod $(-1, j0)$.

Otevřený regulační obvod s přenosem $F_0(p)$ podle (3.270) má Nyquistovu křivku uvedenu na obr. 102. V uzavřené smyčce bude tento regulační obvod stabilní, neboť Nyquistova křivka neobkličuje bod $(-1, j0)$ a otevřený regulační obvod je zřejmě stabilní. Jeho nulový pól jsme zahrnuli do stabilní oblasti, neboť hranice C oblasti D se mu půlkroužkem vyhýbá.

Prochází-li Nyquistova křivka bodem $(-1, j0)$, je uzavřený regulační obvod na mezi stability.



Obr. 103. Nyquistova křivka přenosu

$$F_0(p) = \frac{K}{p(\tau p + 1)^2}$$

pro

$$K > \frac{2}{\tau}$$

Příklad. Přenos $F_0(p)$ otevřeného regulačního obvodu podle (3.270) má Nyquistovu křivku pro jinou hodnotu zesílení K vynesenu na obr. 103. Počet obklíčení bodu $(-1, j0)$ je -2 , a proto počet nestabilních pólů uzavřeného regulačního obvodu je

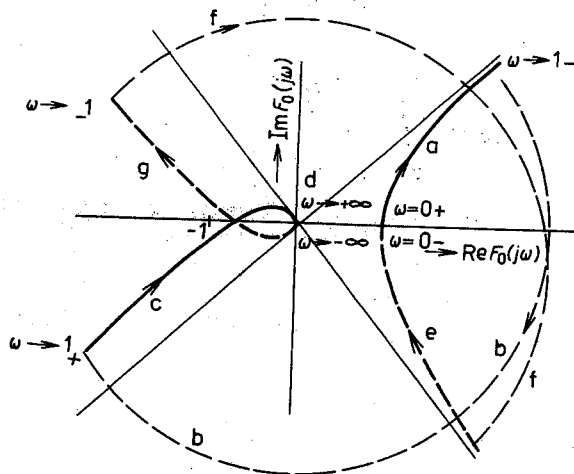
$$N = P - B = 0 - (-2) = +2$$

Uzavřený regulační obvod má dva nestabilní póly.

Příklad. Otevřený regulační obvod má přenos $F_0(p)$

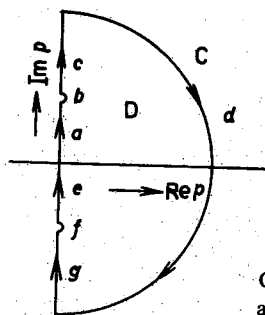
$$F_0(p) = \frac{K(20p + 1)}{(0,5p + 1)(p + j)(p - j)} = \frac{K(20p + 1)}{0,5p^3 + p^2 + 0,5p + 1}$$

Tento přenos má dva ryze imaginární póly $p_{1,2} = \pm j$. Nyquistova křivka tohoto přenosu je na obr. 104. Křivka C oblasti D se skládá z částí a až g (obr. 105), které se zobrazením $F_0(p)$ konformně zobrazí do Nyquistovy křivky na obr. 104. Odpovídající části křivek jsou opět označeny a až g . Nyquistova křivka neobkličuje bod $(-1, j0)$, a proto je uzavřený regulační obvod stabilní.



Obr. 104. Nyquistova křivka přenosu

$$F_0(p) = \frac{K(20p + 1)}{(0,5p + 1)(p + j)0}$$



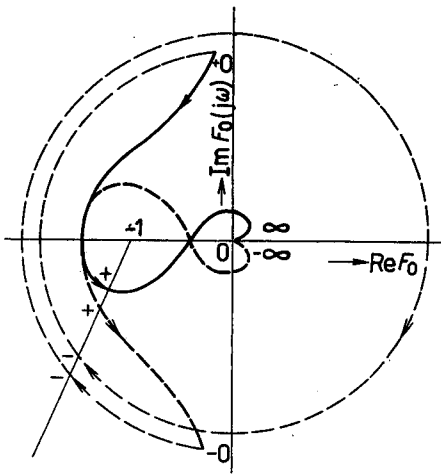
Obr. 105. Oblast D s hraniční křivkou C, složenou z úseků a až g

