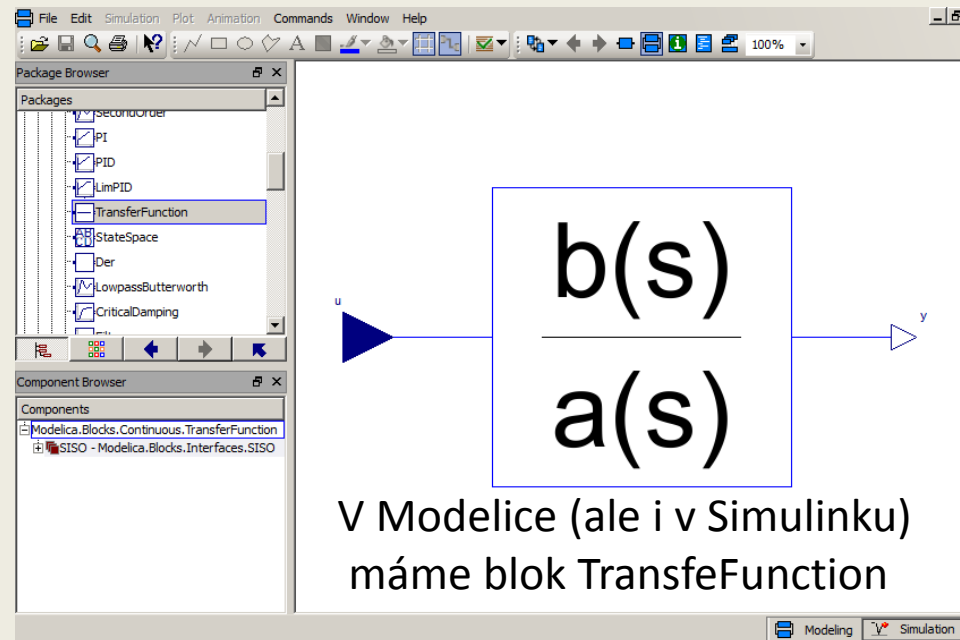
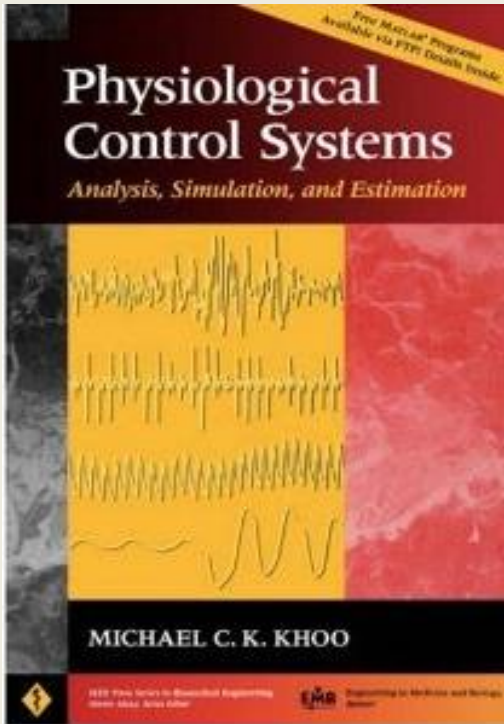


# Analýza lineárních regulačních systémů v časové doméně



# Studijní materiály



**Regulace**

Menu Zobrazit O programu

Úvod 0. Úvod Další

### Základní dynamické vlastnosti fyziologických regulačních systémů demonstrovány simulačními experimenty

Regulace jsou nezbytnou složkou organizace životních procesů. Jsou např. součástí mechanismů homeostázy, řízení efektivního člověka orientovaného pohybu a automatické kompenzace působení nahodilých vlivů zevního a vnitřního prostředí organismu. Cílem tohoto programu, který je členěn do 15 panelů, je prostřednictvím interaktivní seznámení se základními variantami chování regulačních systémů a závislosti regulačního chování na vstupních vlivech a vlastnostech struktury systému. V míře potřebné pro porozumění jsou zavedeny některé elementární pojmy a koncepce nauky o regulaci a také metodologie experimentálního stanovování charakteristických vlastností systému a jejich grafického a analytického vyjádření. Program doplňuje tematiku regulací přednášenou v rámci fyziologie a patologické fyziologie (viz též učební texty) o modelové příklady dynamických vlastností regulačních systémů. Simulační experimenty s těmito modely umožňují praktická cvičení na virtuálních objektech, která by byla jen výjimečně nebo obtížně – pokud vůbec – realizovatelná na fyziologickém originálu. Spektrum těchto možností, které program nabízí, je poměrně široké a lze je plně využívat bez zvláštních předběžných znalostí vzhledem k uživatelsky vstřícnému ovládní celého programu i jednotlivých úloh. Každá kapitola obsahuje po pravé straně okno s informacemi týkajícími se příslušné úlohy a způsobu jejího řešení.

*Regulační systém:* Regulace je děj (označovaný též jako *regulační pochod*), který má tendenci minimalizovat odchylky regulované veličiny od tzv. *žádaných hodnot* nebo *stavu* regulované veličiny (krevní tlak, dráha a rychlost členěného pohybu ruky jsou příklady regulovaných veličin). Průběh a výsledek regulačního pochodu závisí na struktuře regulačního systému, na parametrech jeho členů a na vlastnostech poruchového vlivu, který vyvolává odchylku od žádané hodnoty. Nezbytnou, ale nikoli postačující podmínkou regulačních vlastností je *obvod zpětné vazby* (obr.2), který zprostředkuje působení odchylek regulované veličiny (tj. výstupní veličiny regulované soustavy) na vstup této soustavy. *Předpokladem regulace je záporná zpětná vazba*, a to taková, která působí kompenzačně proti odchylce. *Kladná zpětná vazba* má na odchylku naopak *kumulativní* účinek, zvětšuje odchylku a způsobuje nestabilitu. Na regulační systém lze pohlízet jako na dynamický nebo informační systém nebo i s jiných hledisek, v daných souvislostech je však sledován jen základní dynamický aspekt. Nejjednodušší adekvátní zjišťování vlastností (resp. kvality) regulačního systému (jako dynamického systému) se provede např. působením standardizovaného signálu (podnětu, poruchy) na jeho vstup (viz např. glykémický test, vliv definované fyzické zátěže na krevní oběh); hodnotí se odezva, tj. průběh regulované veličiny. Průběhy regulované veličiny na obr.1 jsou příklady, které ilustrují možnost hodnotit amplitudu zářmitu, průběh odezvy a regulační dobu a popř. regulační plochu jako indikátory kvality regulace; za stejných, standardizovaných podmínek lze tak i srovnávat např. glykémickou křivku u různých jedinců. Přitom, struktura souvislosti a kvantitativní podklad sledovaného chování regulované veličiny však za těchto podmínek zůstávají skryty uvnitř černé skřínky systému. Vlastnosti systému se zpětnou vazbou (nebo se zpětnými vazbami) mohou však být velmi rozmanité v závislosti na dynamických vlastnostech jeho členů a jeho struktuře, takže např. diagram na obr.2 nepoužívá téměř nic o

### Ovládání aplikace

Úlohy jsou rozděleny do 10 tematicky návazných kapitol. Na úvodní obrazovce je možnost volby po rozbalení seznamu kapitol (viz. obr.1) kliknutím na příslušný řádek.

0. Úvod 1. Jednoduché systémy 2. Statické charakteristiky 3. Dynamické charakteristiky 4. Mechanický dynamický systém 5. Regulační obvody 6. Příklad regulace Pco2 7. Model enzymatického systému

Z každé kapitoly je možnost přejít na další, vrátit se k předcházející(m), nebo až do úvodu (viz. obr.2).

Úvod Zpět Další

Obr. 2: Možnost výběru úlohy v dalších kapitolách

Kliknutí na položku **Konec** v **Menu** na horní liště zastaví běh programu, kliknutím na položku **Help** v **Zobrazit** lze schovat nebo vybatvit informativní okno po pravé straně obrazovky (stejnou funkci umožňuje svíslá lišta s označením **Help**).

Každou úlohu lze ovládat prvky **START** (spuštění úlohy), **PAUSE** (pocastavení), **STOP** (zastavení), **RESTART** (restart s počátečním nastavením parametrů), které jsou vždy - s výjimkou Úvodu - umístěny v levém horním rohu kapitoly (obr.3). Úlohy mají dle potřeby také své specifické prvky umožňující nastavení či změnu parametrů, výběr vstupního signálu a řádu systému, přidání prvku do systému, ovládní grafů, zápis dat do tabulky, atd.

<http://physiome.cz/atlas/sim/RegulaceSys/>

[http://patf-biokyb.lf1.cuni.cz/wiki/cvut/mos\\_materialy](http://patf-biokyb.lf1.cuni.cz/wiki/cvut/mos_materialy) usr:pwd biokyb:a6m33mos

[http://patf-biokyb.lf1.cuni.cz/wiki/cvut/mos\\_materialy](http://patf-biokyb.lf1.cuni.cz/wiki/cvut/mos_materialy) usr:pwd biokyb:a6m33mos

# Systemy

- Spojité vs diskrétní
- Deterministické vs stochastické
- Časově proměnné vs časově invariantní
  - Nezávisí na tom, „kolik je hodin“
- Kauzální vs nekauzální
  - Kauzální systém závisí pouze na minulých a současných hodnotách
  - Derivace je přirozeně NEKAUZÁLNÍM výpočtem
  - Tato kauzalita nemá nic společného s tím, že je modelována „akauzální“
- Lineární vs nelineární

# Lineární systémy

**Lineární systém** (soustava) je systém, v němž platí princip **superpozice**.

To znamená, že za předpokladu, že  $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$  a  $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$  platí:

**Aditivita** (výstupem pro součet dvou signálů bude stejný, jako součet výstupů pro tyto signály jednotlivě)

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

**Homogenita** (výstup pro násobek jiného vstupu bude roven stejnému násobku výstupu pro tento vstup):

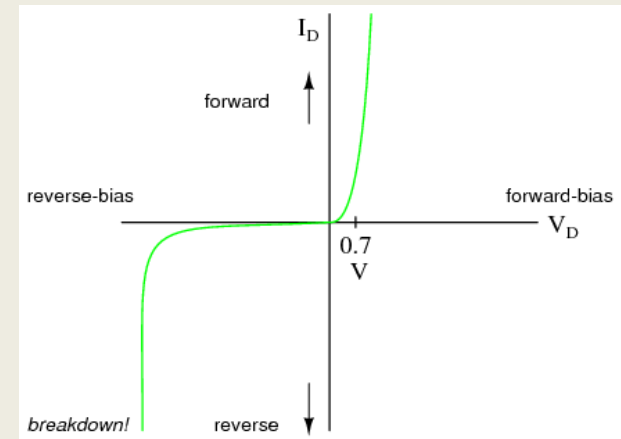
$$ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$$

Tyto podmínky lze také zapsat jako jedinou:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

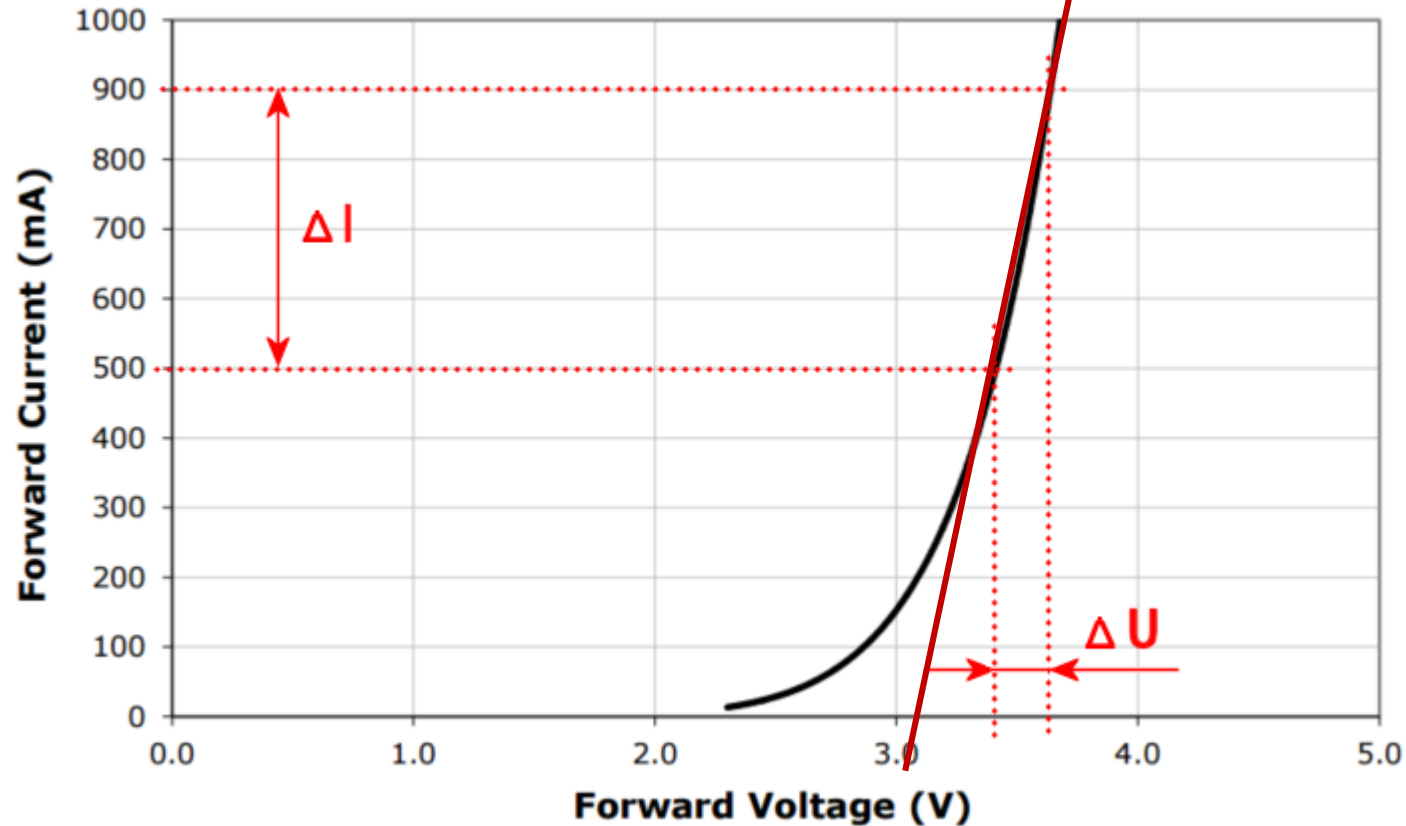
# Superpozice

- řešení průtoku elektrického proudu
- skládání působení sil na hmotný bod
- je-li systém lineární a lze využít superpozice, je řešení takového systému často velmi jednoduché a jednoznačné.
- Chování takových systémů lze předpovědět i do budoucnosti.
- Nelineární – nelze využít (např. dioda)



# Linearizace

- Zvolím pracovní oblast (bod)





# Systemová analýza



Linear time indifferent systems



LT



# LTI systémy

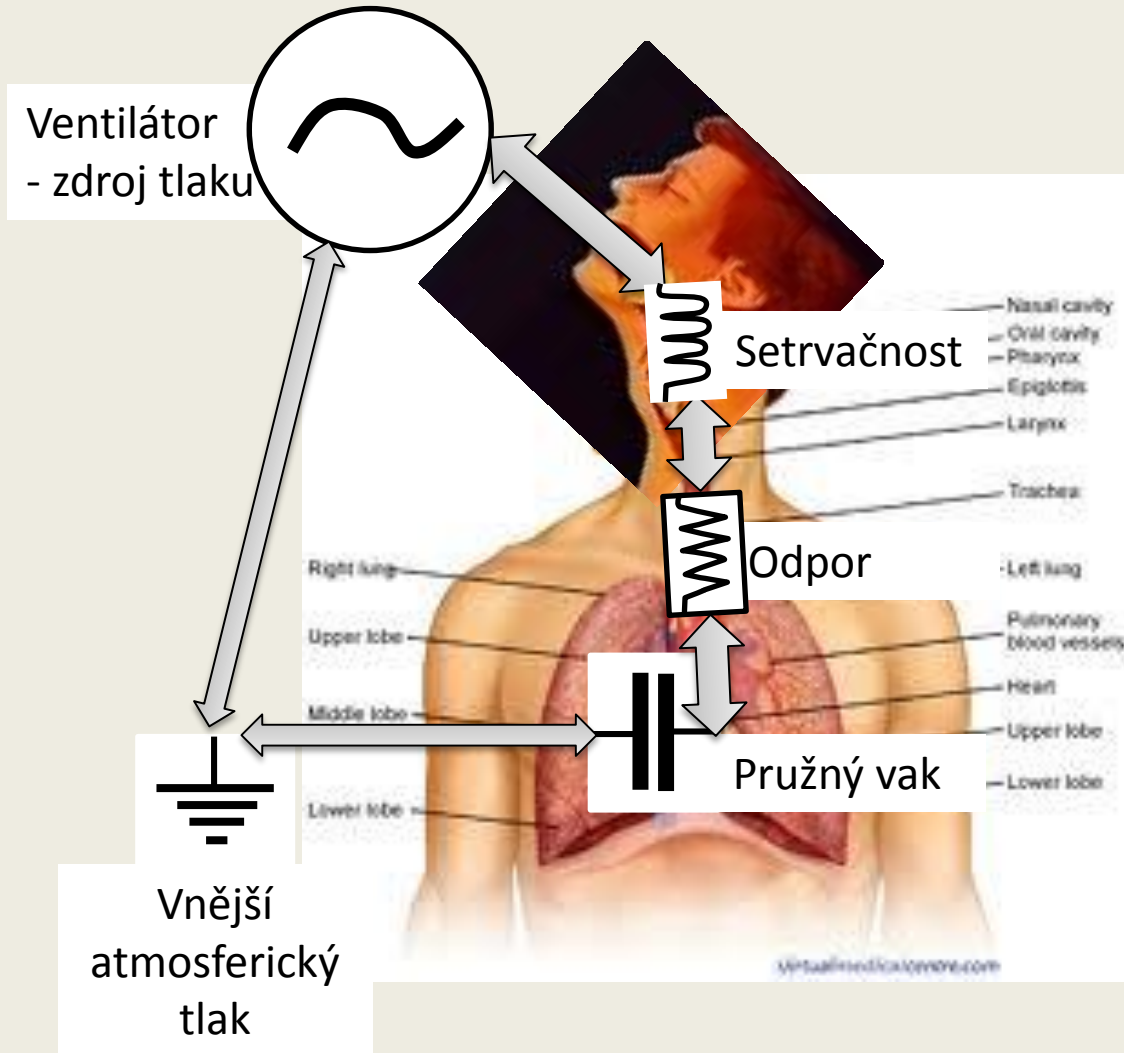
- Matematicky elegantní vztahy mezi vstupy a výstupy
- Lze určit výstupní odezvu na jakýkoli vstup
- Lze určit vstup při pozorování výstupu
  
- Čili: znám-li reakci na krátký vstup, mohu seskládat libovolný vstup a tím i libovolný výstup
- Nevytváří nové frekvenční složky, pouze zesiluje či potlačuje



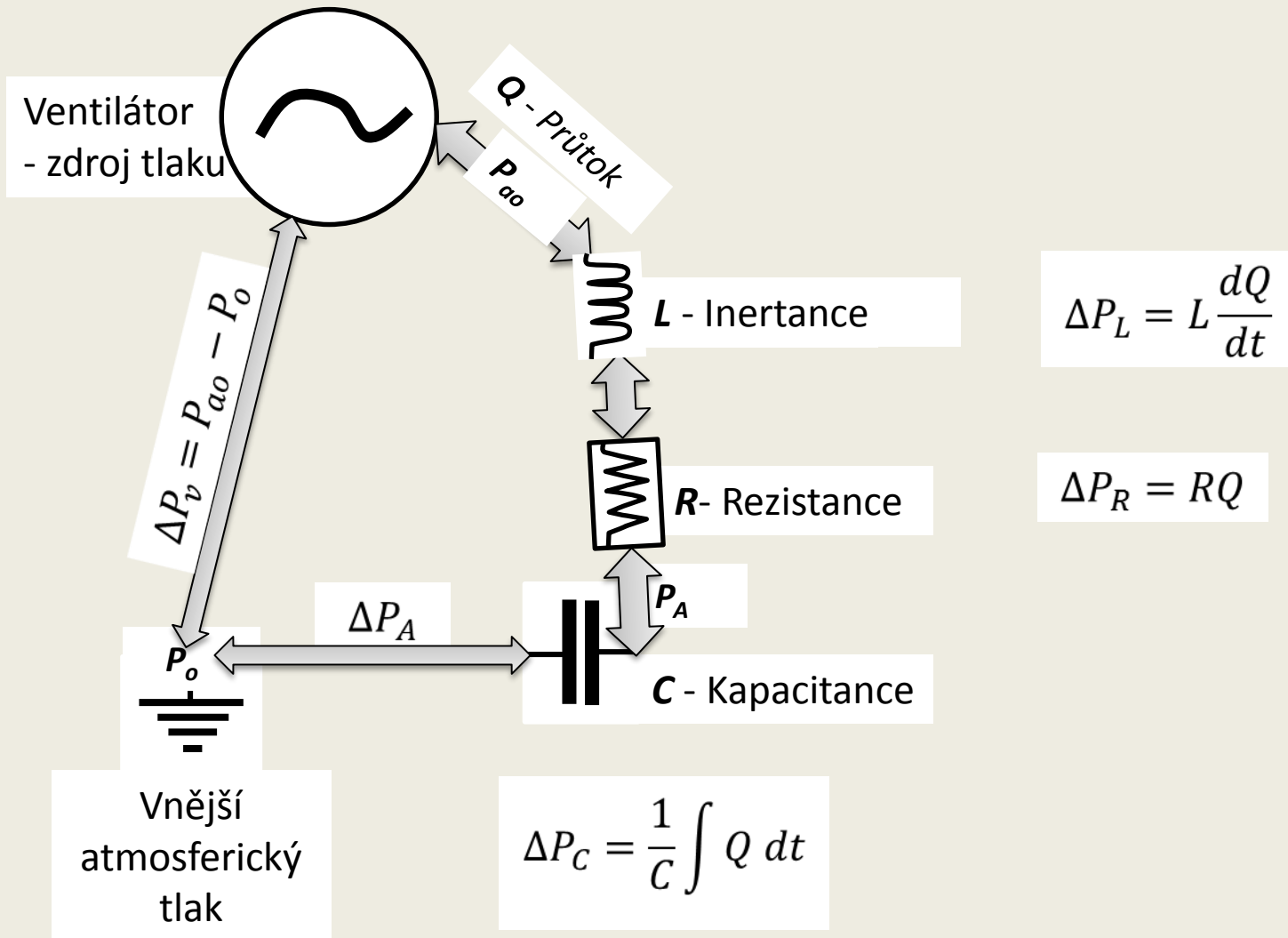
# Popis LTI systémů

- Vnější popis systému
  - diferenciální rovnice
  - přenos a poloha pólů a nul přenosu systému
  - přechodová funkce
  - impulsní funkce
  - kmitočtový přenos
- Vnitřní popis systému (okamžitý stav)
  - Stavový popis (stavové veličiny)

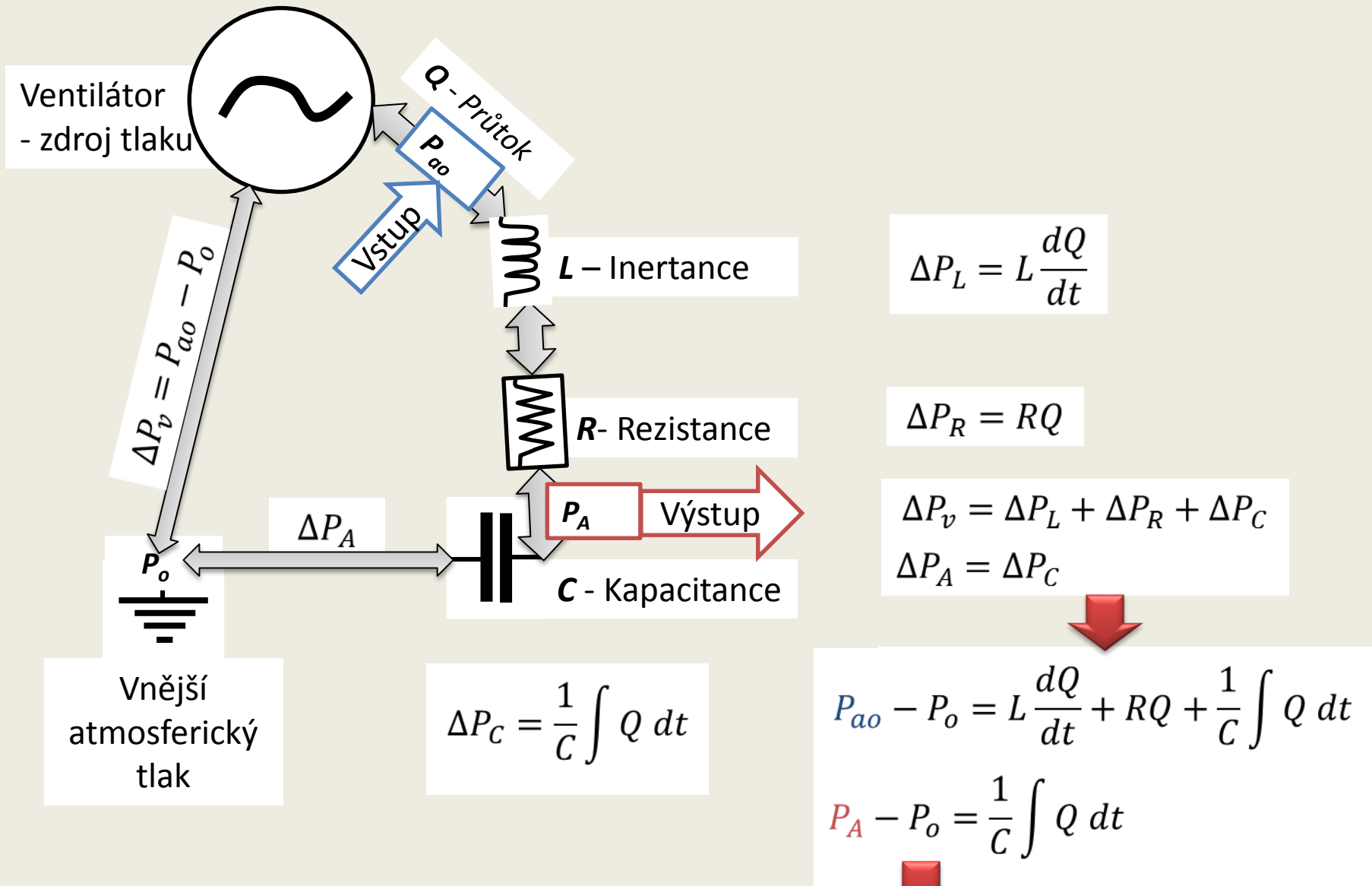
# Nejjednodušší model mechaniky dýchání



# Nejjednodušší model mechaniky dýchání



# Nejjednodušší model mechaniky dýchání



$$\frac{\text{Výstup}}{\text{Vstup}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

řešení

$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$

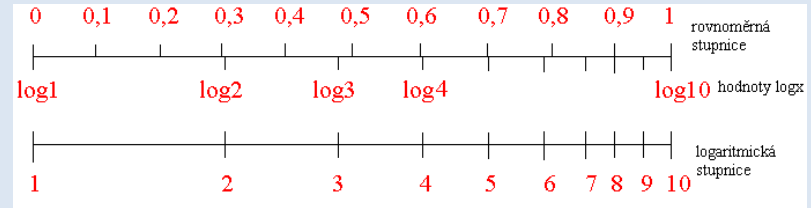
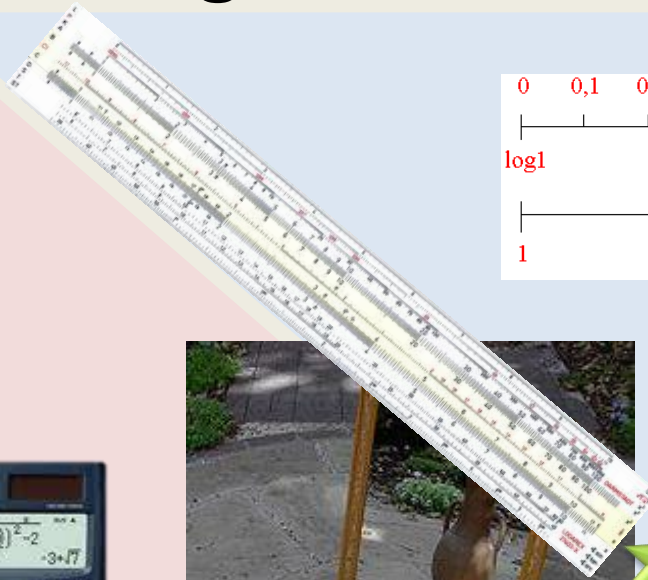
# Nejjednodušší model mechaniky dýchání

$$\frac{\text{Výstup}}{\text{Vstup}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

← řešení ?

$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$

# Logaritmické zrcadlo



$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^b) = b \log(a)$$

sčítání a odečítání

$ab$

násobení a dělení

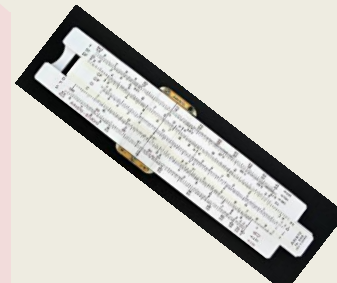
$a/b$

$a^b$

umocňování / odmocňování

Prostor obrazu

Prostor originálu

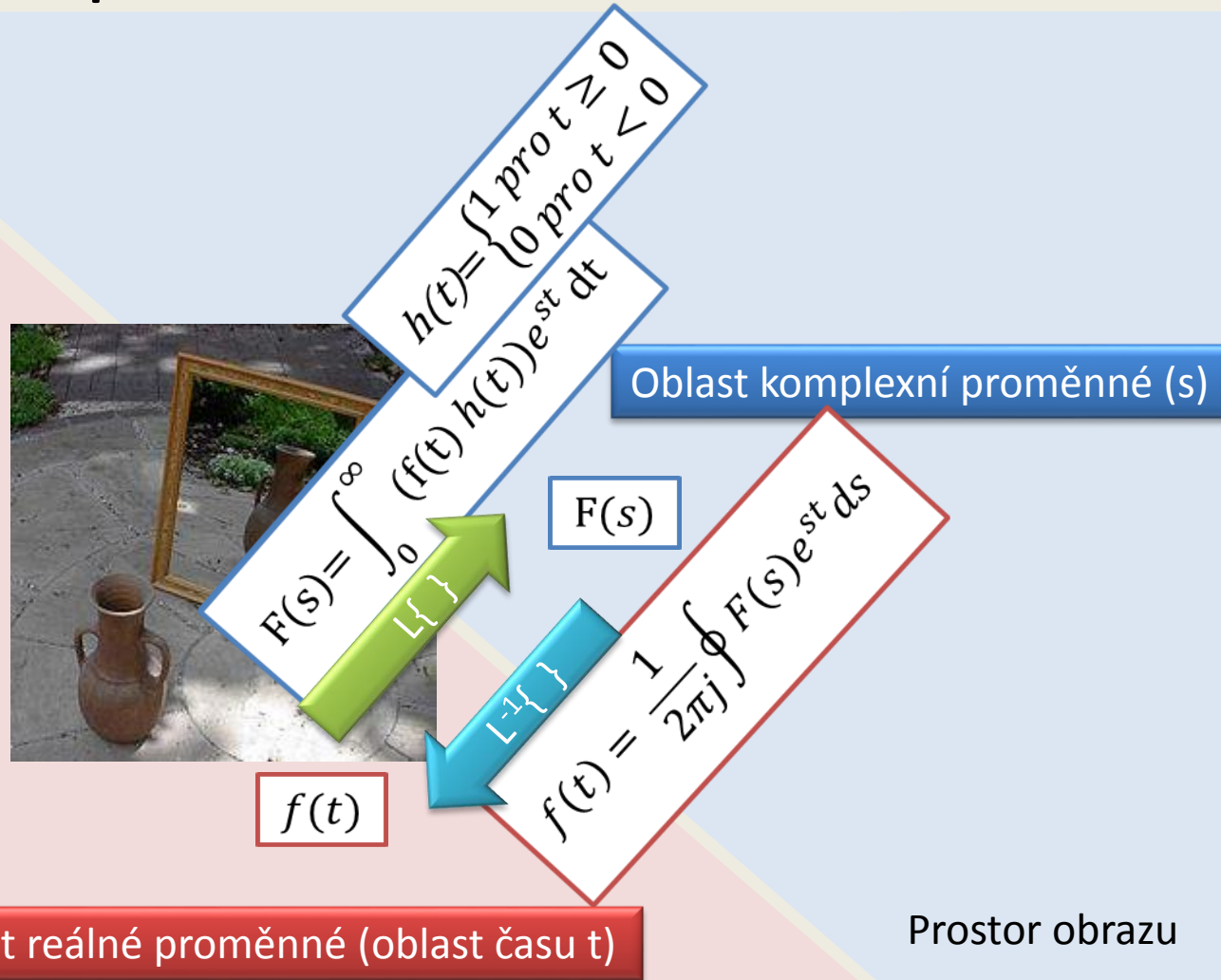


$$\frac{V_{\text{ystup}}}{V_{\text{stup}}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