Počet obklíčení bodu $(-1, j0)$ Nyquistovou křivkou můžeme snadno zjistit touto konstrukcí:

1. Nakreslíme Nyquistovu křivku otevřené smyčky.
2. Z bodu $(-1, j0)$ vedeme libovolnou polopřímku.
3. Určíme počet průsečíků Nyquistovy křivky s polopřímkou.
4. Průsečíky v kladném směru jsou takové, jestliže frekvenční charakteristika protíná polopřímku proti směru hodinových ruček (při pohledu od bodu $(-1, j0)$).
5. Počet obklíčení bodu $(-1, j0)$ se rovná součtu kladných průsečíků minus součet záporných průsečíků.

Na obr. 106 je nakreslena polopřímka z bodu $(-1, j0)$ a znaménky jsou označeny kladné a záporné průsečíky polopřímky s Nyquistovou křivkou. Počet obklíčení bodů $(-1, j0)$ je $B = 0$, neboť počet kladných a záporných průsečíků shodný.

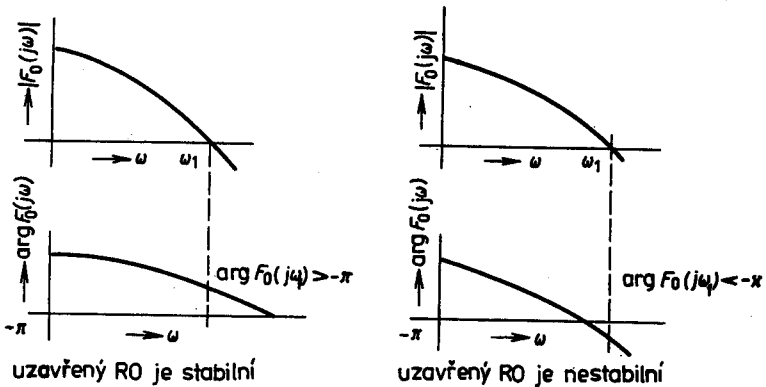
Poznámka. Je důležité zjistit počet průsečíků polopřímky s celou Nyquistovou křivkou. Uvažujeme-li průsečíky pouze s frekvenční charakteristikou otevřeného regulačního obvodu, můžeme často dospět k nesprávným závěrům.



Obr. 106. Zjednodušená konstrukce počtu oběhů Nyquistovy křivky kolem bodu $(-1; j0)$ pomocí libovolné polopřímky z bodu $(-1; j0)$

Pro většinu praktických případů regulačních obvodů, které jsou v otevřené smyčce stabilní, vystačíme se *zjednodušenou verzí Nyquistova kritéria*:

Regulační obvod je stabilní, je-li bod $(-1, j0)$ vlevo od frekvenční charakteristiky, postupujeme-li po ní ve směru narůstajícího úhlového kmitočtu.

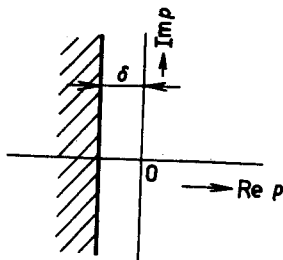


Obr. 107. Určení stability uzavřeného regulačního obvodu z průběhu frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu v logaritmických souřadnicích

Modifikace Nyquistova kritéria pro frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích je obtížná, neboť zde nemůžeme znázornit celou Nyquistovu křivku. Je-li otevřený regulační obvod stabilní a fáze frekvenční charakteristiky s rostoucím úhlovým kmitočtem ω roste do záporných hodnot, platí, že uzavřený regulační obvod bude stabilní, jestliže pro úhlový kmitočet, při kterém amplitudová frekvenční charakteristika otevřeného regulačního obvodu protíná osu 0 dB, bude fáze $\varphi > -\pi$ (obr. 107).

3.5.6. Míry stability systému

Velmi často nestačí pouhé zjištění, že je systém stabilní, ale chceme vědět, jak daleko je systém od případné nestability. Proto určujeme tzv. míry stability systému. Míry stability můžeme volit různé. Zde popíšeme tzv. stupeň stability, relativní tlumení, fázovou a amplitudovou bezpečnost a podmínky aperi stability.