řesení

$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$

# Laplaceovo zrcadlo



Prostor originálu

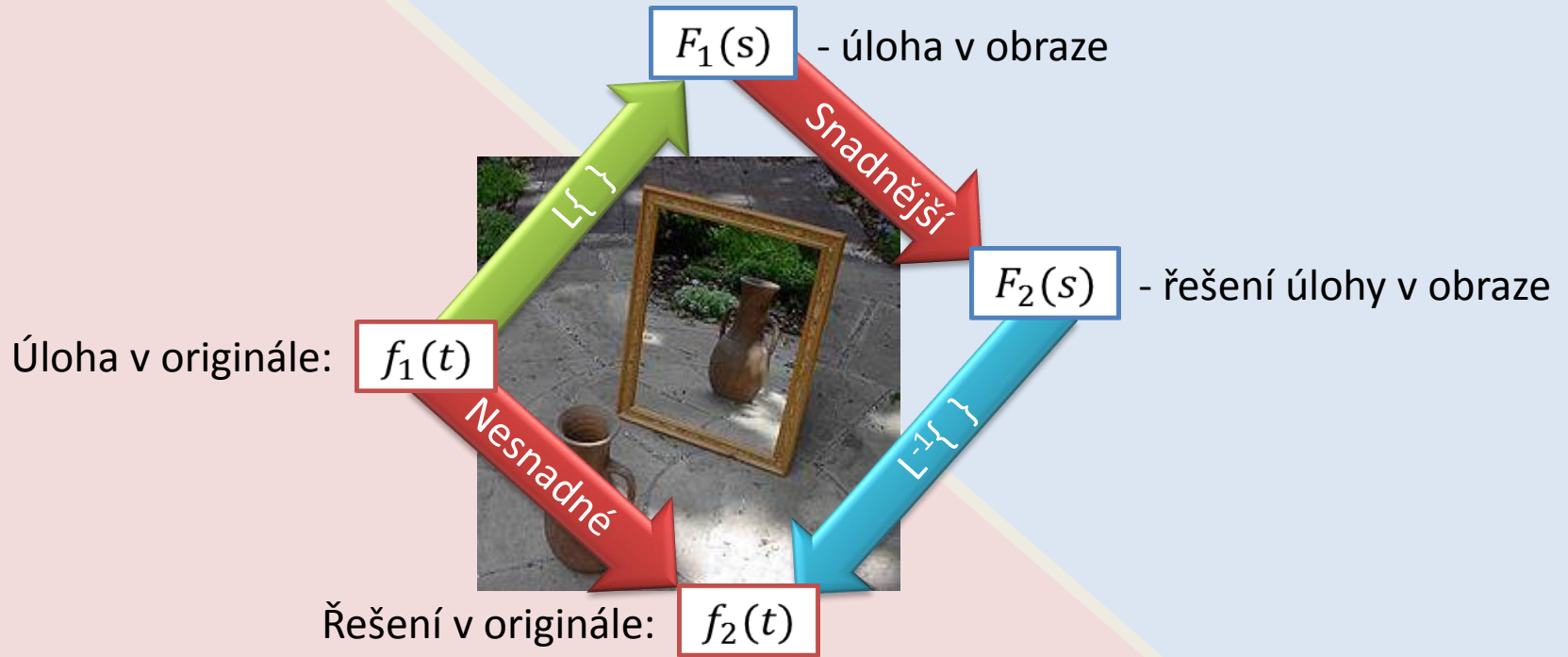
← řešení ?

$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$

$$\frac{V_{\text{výstup}}}{V_{\text{vstup}}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

# Laplaceovo zrcadlo

Oblast komplexní proměnné (s)



Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu



$$\frac{\text{Výstup}}{\text{Vstup}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

řešení ?

$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$



# Laplaceovo zrcadlo

$$L \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0)$$

Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$  - úloha v obraze

Snadné

$F_2(s)$  - řešení úlohy v obraze

Úloha v originále:

$f_1(t)$

Nesnadné

Řešení v originále:

$f_2(t)$



Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

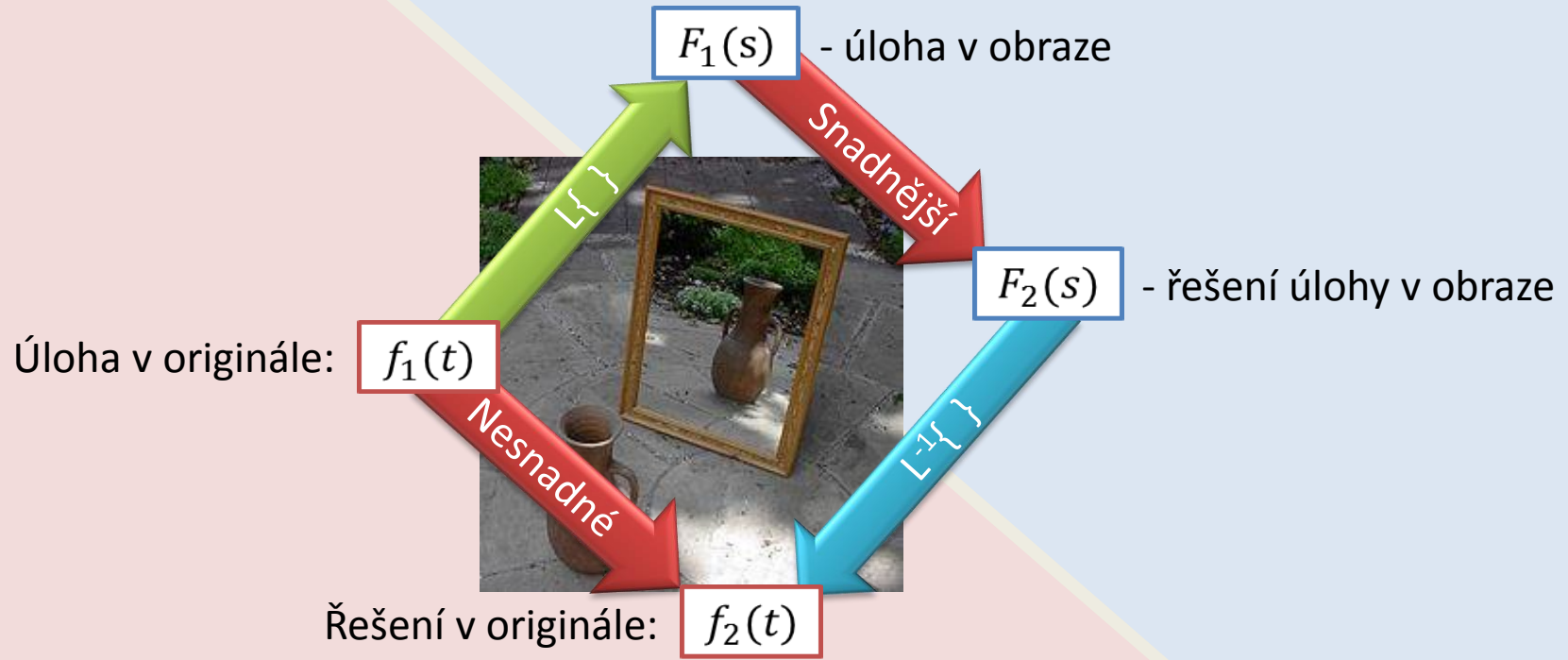
Prostor originálu



# Laplaceovo zrcadlo

$$L \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Oblast komplexní proměnné (s)



Oblast reálné proměnné (oblast času t)

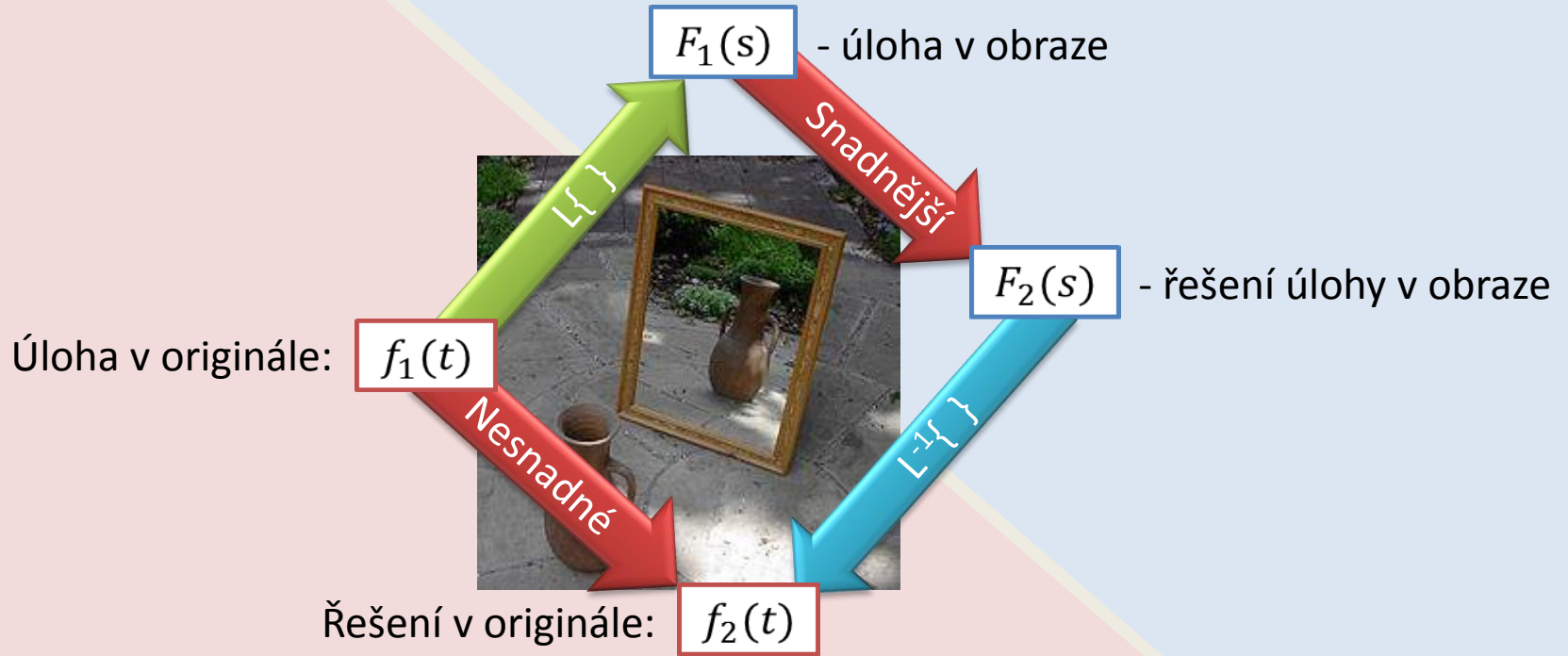
Prostor obrazu

Prostor originálu



# Laplaceovo zrcadlo

$$L \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-2} f''(0) - \dots - f^{n-1}(0)$$



Oblast reálné proměnné (oblast času  $t$ )

Prostor obrazu

Prostor originálu



# Laplaceovo zrcadlo

Oblast komplexní proměnné (s)

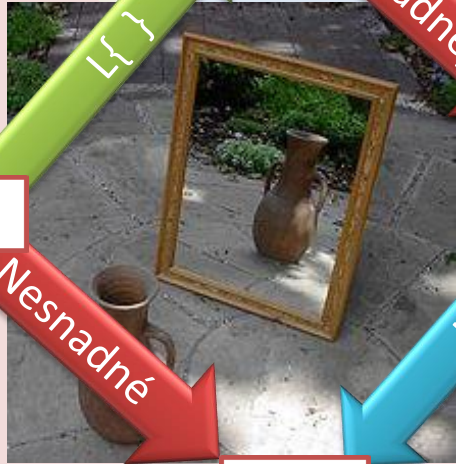
$$L \left\{ \int_0^1 f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

$F_1(s)$  - úloha v obraze

Snadnější

$F_2(s)$  - řešení úlohy v obraze

Úloha v originále:  $f_1(t)$



Nesnadné

Řešení v originále:  $f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu



# Laplaceovo zrcadlo

Linearita obrazu a originálu

$$L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

$$L^{-1}\{b_1 F_1(s) + b_2 F_2(s)\} = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t)$$

Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$  - úloha v obraze

Snadnější

$F_2(s)$  - řešení úlohy v obraze

Úloha v originále:  $f_1(t)$

Nesnadné

Řešení v originále:  $f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu



Posun originálu (zpoždění)  
= útlum obrazu

# Laplaceovo zrcadlo

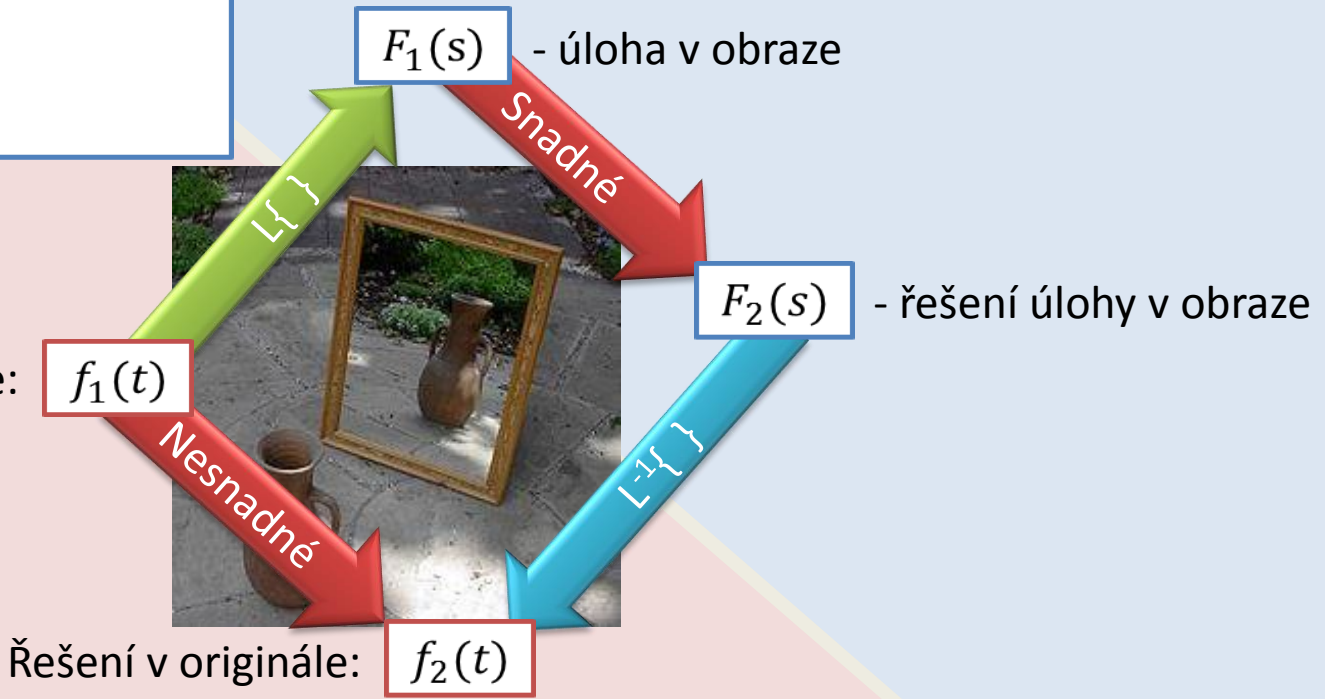
$$L\{f(t - a)\} = e^{-as} F(s)$$

kde

$$a \geq 0$$
$$f(t - a) > 0$$

pro  $t < a$

Oblast komplexní proměnné (s)



Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

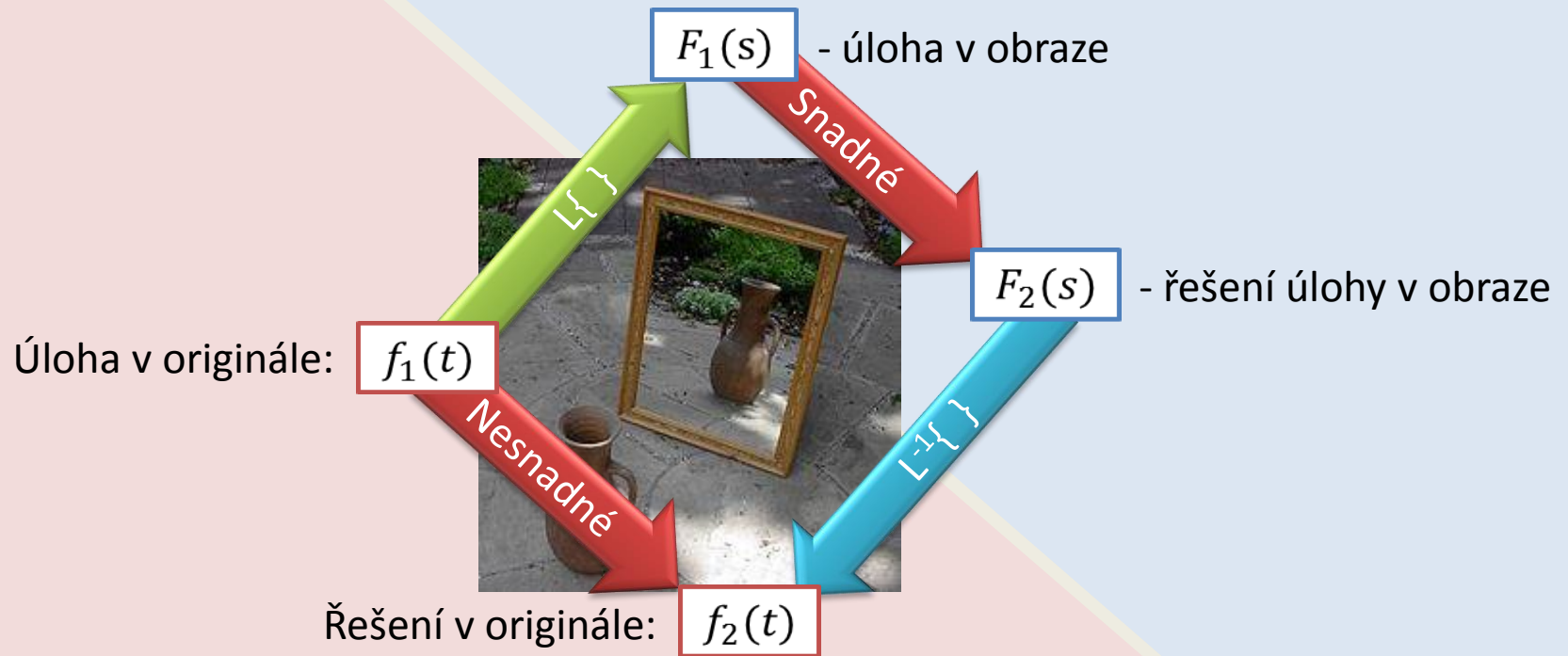




# Posun obrazu = útlum originálu Laplaceovo zrcadlo

$$L\{e^{-at}f(t)\} = F(s + a)$$

Oblast komplexní proměnné ( $s$ )



Oblast reálné proměnné (oblast času  $t$ )

Prostor obrazu

Prostor originálu



# Laplaceovo zrcadlo

$$L \left\{ f \left( \frac{t}{a} \right) \right\} = aF(as)$$

$$L^{-1} \left\{ F \left( \frac{s}{a} \right) \right\} = af(at)$$

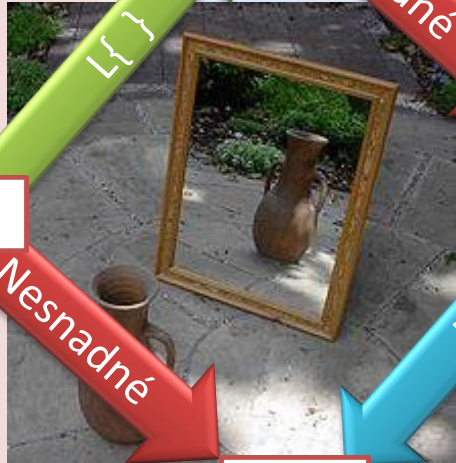
Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$  - úloha v obraze

Snadné

$F_2(s)$  - řešení úlohy v obraze

Úloha v originále:  $f_1(t)$



Nesnadné

Řešení v originále:  $f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu





Originál:  $f(t)$

Obraz:  $F(s)$

Jednotkový impulz:  $\delta(t)$

1

Jednotkový skok: 1

$\frac{1}{s}$

$t$

$\frac{1}{s^2}$

$e^{-at}$

$\frac{1}{s+a}$

$\frac{r^k}{k!}$

$\frac{1}{s^{k+1}}$

$\frac{r^k}{k!} e^{-at}$

$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$

$\sin \omega t$

$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$e^{-at} \sin \omega t$

$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$

$1 - e^{-at}$

$\frac{a}{s(s+a)}$

...atd.

Prostor obrazu

Prostor originálu

## Wolfram Mathematica:

```
In[1] = LaplaceTransform[t^4 Sin[t], t, s]
```

```
Out[1]=  $\frac{24(1-10s^2+5s^4)}{(1+s^2)^5}$ 
```

```
In[2]= InverseLaplaceTransform[(24 (1-10 s^2+5 s^4))/(1+s^2)^5,s,t]
```

```
Out[2] =  $t^4 \sin[t]$ 
```



Originál:  $y(t), x(t)$ Obraz:  $Y(s), X(s)$ 

$$Y(s) = b_2 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s) - b_1 x(0) - b_2 s x(0) - b_2 \frac{dx(0)}{dt}$$

$$y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Prostor obrazu

Prostor originálu



Originál:  $y(t), x(t)$ Obraz:  $Y(s), X(s)$ 

$$a_1 sY(s) + Y(s) - a_1 y(0) = b_2 s^2 X(s) + b_1 sX(s) + b_0 X(s) - b_1 x(0) - b_2 s x(0) - b_2 \frac{dx(0)}{dt}$$

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Prostor obrazu

Prostor originálu



Originál:  $y(t)$ ,  $x(t)$ Obraz:  $Y(s)$ ,  $X(s)$ 

$$\begin{aligned}
 a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + Y(s) - a_1 y(0) - a_2 s y(0) - a_2 \frac{dy}{dt} = \\
 = b_2 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s) - b_1 x(0) - b_2 s x(0) - b_2 \frac{dx(0)}{dt}
 \end{aligned}$$

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Prostor obrazu

Prostor originálu



Originál:  $y(t), x(t)$ Obraz:  $Y(s), X(s)$ 

Při nulových počátečních podmínkách:

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + Y(s) = b_2 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Prostor obrazu

Prostor originálu



Originál:  $f(t)$ Obraz:  $F(s)$ 

Při nulových počátečních podmínkách:

$$Y(s) = b_2 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$a_1 s Y(s) + Y(s) = b_2 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + Y(s) = b_2 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

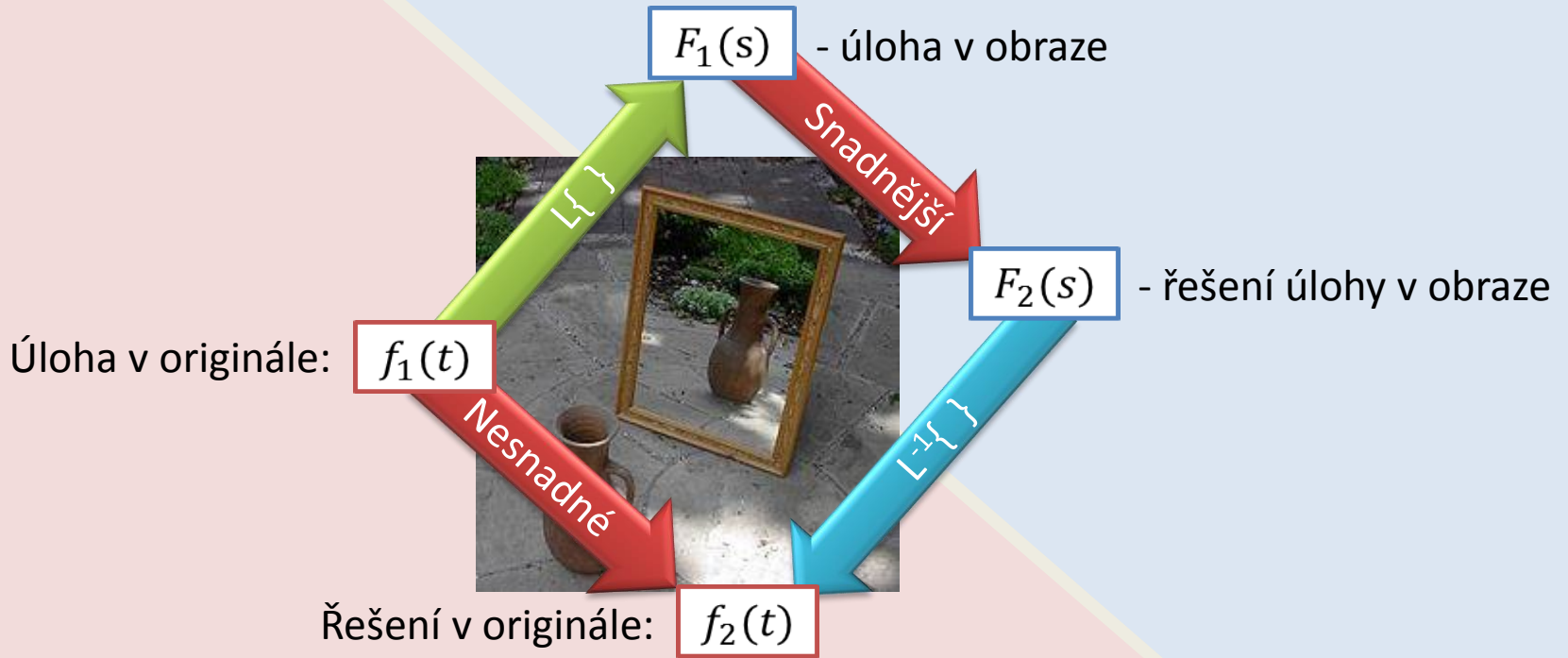
Prostor obrazu

Prostor originálu



# Nejjednodušší model mechaniky dýchání

Oblast komplexní proměnné (s)



Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu



$$\frac{\text{Výstup}}{\text{Vstup}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

řešení ?

$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$

# Laplaceovo zrcadlo

Oblast komplexní proměnné (s)

Úloha v obraze:

$$P_A(s) = P_{ao}(s) (LCs^2 + RCs + 1)$$

Úloha v originále:

$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$

počáteční podmínky:

$$P_A(t_0) = 0, P_A'(t_0) = 0$$

$$P_{ao}(t_0) = 0$$



Řešení úlohy v obraze:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Řešení v originále:

$$\frac{\text{Výstup}}{\text{Vstup}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu





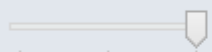


# 1. Jednoduché systémy

## Vstupní signál x

skok  impuls  sinus

Změna vstupního signálu



Amplituda = 1

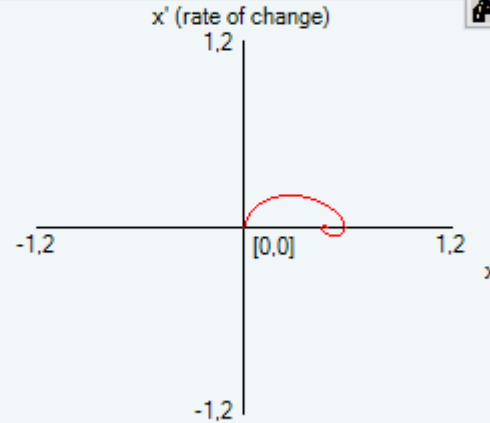
Integrační člen  Derivační člen  Nelin. omezení