Obr. 108. Oblast, ve které leží póly stabilního systému, se stupněm stability δ

Stupeň stability systému

Můžeme požadovat, aby póly systému ležely v levé polorovině v určité vzdálenosti od imaginární osy (obr. 108). Tím jsou přechodové jevy v systému dostatečně rychle tlumeny. Definujme stupeň stability δ rovný minimální absolutní hodnotě reálné části pólů stabilního systému. Platí tedy

$$\delta = \min | \operatorname{Re} p_i | \quad (1)$$

kde p_i jsou póly stabilního systému.

Zda je systém stabilní se stupněm stability δ , můžeme rozhodnout například tím, že kritéria stability aplikujeme na charakteristickou rovnici $f(p - \delta)$.

$$f(p - \delta) = \bar{a}_n p^n + \bar{a}_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2)$$

kde

$$\bar{a}_k = \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} a_i \delta^{-k+i} \quad (3)$$

přičemž a_i jsou koeficienty charakteristického polynomu.

Příklad. Zjistěte, zda je systém s přenosem

$$G(p) = \frac{4p + 2}{p^3 + 4p^2 + 6p + 4}$$

stabilní se stupněm stability $\delta = 1$.

Charakteristický polynom $f(p - \delta)$ je

$$f(p - \delta) = (p - \delta)^3 + 4(p - \delta)^2 + 6(p - \delta) + 4$$

Pro $\delta = 1$ platí

$$f(p - 1) = p^3 + p^2 + p + 1$$

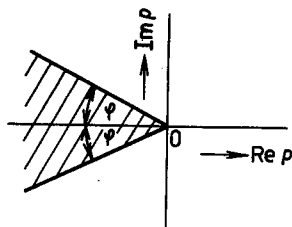
Na tento polynom aplikujeme Hurwitzovo kritérium stability. Hurwitzova matice je

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

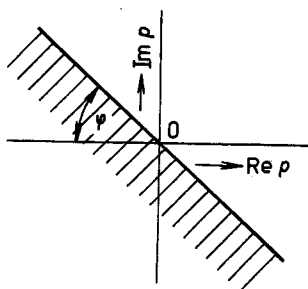
Hurwitzův determinant $\Delta_2 = 0$, a proto je systém na hranici stupně stability Δ . Má tedy právě dva komplexní póly, jejichž reálná část se rovná -1 .

Relativní tlumení

Aby systém měl předepsané relativní tlumení $\xi = \cos \varphi$, musí jeho póly ležet uvnitř oblasti vyšrafované na obr. 109. U stabilního systému je relativní tlumení v intervalu $\xi \in (0, 1)$.



Obr. 109. Oblast, ve které leží póly stabilního systému s relativním tlumením ξ



Obr. 110. Zjednodušená oblast, ve které leží póly stabilního systému s relativním tlumením ξ

Jelikož se komplexní póly vyskytují vždy v komplexně sdružených párech, stačí místo oblasti vymezené na obr. 109 uvažovat oblast vymezenou na obr. 110. Tato oblast vznikne ale natočením stabilní oblasti (levé poloroviny) o úhel $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Jde tedy o konformní zobrazení

$$p = q e^{-j(\varphi - \frac{\pi}{2})} \quad (3.277)$$

Původní charakteristický polynom $f(p)$ přejde na tvar

$$f(q) = \sum_{k=0}^n a_k q^k e^{-j(\varphi - \frac{\pi}{2})k} \quad (3.278)$$

Položíme $q = j\omega$, pak

$$f(q) = f(j\omega) = \sum a'_k e^{-j\varphi k} \omega^k (-1)^k \quad (3.279)$$

Koeficienty a'_k tohoto charakteristického polynomu jsou čísla komplexní

$$\begin{aligned} a'_k &= (-1)^k a_k e^{-jk\varphi} = (-1)^k a_k [\cos(k \arccos \xi) - j \sin(k \arccos \xi)] = \\ &= b_k + jc_k \end{aligned} \quad (3.280)$$