## Systém

0. řádu  1. řádu  2. řádu  3. řádu

A0	0,1	5	2,11
A1	0,1	5	3,30
A2	0,1	5	4,48
A3	0,1	5	1,85

## II. Odezva systému v stavové rovině



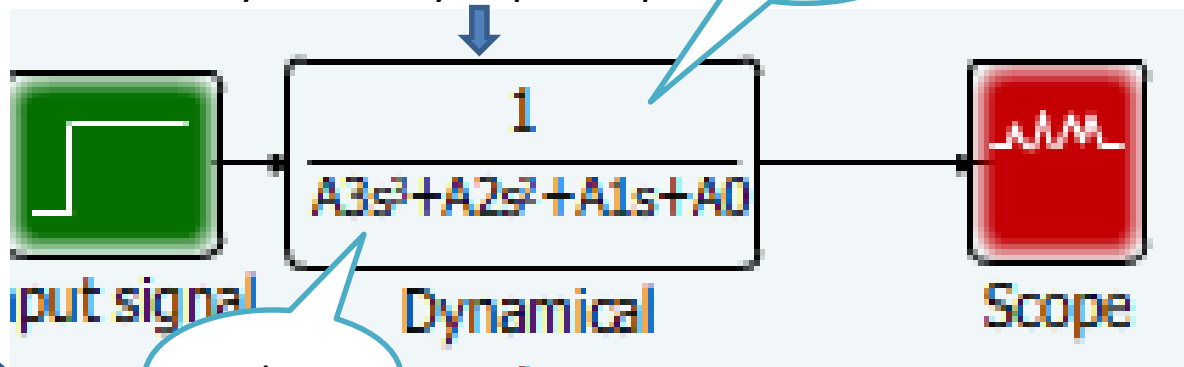
## I. Odezva systému na vstupní signál

x (position)  
1,2

-1,2

Přenos systému: Výstup/Vstup

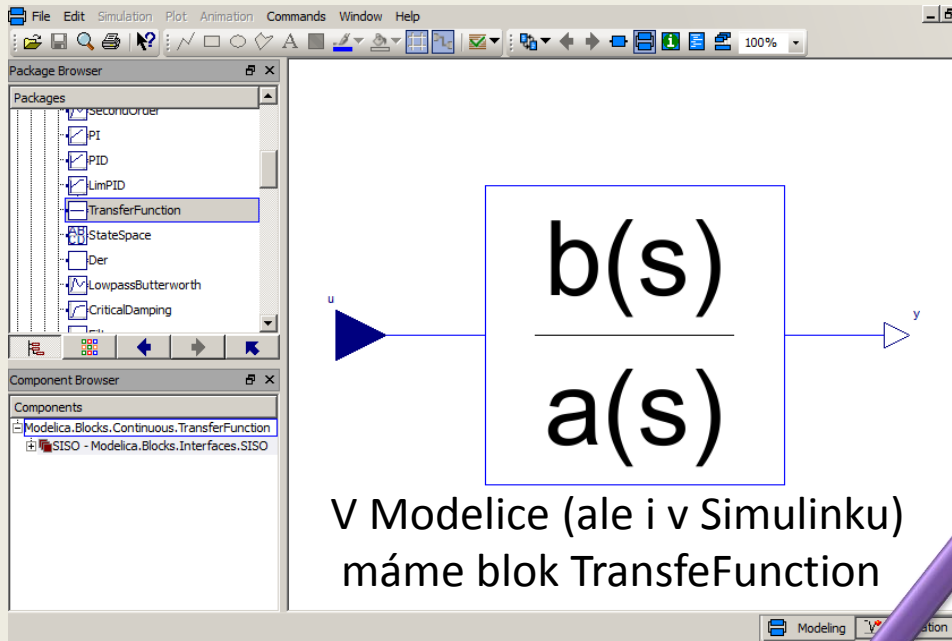
výstup



vstup

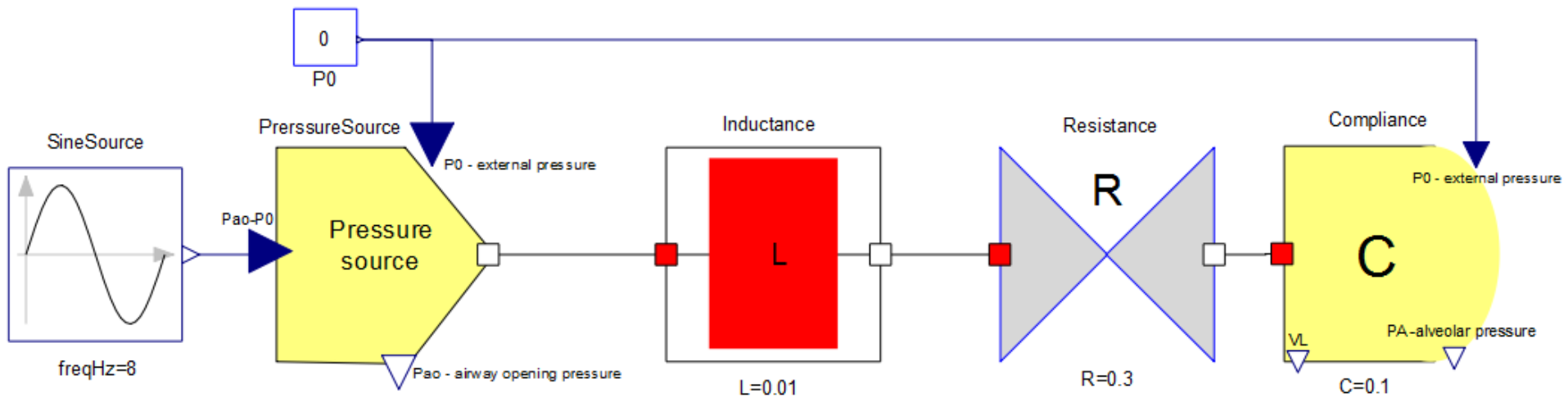
-1,2

# Nejjednodušší model mechaniky dýchání

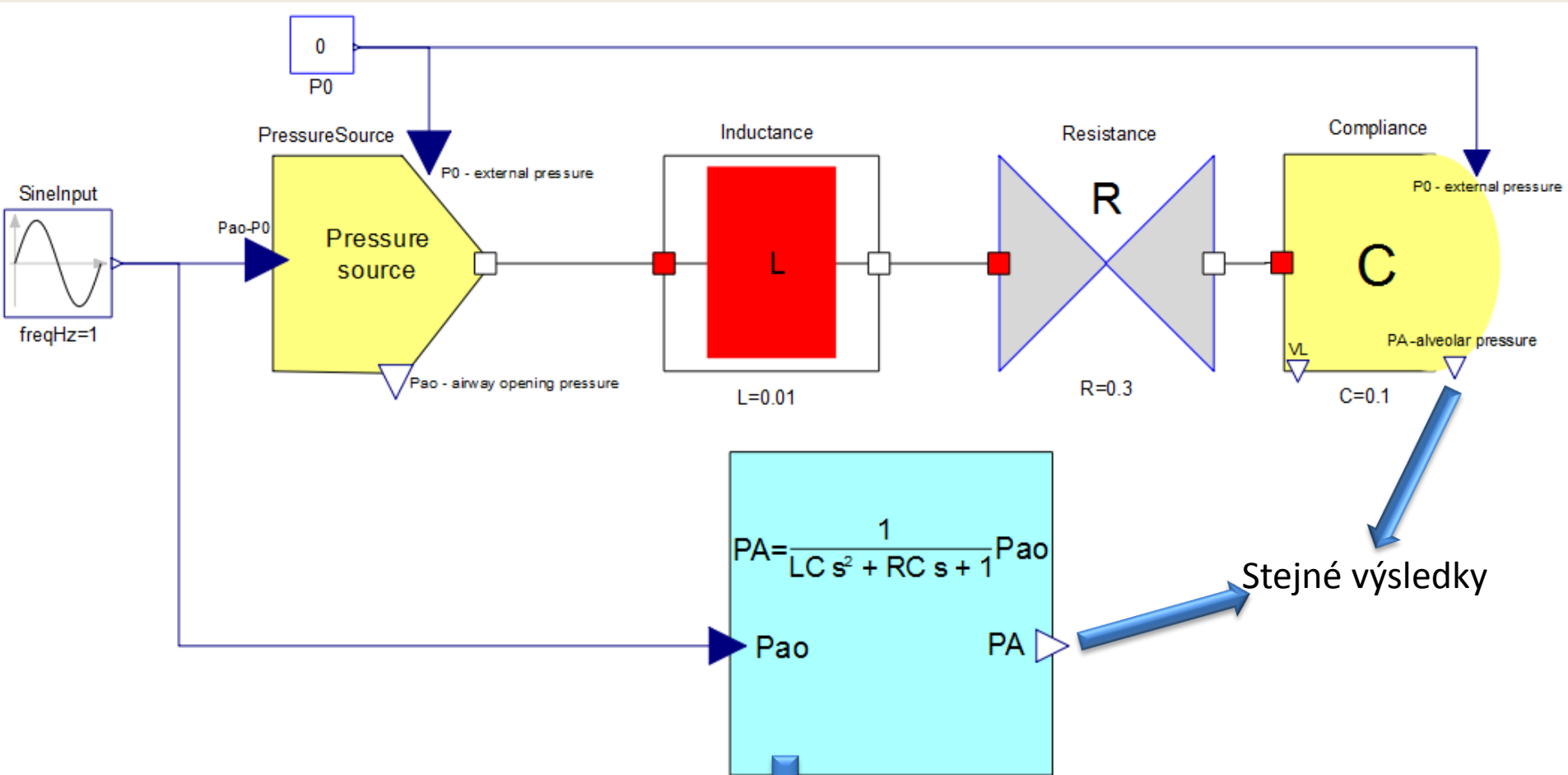


$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\frac{\text{Výstup}}{\text{Vstup}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)} = \frac{P_{ao}(t)}{LC \frac{d^2 P_A(t)}{dt^2} + RC \frac{dP_A(t)}{dt} + P_A(t)} =$$

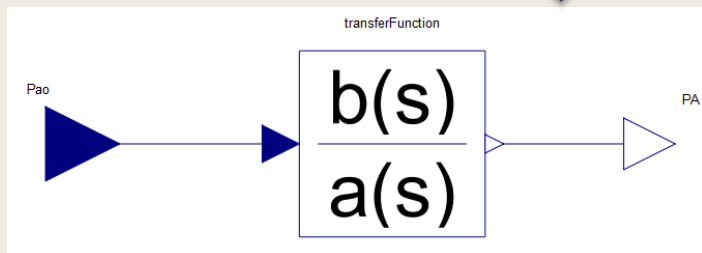


$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$



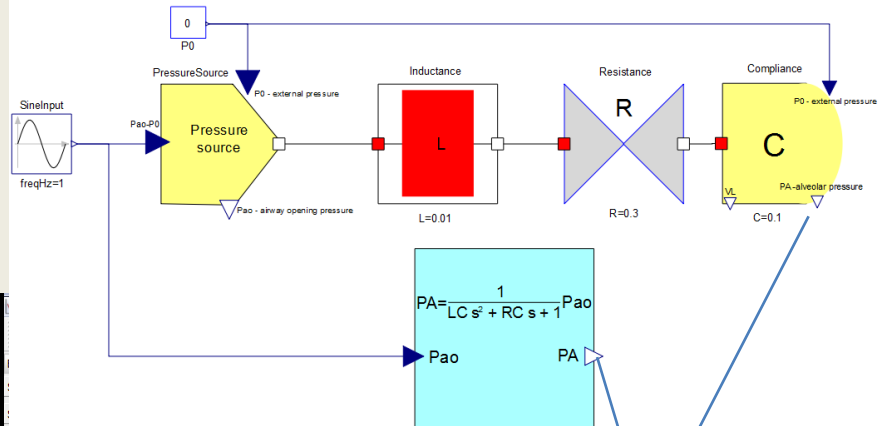
Stejné výsledky

$$PA = \frac{1}{LC s^2 + RC s + 1} P_{ao}$$



$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$

Parameters:  
 a: {L\*C,R\*C,1}  
 b: {1}



$$H(s) = \frac{Výstup}{Vstup} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

inputSimplestRespiration 1: Compliance.PA — FrequencyInputSimplestRespiration 1: respiratoryTransferFunction1.PA

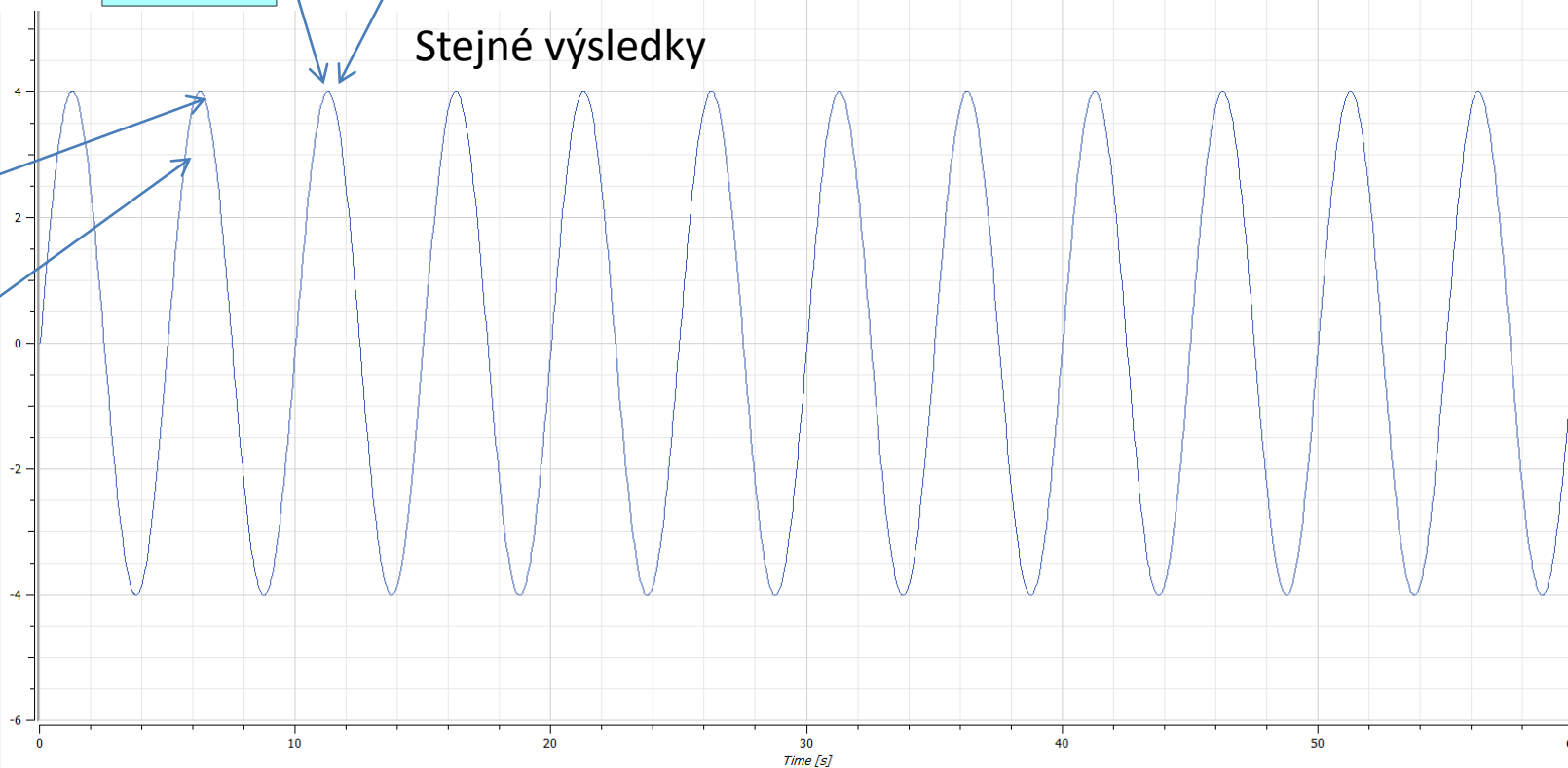
FrequencyInputSimplestRespiration 1\*

Plot Parameters Variables Settings

Find Options

Name	Unit	Description
Compliance		
AirFlow		
StressedVolume	L	
C	L/cm H2O	
der(StressedVolu...	Derivative of Co...	
FunctionalResidu...	L	
P0	cm H2O	
PA	Alveolar pressur...	
TransmuralPressure	cm H2O	
VL		
Inductance		
P0		
PressureSource		
Resistance		
respiratoryTransferFun...		
transferFunction		
C	L / cm H2O	
L	cm H2O s2 / L	
PA		
Pao		
R	cm H2O s / L	
SineInput		

Stejné výsledky



Simulation Log

```

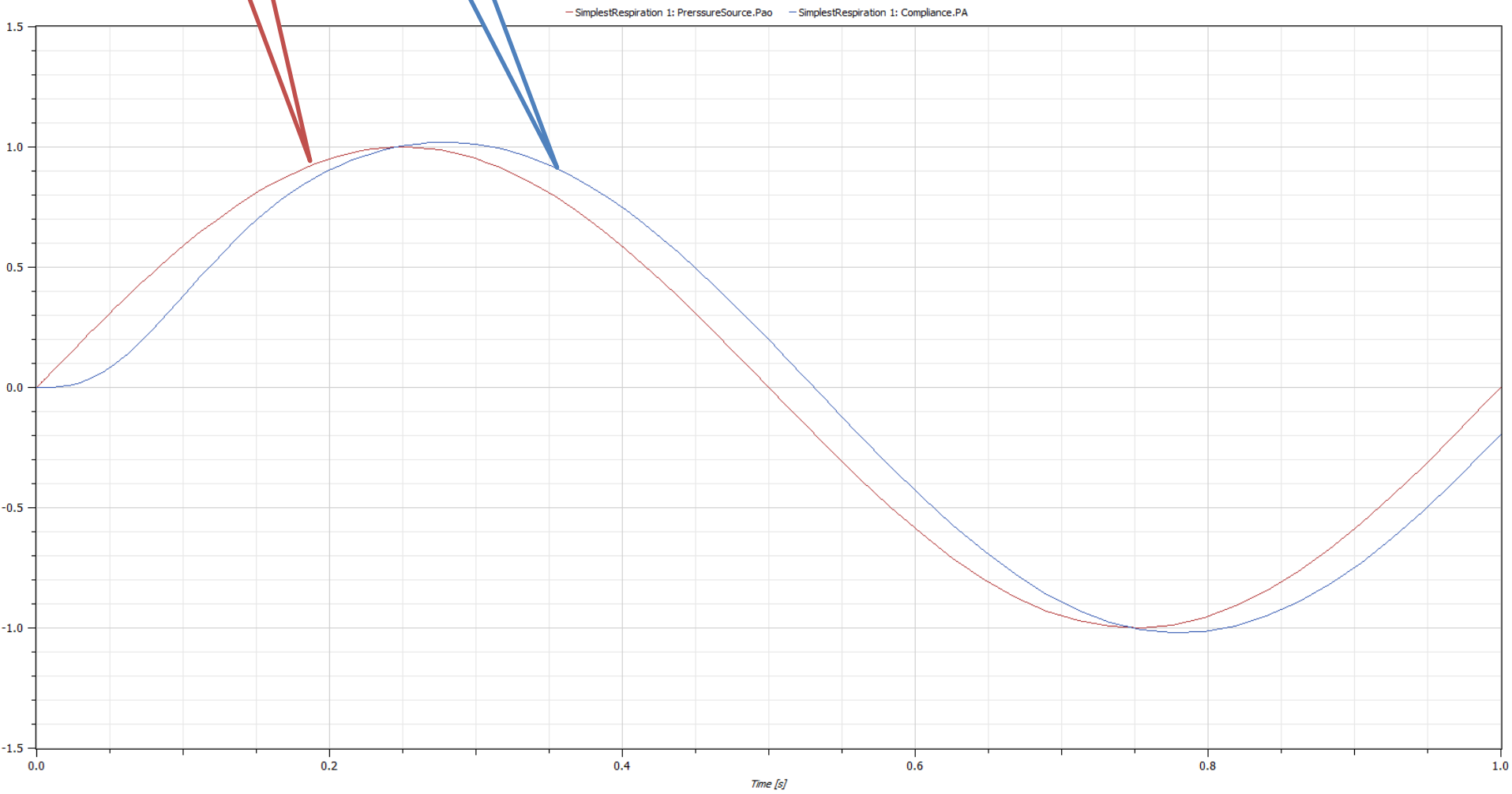
Server listening on 127.0.0.1:7407
Initialization finished.
Simulation stopped at time: 60
Simulation took 0.63 seconds of CPU time.
Total number of function evaluations: 11017
Total number of events: 1
Total number of step events (dynamic state switches): 0
Max step size: 0.103958
Min step size: 1.48769e-05
Simulation exited at 04:52:19

```

# Budící vstup - 1 Hz

Pao

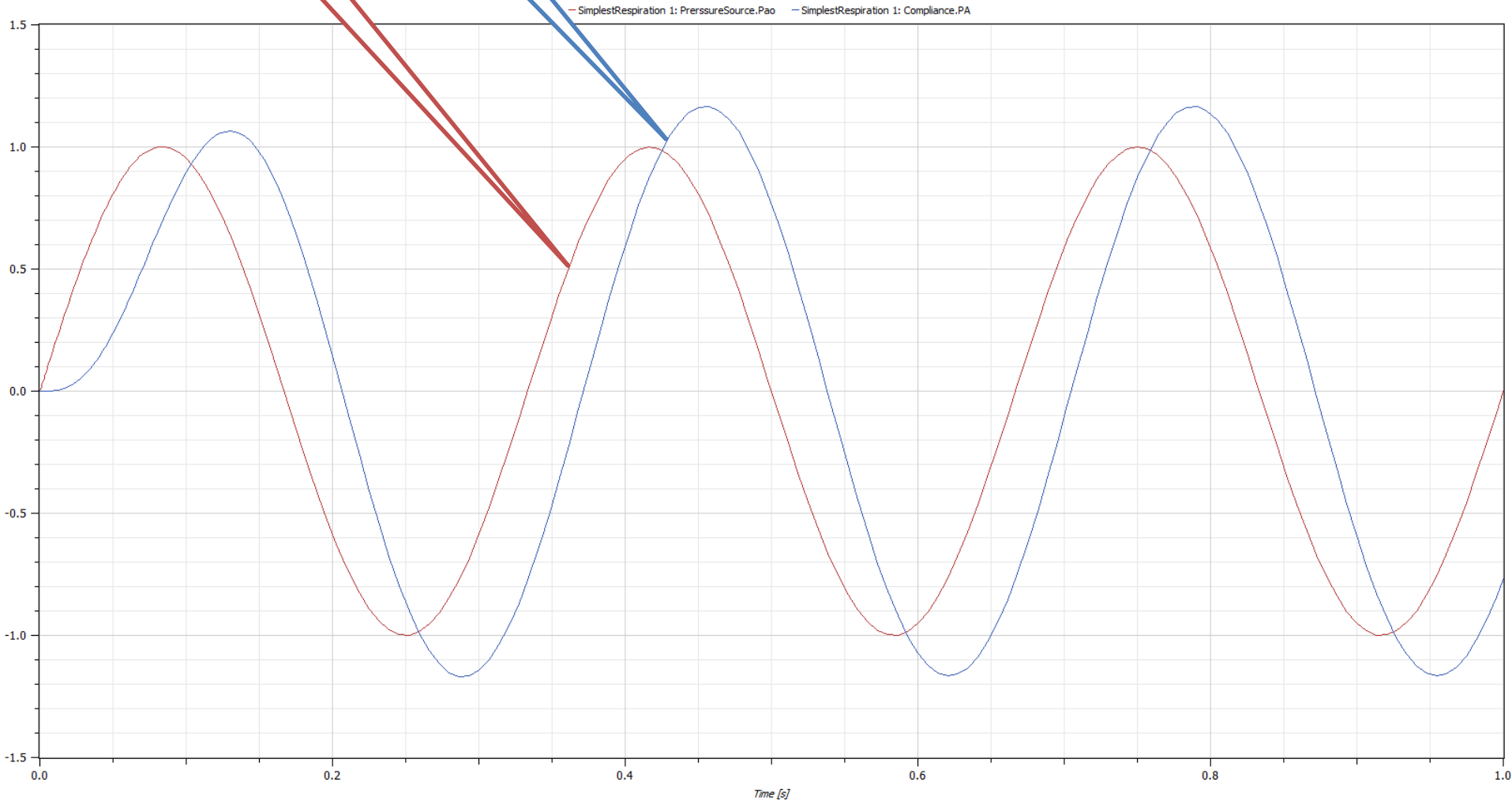
PA



# Budící vstup - 3 Hz

Pao

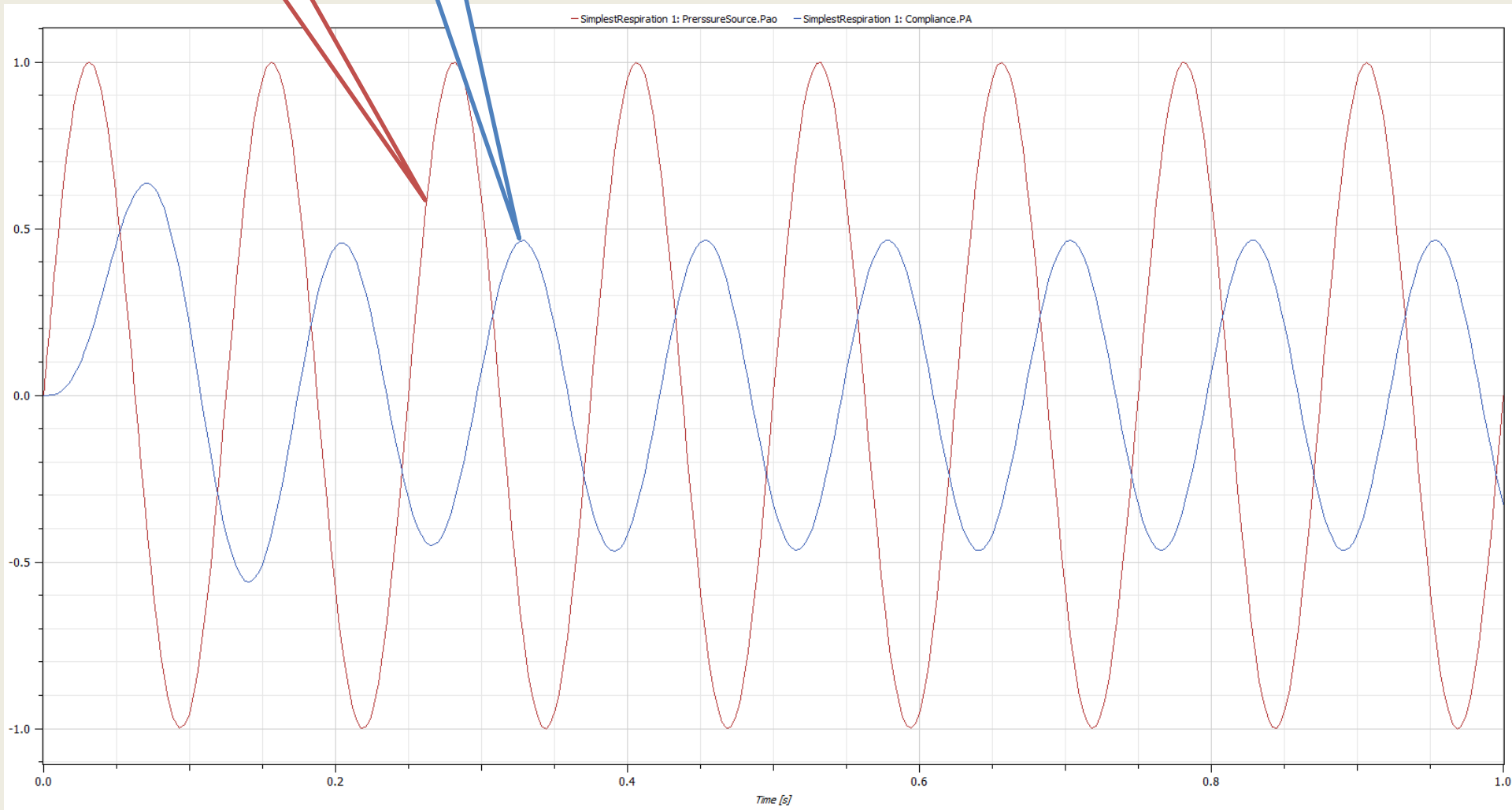
PA



# Budící vstup - 8 Hz

Pao

PA







# 1. Jednoduché systémy



**Vstupní signál x**

skok  
  impuls  
  sinus

Změna vstupního signálu

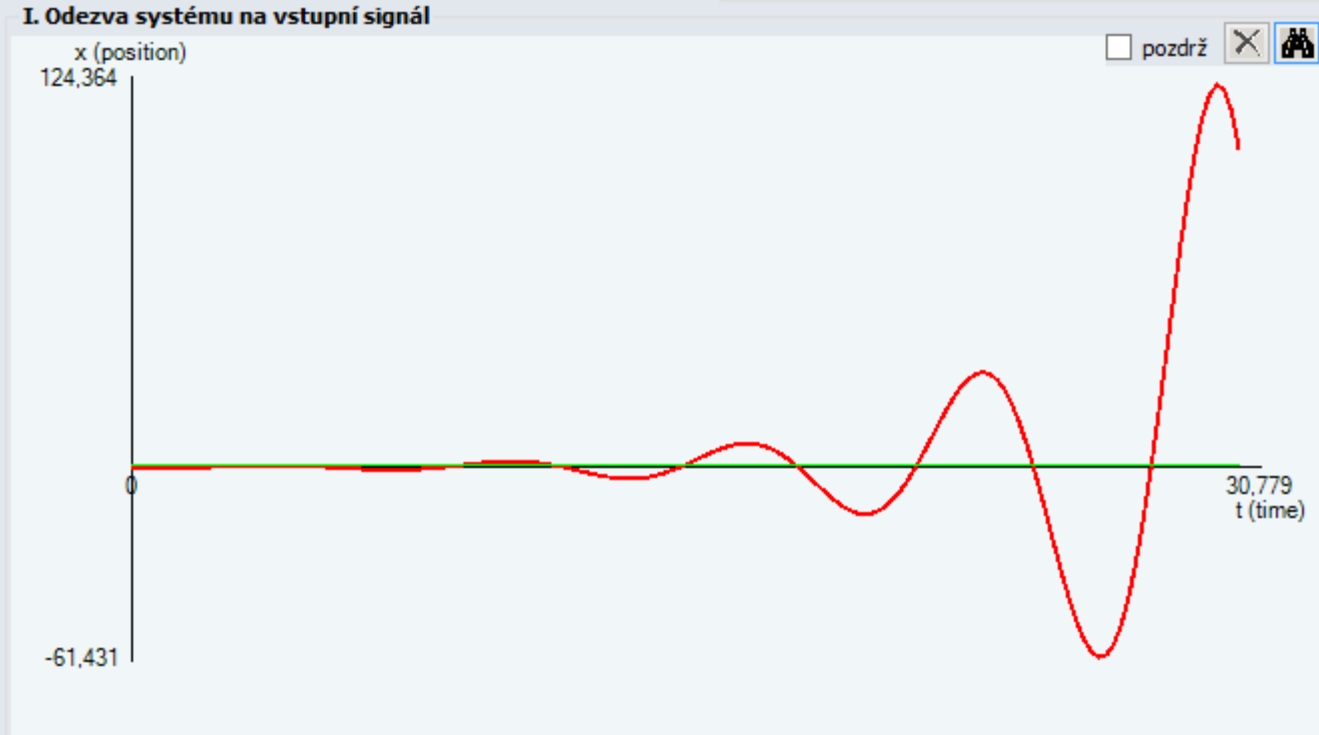
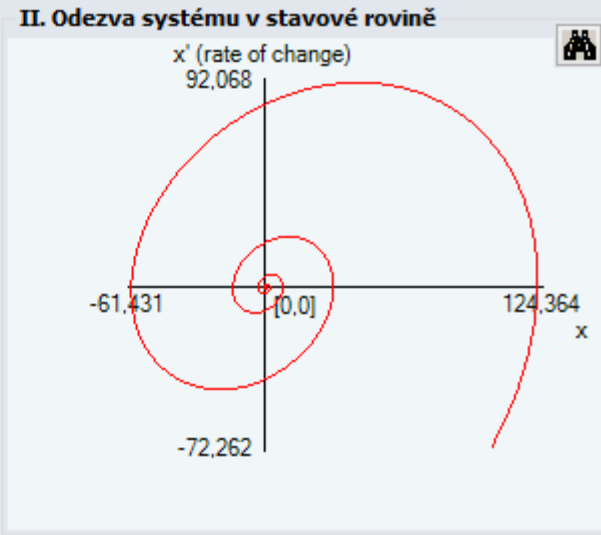
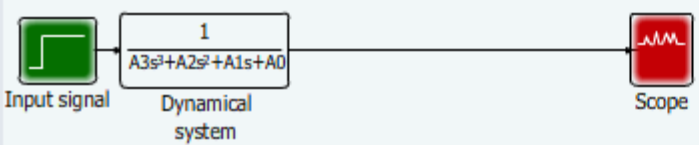
Amplituda = 1

**Systém**

0. řádu  
  1. řádu  
  2. řádu  
  3. řádu

A0	0,1	5	3,14
A1	0,1	5	2,06
A2	0,1	5	1,65
A3	0,1	5	3,40

Integroační člen  
  Derivační člen  
  Nelin. omezení



# Přenosová funkce

- poměr Laplaceova obrazu výstupní veličiny k Laplaceovu obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách

$$G(s) = \frac{L\{u(t)\}}{L\{y(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

# Sestavení přenosové funkce

- Systém se vstupní  $u(t)$  a výstupní  $y(t)$  veličinou

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

- Laplaceova transformace

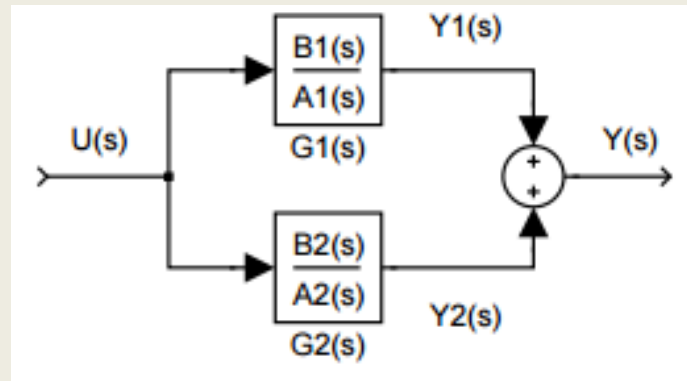
$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

- Výsledný přenos

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

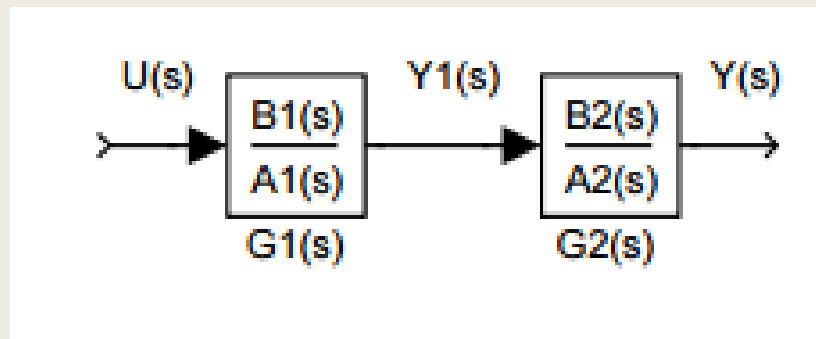
# Paralelní kombinace přenosových funkcí

- Prostý součet přenosů



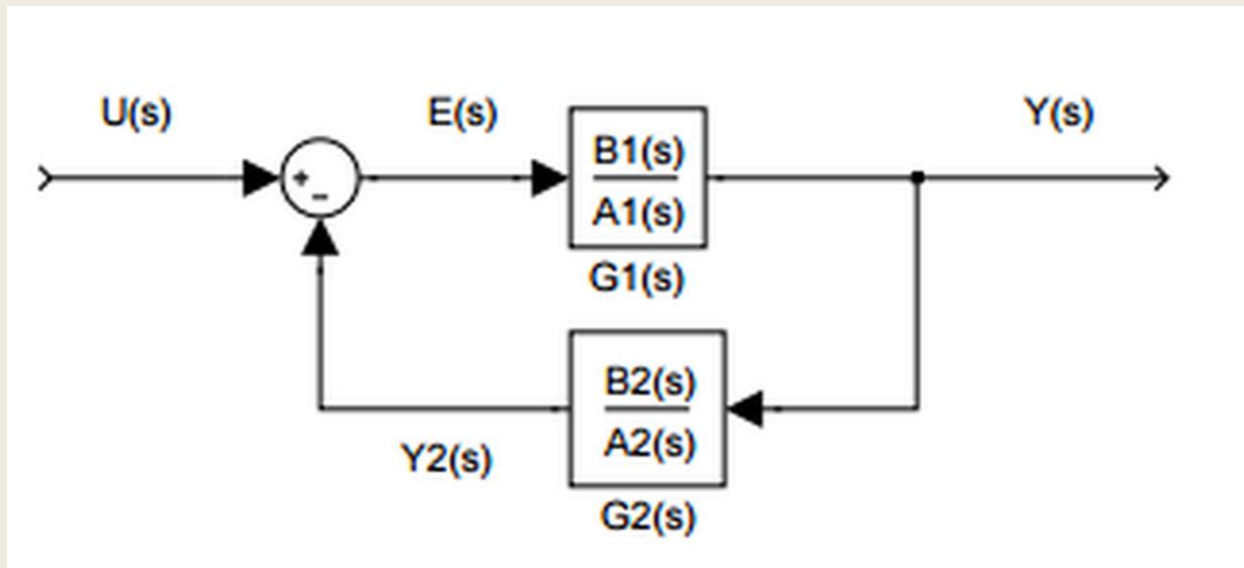
$$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s)$$

# Seriová kombinace přenosových funkcí



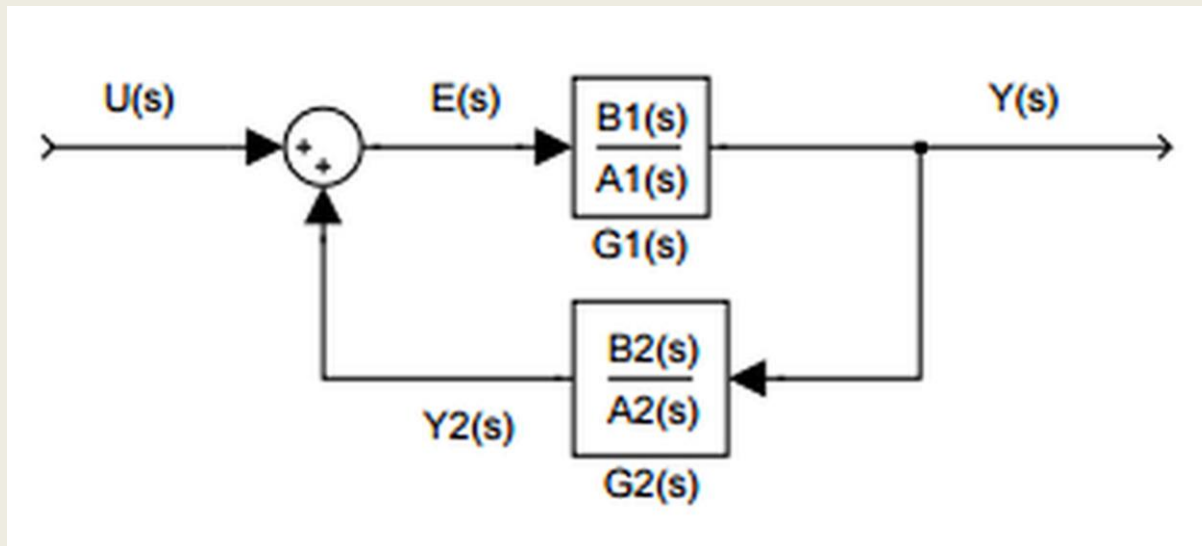
$$G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$$