Hodnoty b_k, c_k můžeme počítat z Čebyševových funkcí pomocí těchto vz

$$\left. \begin{aligned} b_k &= a_k T_k(-\xi) = (-1)^k a_k T_k(\xi) \\ c_k &= a_k \sqrt{1 - \xi^2} U_k(-\xi) = (-1)^{k+1} a_k \sqrt{1 - \xi^2} U_k(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

kde $T_k(\xi), U_k(\xi)$ jsou Čebyševovy funkce prvního a druhého řádu. Tyto fu určíme pomocí rekurentních vztahů

$$\left. \begin{aligned} T_{k+1}(\xi) - 2\xi T_k(\xi) + T_{k-1}(\xi) &= 0 \\ U_{k+1}(\xi) - 2\xi U_k(\xi) + U_{k-1}(\xi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

kde

$$T_0(\xi) = 1, T_1(\xi) = \xi, U_0(\xi) = 0, U_1(\xi) = 1$$

Z koeficientů b_k, c_k polynomu $f(j\omega)$ sestavíme Hurwitzovu matici podle schém

$$\mathbf{H}_{2n} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_n & c_{n-1} & c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_0 \end{array} \right] \quad (3.2)$$

Hurwitzova matice je řádu $2n$. Toto je obecnější případ Hurwitzovy matice, než koeficienty charakteristického polynomu jsou komplexní čísla.

Charakteristický polynom $f(q)$ má všechny kořeny ve stabilní oblasti, jsou všechny sudé hlavní minory Hurwitzovy matice \mathbf{H}_{2n} kladné. Jestliže se poslední minor rovná nule, jsou kořeny $f(q)$ na mezi stability.

Leží-li všechny kořeny charakteristického polynomu $f(q)$ podle (3.277) stabilní oblasti, mají kořeny původního charakteristického polynomu předepsané tlumení, tzn. leží v oblasti vymezené na obr. 109.

Příklad. Mějme jednoduchý systém s charakteristickým polynomem

$$f(p) = p^2 + 1,284p + 1$$

Chceme zjistit, zda relativní tlumení kořenů charakteristického polynomu $f(p)$ větší než $\xi = 0,642$.

Podle vztahů (3.281) určíme nejprve koeficienty b_k, c_k . Platí

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 & c_0 &= 0 \\ b_1 &= -0,824 & c_1 &= 0,984 \\ b_2 &= -0,176 & c_2 &= -0,984 \end{aligned}$$

Hurwitzova matice je

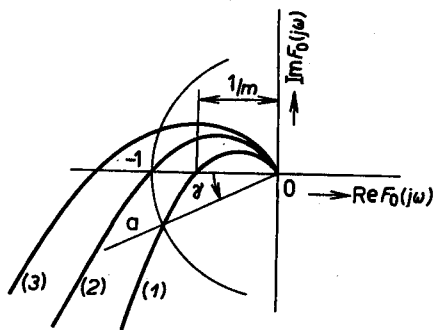
$$\mathbf{H}_{2n} = \begin{bmatrix} -0,984 & 0,984 & 0 & 0 \\ -0,176 & -0,824 & 1 & 0 \\ 0 & -0,984 & 0,984 & 0 \\ 0 & -0,176 & -0,824 & 1 \end{bmatrix}$$

Jelikož $\det \mathbf{H}_3 = 0$, je charakteristický polynom $f(q)$ na mezi stability, a proto původní charakteristický polynom $f(p)$ má relativní tlumení dvou kořenů právě $\xi = 0,642$.

Amplitudová a fázová bezpečnost

Měníme-li parametry otevřeného regulačního obvodu, můžeme tím ovlivňovat stabilitu uzavřeného regulačního obvodu.

Mějme frekvenční charakteristiku otevřeného regulačního obvodu, znázorněnou na obr. 111 tlustou čarou (křivka 1). Podle Nyquistova kritéria snadno zjistíme, že uzavřený regulační obvod je stabilní. Zvětšíme-li hodnotu zesílení otevřeného regulačního obvodu tak, aby frekvenční charakteristika procházela bodem $(-1, j0)$, bude uzavřený regulační obvod na mezi stability (křivka 2 na obr. 111). Zvětšíme-li zesílení otevřeného regulačního obvodu ještě více (křivka 3 na obr. 111), bude uzavřený regulační obvod nestabilní.