# V záporné zpětné vazbě



$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{B_1(s)A_2(s)}{A_1(s)A_2(s) + B_1(s)B_2(s)}$$

# V kladné zpětné vazbě



$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} = \frac{B_1(s)A_2(s)}{A_1(s)A_2(s) - B_1(s)B_2(s)}$$

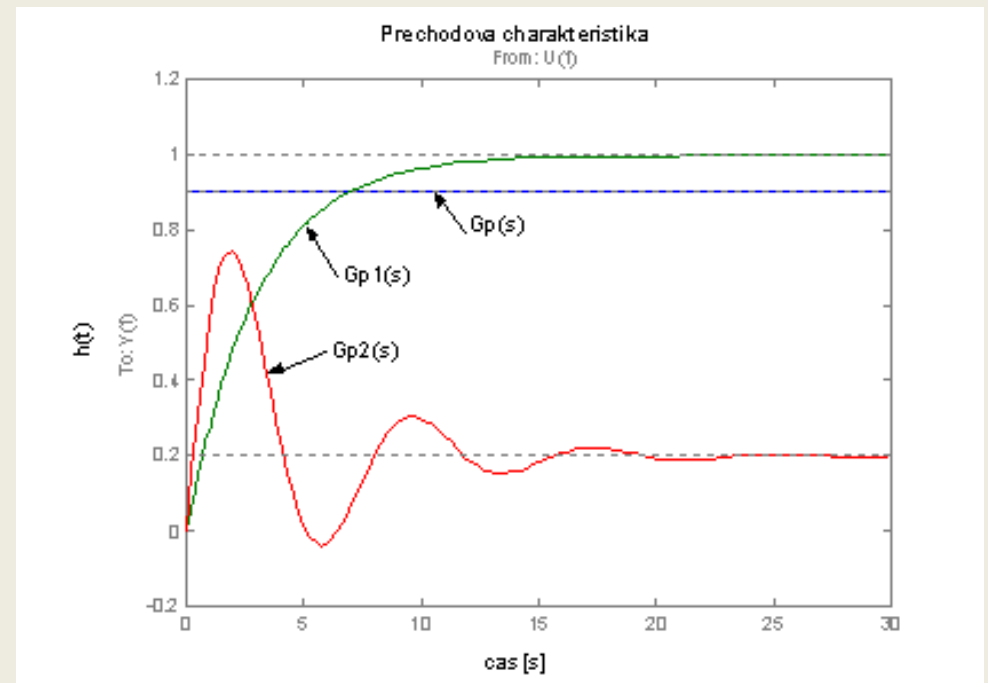
# Přechodová charakteristika

- Odezva na jednotkový (Heavisideův) skok
- časový průběh výstupní veličiny systému  $h(t)$

$$G_p(s) = 0,9$$

$$G_{p1}(s) = \frac{1}{3s+1}$$

$$G_{p2}(s) = \frac{5s+1}{7s^2+3s+5}$$





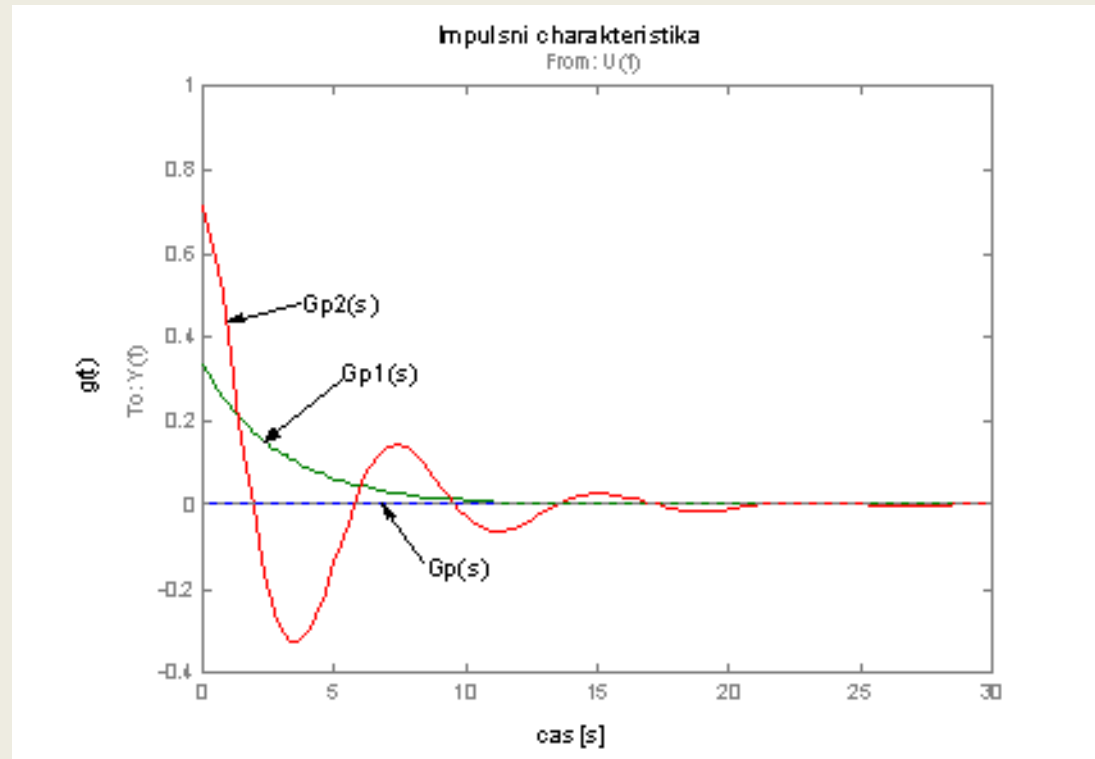
# Impulsní charakteristika

- Odezva na jednotkový (Diracův) impuls
- časový průběh výstupní veličiny systému  $h(t)$

$$G_p(s) = 0,9$$

$$G_{p1}(s) = \frac{1}{3s+1}$$

$$G_{p2}(s) = \frac{5s+1}{7s^2+3s+5}$$



# Nuly, póly, zesílení

- Kořeny charakteristické rovnice:

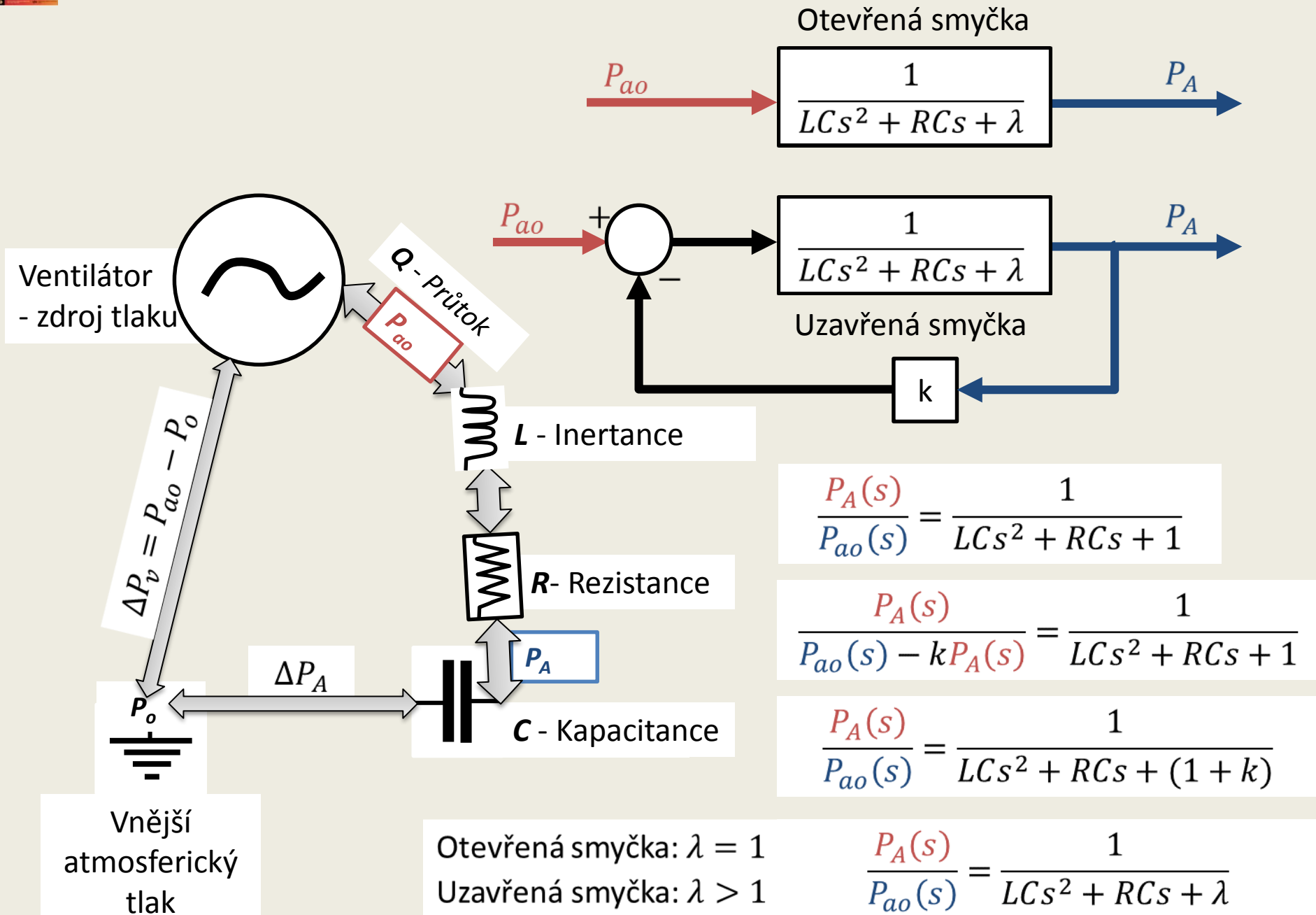
$$G(s) = \frac{b_m (s + z_1) \dots (s + z_m)}{a_n (s + p_1) \dots (s + p_n)},$$

- Jsou v čitateli nuly (-z1...-zm)
- Jsou ve jmenovateli póly (-p1, ... -pn)
- Zesílení je bm/an

- Např. 
$$G(s) = \frac{3s^2 (s + 2)}{s^2 (s + 5)(s + 6)(s + 2)}$$

- Nuly 0, 0, -2, póly 0,0, -5, -6, -2, zesílení 3

# Nejjednodušší model mechaniky dýchání



# Přechodové odezva systému prvního řádu

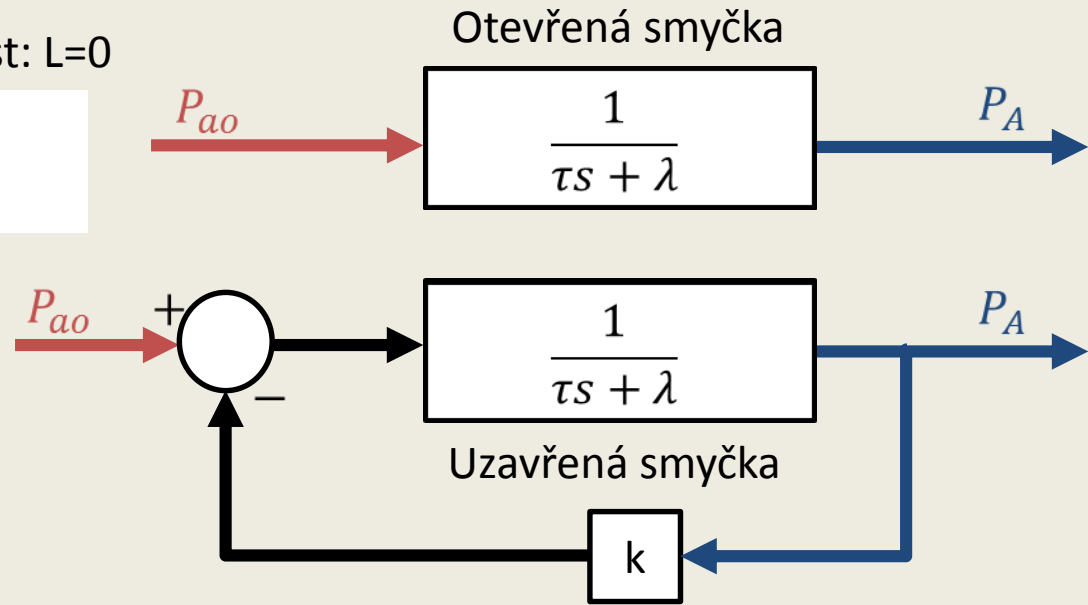
Nebudeme uvažovat setrvačnost:  $L=0$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{RCs + \lambda}$$

$$RC = \tau$$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{\tau s + \lambda}$$





# Přechodové odezva systému prvního řádu na **jednotkový impuls**

Nebudeme uvažovat setrvačnost:  $L=0$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{RCs + \lambda}$$

$$RC = \tau$$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{\tau s + \lambda}$$

Jednotkový impuls:  $\delta(t)$

1

$$P_{ao}(s) = 1$$

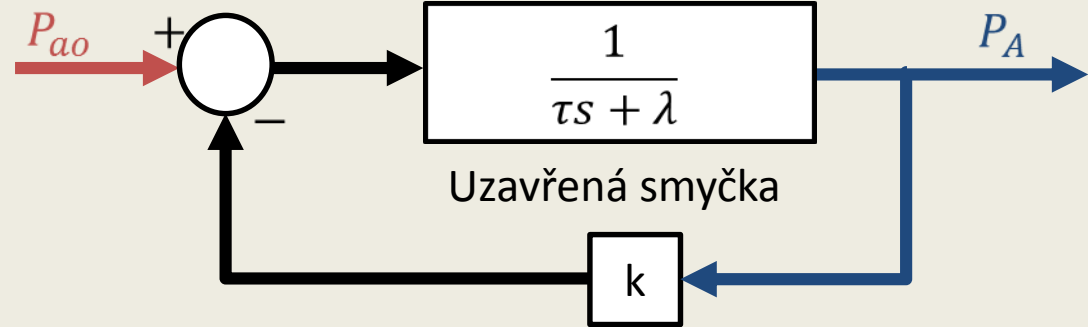
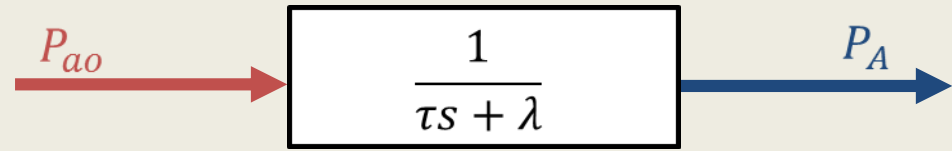
$$P_A(s) = \frac{1}{\tau s + \lambda}$$

$e^{-at}$

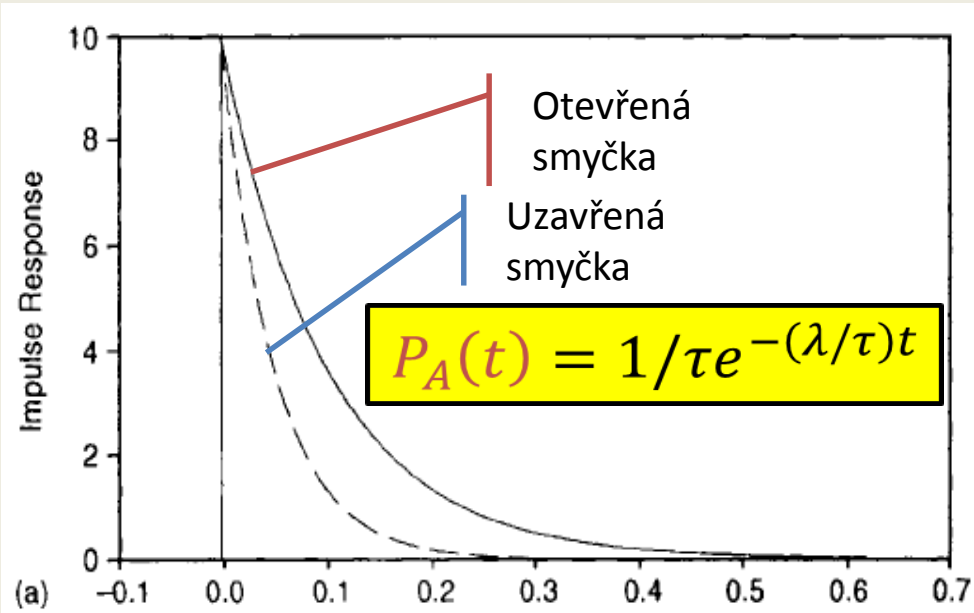
$$\frac{1}{s + a}$$

$$P_A(s) = \frac{1/\tau}{s + \lambda/\tau} = 1/\tau \left( \frac{1}{s + \lambda/\tau} \right)$$

Otevřená smyčka



Uzavřená smyčka





# Přechodové odezva systému prvního řádu na **jednotkový skok**

Nebudeme uvažovat setrvačnost:  $L=0$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{RCs + \lambda}$$

$$RC = \tau$$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{\tau s + \lambda}$$