Obr. 111. Frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu, který je v uzavřené smyčce stabilní (křivka 1), na mezi stability (křivka 2) a nestabilní (křivka 3)

Vzdálenost frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu od kritického bodu $(-1, j0)$ udává bezpečnost ve stabilitě uzavřeného regulačního obvodu.

Frekvenční charakteristika otevřeného regulačního obvodu (křivka 1 na obr. 111) protíná zápornou reálnou osu ve vzdálenosti $(1/m)$ od počátku. Abychom dosáhli meze stability uzavřeného regulačního obvodu, musíme zvětšit m -krát zesílení otevřeného regulačního obvodu. Číslo m je tzv. amplitudová bezpečnost regulačního obvodu.

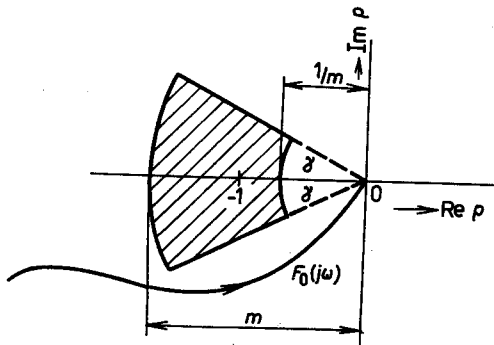
Amplitudová bezpečnost m u stabilního regulačního obvodu určuje, kolikrát je třeba zvětšit (popř. zmenšit) zesílení otevřeného regulačního obvodu, aby uzavřený regulační obvod dosáhl meze stability. Často udáváme amplitudovou bezpečnost v decibelech.

Vedle amplitudové bezpečnosti se používá ještě tzv. fázová bezpečnost γ frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu. Fázová bezpečnost je dána úhlem γ frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu při kmitočtu, při kterém se amplituda frekvenční charakteristiky rovná jedné. Na obr. 111 je to úhel, který se zápornou reálnou osou svírá polopřímka vycházející z počátku

a procházející průsečíkem frekvenční charakteristiky s kružnicí o poloměru středem v počátku.

Složitější regulační obvody mohou být podmíněčně stabilní, to znamená pro určitou hodnotu zesílení otevřeného regulačního obvodu stabilní a z jiným nebo také zmenšením zesílení mohou být nestabilní.

Aby měl stabilní uzavřený regulační obvod amplitudovou bezpečnost (tzn. že zvětšením nebo zmenšením zesílení m -krát teprve dosáhneme meze stability) a fázovou bezpečnost γ (tzn. že teprve při změně fáze o úhel $\pm\gamma$ dosáhneme meze stability), musí se frekvenční charakteristika otevřeného regulačního obvodu vyhýbat vyšrafované oblasti na obr. 112.



Obr. 112. Oblast, kterou nesmí procházet frekvenční charakteristika otevřeného regulačního obvodu s fázovou bezpečností γ a amplitudovou bezpečností m .

Podmínečně stabilní regulační obvod je např. regulační obvod s přenosovou charakteristikou otevřené smyčky

$$F_0(p) = \frac{K(5p + 1)^2}{p^2(0,2p + 1)(10p + 1)}$$

Pro zesílení $K = 1$ je uzavřený regulační obvod stabilní a zvětšením i zmenšením zesílení můžeme dosáhnout meze stability.

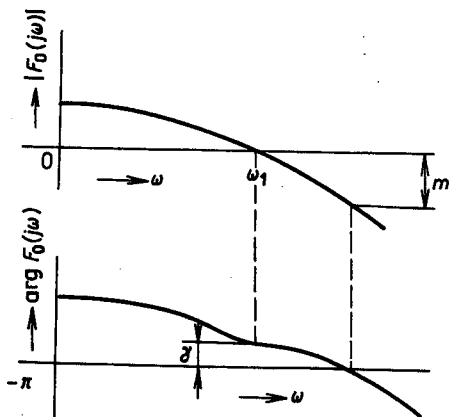
Fázová bezpečnost γ regulačního obvodu bývá v rozsahu $\gamma \in (30^\circ, 90^\circ)$. Amplitudovou i fázovou bezpečnost můžeme také zjistit z průběhu frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu v logaritmických souřadnicích (obr. 113).

Aperiodická stabilita

Aperiodická odezva systému je mnohdy požadována z technologických důvodů. Např. u obráběcích strojů překývnutí nástroje při posunu znamená obvyklé zmetkový výrobek.

Přechodová charakteristika systému nepřesáhne svou ustálenou hodnotu, pokud budou-li kořeny charakteristické rovnice systému pouze reálné záporné. Tato podmínka je pouze postačující.

Ke zjištění, zda kořeny charakteristické rovnice systému jsou pouze reálné záporné, použijeme kritérium aperiodické stability systému, které je uvedeno v následujícím tvrzení:



Obr. 113. Určení amplitudové a fázové bezpečnosti v logaritmických souřadnicích

K tomu, aby charakteristická rovnice systému měla pouze reálné záporné kořeny, je nutné a stačí, aby všechny kořeny polynomu $F(p)$ měly zápornou reálnou část, kde

$$F(p) = f(p^2) + pf'(p^2) = f(p^2) + p \frac{\partial f(p^2)}{\partial p^2} \quad (3.284)$$

kde $f(p)$ je charakteristický polynom systému.

Po dosazení má polynom $F(p)$ tvar

$$F(p) = a_n p^{2n} + na_n p^{2n-1} + a_{n-1} p^{2n-2} + (n-1) a_{n-1} p^{2n-3} + \dots + a_1 p^2 + a_1 p + a_0 \quad (3.285)$$

Koeficienty polynomu $F(p)$ jsou

$$a_n, na_n, a_{n-1}, (n-1) a_{n-1}, \dots, a_i, ia_i, \dots, a_2, 2a_2, a_1, a_1, a_0$$

Na tuto posloupnost koeficientů polynomu $F(p)$ můžeme použít libovolné kritérium stability.

Kritérium aperiodické stability zaručuje, že přechodová charakteristika nepřesáhne svou ustálenou hodnotu (nenastane překývnutí), ale nezaručuje monotónní průběh přechodové charakteristiky.

3.5.7. Stabilita regulačního obvodu

V tomto odstavci odvodíme tzv. postačující podmínky stability uzavřeného regulačního obvodu složeného z řízeného systému a regulátoru.

Uvažujme obecný přenos systému a regulátoru

$$F_S(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{B^+(p) B^-(p)}{A^+(p) A^-(p)}, \quad F_R(p) = \frac{R(p)}{P(p)} = \frac{R^+(p) R^-(p)}{P^+(p) P^-(p)} \quad (3.286)$$

$A(p)$, $B(p)$ jsou polynomy ve jmenovateli a čitateli přenosu systému, které rozdělíme na stabilní a nestabilní kořenové činitele označené znaménky + a -.

Stabilní kořenové činitele mají všechny kořeny v levé polorovině. Podobný rozklad provedeme i u čitatele a jmenovatele přenosu regulátoru.

Charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu je

$$1 + F_o(p) = 1 + F_s(p) F_R(p) = 0 \quad (3.28)$$

Charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu je

$$B(p) R(p) + A(p) P(p) \quad (3.28)$$

Velmi často volíme přenos regulátoru tak, abychom přenosem regulátoru vykrátily některé kořenové činitele systému.

Příklad. Mějme systém s přenosem

$$F_s(p) = \frac{K}{p(2p + 1)}$$

Volíme-li přenos regulátoru

$$F_R(p) = \frac{2p + 1}{0,2p + 1}$$

je přenos otevřené smyčky

$$F_o(p) = \frac{K}{p(2p + 1)} \cdot \frac{2p + 1}{0,2p + 1} = \frac{K}{p(0,2p + 1)}$$

Charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu je ale podle (3.28)

$$f(p) = B(p) R(p) + A(p) P(p) = (2p + 1) [K + p(0,2p + 1)]$$

Složený systém tvořený systémem a regulátorem je třetího řádu, neboť řízení je druhého řádu a regulátor prvního řádu. V uzavřené i otevřené smyčce má složený systém vykrácený kořenový činitel $(2p + 1)$ ve jmenovateli přenosu. Stav složeného systému odpovídající tomuto kořenovému činiteli je neřiditelný nebo nepozorovatelný, a proto nemá žádný vliv na vnější chování systému.

V tomto odstavci chceme ukázat, že krácení nul a pólů systému póly a nulami regulátoru nemůže být libovolné.

Pokud se budeme snažit vykrátit nestabilní póly systému nestabilními nulami regulátoru, bude podle (3.286) platit

$$R(p) = A^-(p) R_1(p) \quad (3.289)$$

kde $R_1(p)$ je libovolný polynom. Potom charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu bude podle (3.288)

$$BR + AP = A^-(p) [B(p) R_1(p) + A^+(p) P(p)] = 0 \quad (3.290)$$

Charakteristická rovnice má nestabilní kořeny rovné kořenům polynomu $A^-(p)$, a proto je uzavřený regulační obvod nestabilní. Nestabilita tohoto obvodu je zvláštního druhu, neboť je nestabilní jeho nepozorovatelná nebo neřiditelná část. V ideálním případě, budou-li nestabilní nuly regulátoru přesně rovny nestabilním pólům systému, se nestabilita tohoto regulačního obvodu neprojeví na jeho výstupu.

Pokud ovšem nezvolíme nestabilní nuly regulátoru přesně rovně nestabilním pólům systému, projeví se nestabilita celého regulačního obvodu i na jeho výstupu.

Podobná situace nastane, snažíme-li se vykrátit nestabilní nuly systému nestabilními póly regulátoru. Pak podle (3.286) platí

$$P(p) = B^-(p) P_1(p) \quad (3.291)$$

kde $P_1(p)$ je libovolný polynom. Charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu je

$$BR + AP = B^-(p) [B^+(p) R(p) + A(p) P_1(p)] = 0 \quad (3.292)$$

Tato charakteristická rovnice má potom nestabilní kořeny rovné nestabilním nulám systému (nestabilní kořeny polynomu $B^-(p)$), a proto je uzavřený regulační obvod nestabilní. Nestabilní je opět pouze neřiditelná nebo nepozorovatelná část systému.

Odtud plyne důležitý závěr, že přenosem regulátoru nesmíme krátit nestabilní nuly ani nestabilní póly systému.

Předcházející podmínka se často uvádí ve tvaru

$$F_w(p) = B^-(p) D(p) \quad (3.293)$$

$$F_e(p) = 1 - F_w(p) = A^-(p) Q(p) \quad (3.294)$$

kde $F_w(p)$ je přenos řízení, $F_e(p)$ je přenos odchylky a $Q(p)$ a $D(p)$ jsou libovolné stabilní přenosy. Z toho, co zde bylo ukázáno, snadno odvodíme předcházející podmínky, neboť platí

$$F_w(p) = \frac{F_S F_R}{1 + F_S F_R} = \frac{B^+ B^- R^+ R^-}{B^+ B^- R^+ R^- + A^+ A^- P^+ P^-} = B^- \frac{B^+ R}{BR + AP} = B^- D$$

$$F_e(p) = \frac{1}{1 + G_S G_R} = \frac{A^+ A^- P^+ P^-}{B^+ B^- R^+ R^- + A^+ A^- P^+ P^-} = A^- \frac{A^+ P}{BR + AP} = A^- Q$$

Pokud nekrátíme nestabilní póly a nuly systému nulami a póly regulátoru, platí (3.293) a (3.294).

Vztahy (3.293) a (3.294) se také nazývají postačující podmínky stability uzavřeného regulačního obvodu.

Velká většina spojitých řízených systémů má stabilní nuly a póly (tzn. systémy jsou stabilní a zároveň jsou to systémy s minimální fází), a proto popsany druh nestability uzavřeného regulačního obvodu nemůže nastat. Proto byly tyto podmínky dříve odvozeny u diskrétních regulačních obvodů.

3.6. Syntéza regulačního obvodu

3.6.1. Podklady pro syntézu

Syntézou regulačního obvodu rozumíme stanovení takové struktury a parametrů regulačního obvodu, aby byly splněny požadavky, které klademe na regulační pochod.