Jednotkový skok: 1

$$\frac{1}{s}$$

$$P_{ao}(s) = 1/s$$

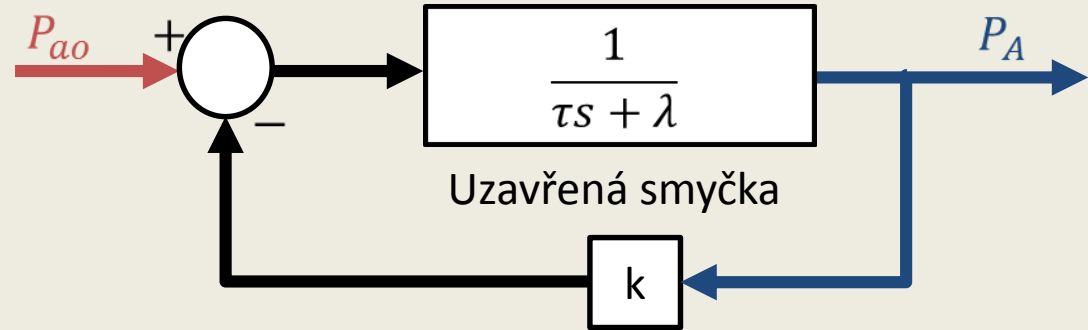
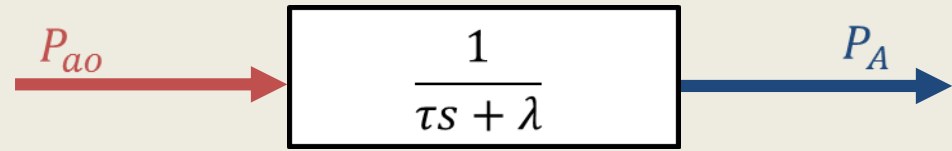
$$P_A(s) = \frac{1}{s(\tau s + \lambda)}$$

$$1 - e^{-at}$$

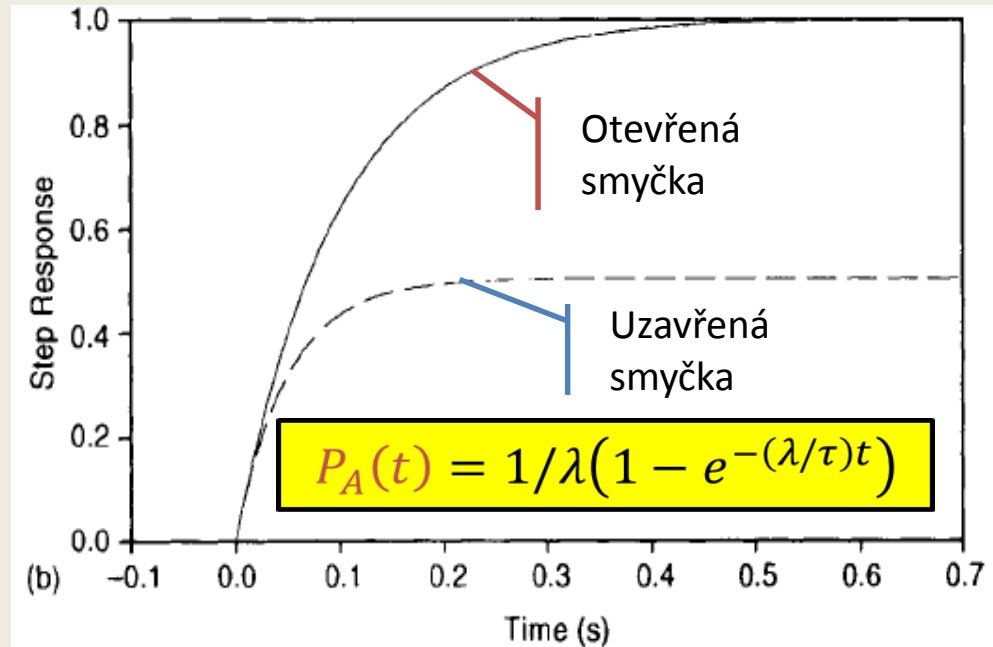
$$\frac{a}{s(s + a)}$$

$$P_A(s) = \frac{1/\tau}{s(s + \lambda/\tau)} = 1/\lambda \left( \frac{\lambda/\tau}{s + \lambda/\tau} \right)$$

Otevřená smyčka



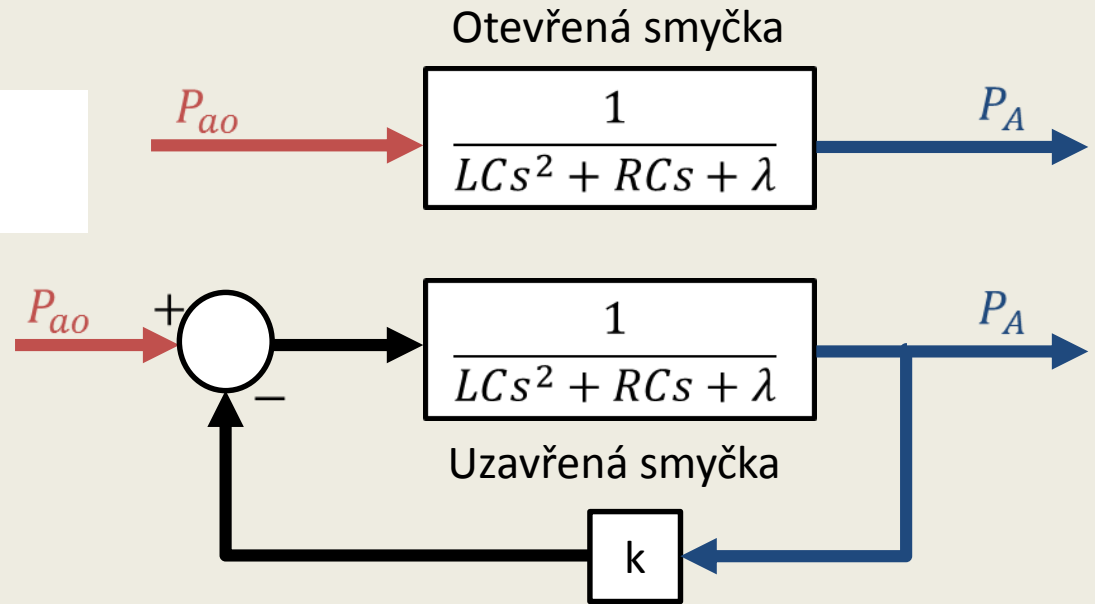
Uzavřená smyčka



# Přechodové odezva systému druhého řádu

Budeme uvažovat setrvačnost:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$



# Přechodové odezva systému druhého řádu na **jednotkový impuls**

Budeme uvažovat setrvačnost:

Jednotkový impuls:  $\delta(t)$   $\longleftrightarrow$   $1$

$$P_{ao}(s) = 1$$

$$P_A(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + \lambda/(LC)}$$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{\lambda}{LC}}$$

4 typy chování



# Přechodové odezva systému druhého řádu na **jednotkový impuls**

Budeme uvažovat setrvačnost:

Jednotkový impuls:  $\delta(t)$   $\longleftrightarrow$  1

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_{ao}(s) = 1$$

$$P_A(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + \lambda/(LC)}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{\lambda}{LC}}$$

4 typy chování

## 1) Netlumená odezva

$L=0.01 \text{ cmH}_2\text{O s}^2/\text{L}$   
 $C=0.1 \text{ L/cm H}_2\text{O}$

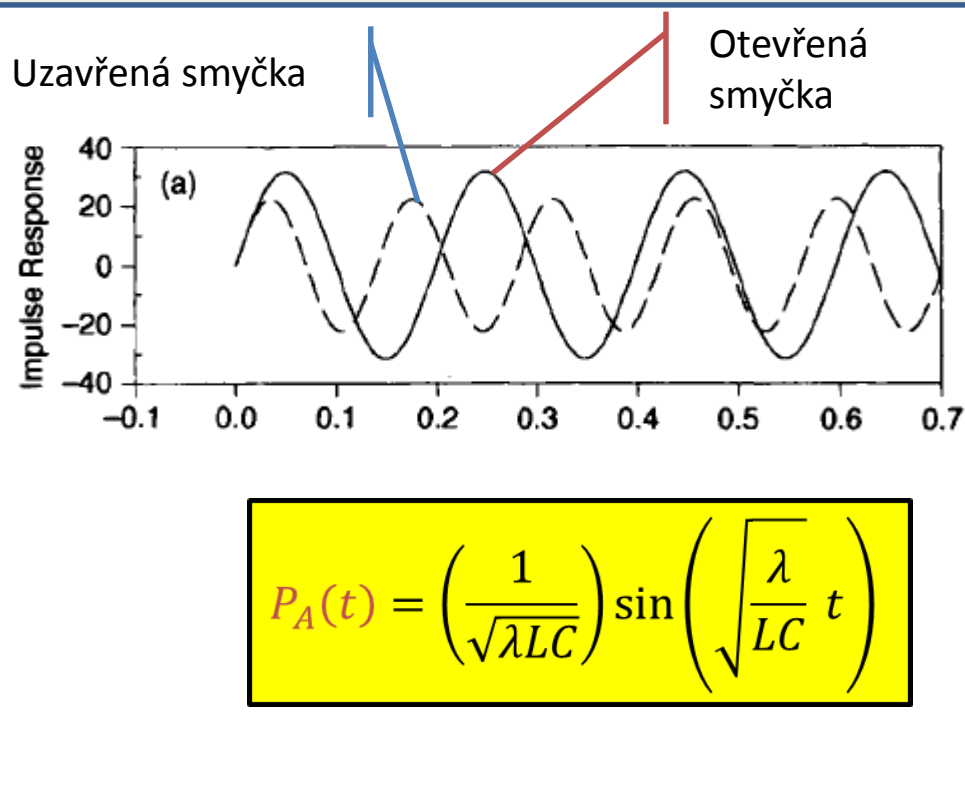
Když  $R=0$ : Imaginární kořeny

$$\alpha_1 = j\sqrt{\frac{\lambda}{LC}} \quad \alpha_2 = -j\sqrt{\frac{\lambda}{LC}}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + \lambda/(LC)}$$

$\sin \omega t$   $\longleftrightarrow$

$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$



$$P_A(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda LC}} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{\lambda}{LC}} t \right)$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + \lambda/(LC)} = \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda LC}} \right) \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{LC}}}{s^2 + \frac{\lambda}{LC}}$$

# Přechodové odezva systému druhého řádu na **jednotkový impuls**

Budeme uvažovat setrvačnost:

Jednotkový impuls:  $\delta(t)$   $\longleftrightarrow$  1

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_{ao}(s) = 1$$

$$P_A(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + \lambda/(LC)}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{\lambda}{LC}}$$

4 typy chování

## 2) Tlumená odezva

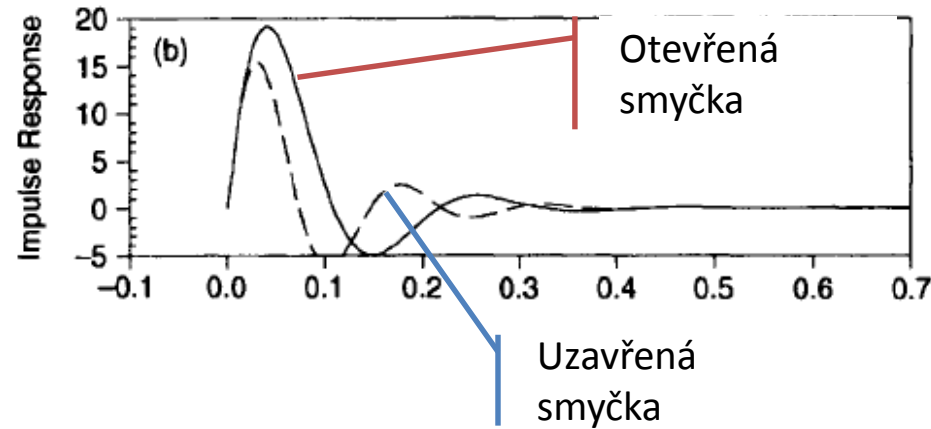
$L=0.01 \text{ cmH}_2\text{O s}^2/\text{L}$   
 $C=0.1 \text{ L/cm H}_2\text{O}$   
 $R=0.5 \text{ cm H}_2\text{O/L}$

Když  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{\lambda}{LC}$ : Komplexně sdružené kořeny

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \gamma^2}$$

$$\gamma = \frac{R}{2L} \sqrt{\frac{4L\lambda}{R^2C} - 1} > \frac{R}{2L} \quad \alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\gamma$$



$$P_A(t) = \frac{1}{LC\gamma} e^{-(R/2L)t} \sin(\gamma t)$$

# Přechodové odezva systému druhého řádu na **jednotkový impuls**

Budeme uvažovat setrvačnost:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

Jednotkový impuls:  $\delta(t)$

1

$$P_{ao}(s) = 1$$

$$P_A(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + \lambda/(LC)}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{\lambda}{LC}}$$

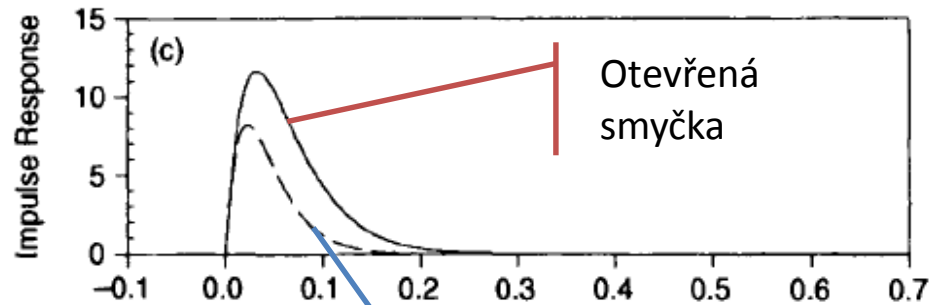
4 typy chování

## 3) Kriticky tlumená odezva

Když  $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{\lambda}{LC}$ : dva stejné reálné kořeny

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2}$$



$$P_A(t) = \frac{1}{LC} t e^{-t/\tau_c}$$

where:

$$\tau_c = \frac{2L}{R} = \sqrt{\frac{LC}{\lambda}}$$

# Přechodové odezva systému druhého řádu na **jednotkový impuls**

Budeme uvažovat **setrvačnost**:

Jednotkový impuls:  $\delta(t)$   $\longleftrightarrow$  1

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_{ao}(s) = 1$$

$$P_A(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + \lambda/(LC)}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{\lambda}{LC}}$$

4 typy chování

## 4) Přetlumená odezva

$L=0.01 \text{ cmH}_2\text{O s}^2/\text{L}$   
 $C=0.1 \text{ L/cm H}_2\text{O}$   
 $R=1 \text{ cm H}_2\text{O/L}$

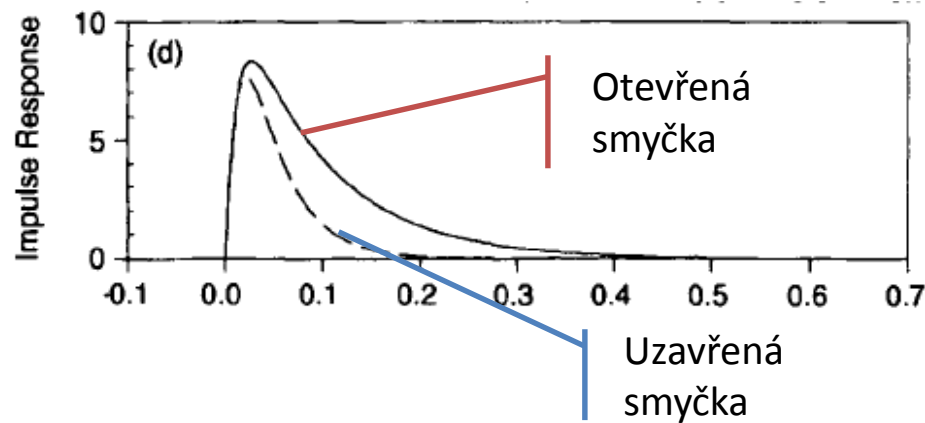
Když  $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{\lambda}{LC}$ : dva různé reálné kořeny

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} (1 \pm \mu)$$

kde:

$$\mu = \sqrt{1 - \frac{4L\lambda}{R^2C}}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{\left(s + \frac{R}{2L}\right) (1 - \mu) \left(s + \frac{R}{2L}\right) (1 + \mu)}$$



$$P_A(t) = \frac{1}{\mu RC} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})$$

where:

$$\tau_1 = \frac{2L}{R(1-\mu)}, \quad \tau_2 = \frac{2L}{R(1+\mu)}$$

# Přechodové odezva systému druhého řádu na **jednotkový skok**

(Podrobnosti viz kniha)

## 1) Netlumená odezva

$L=0.01 \text{ cmH}_2\text{O s}^2/\text{L}$   
 $C=0.1 \text{ L/cm H}_2\text{O}$

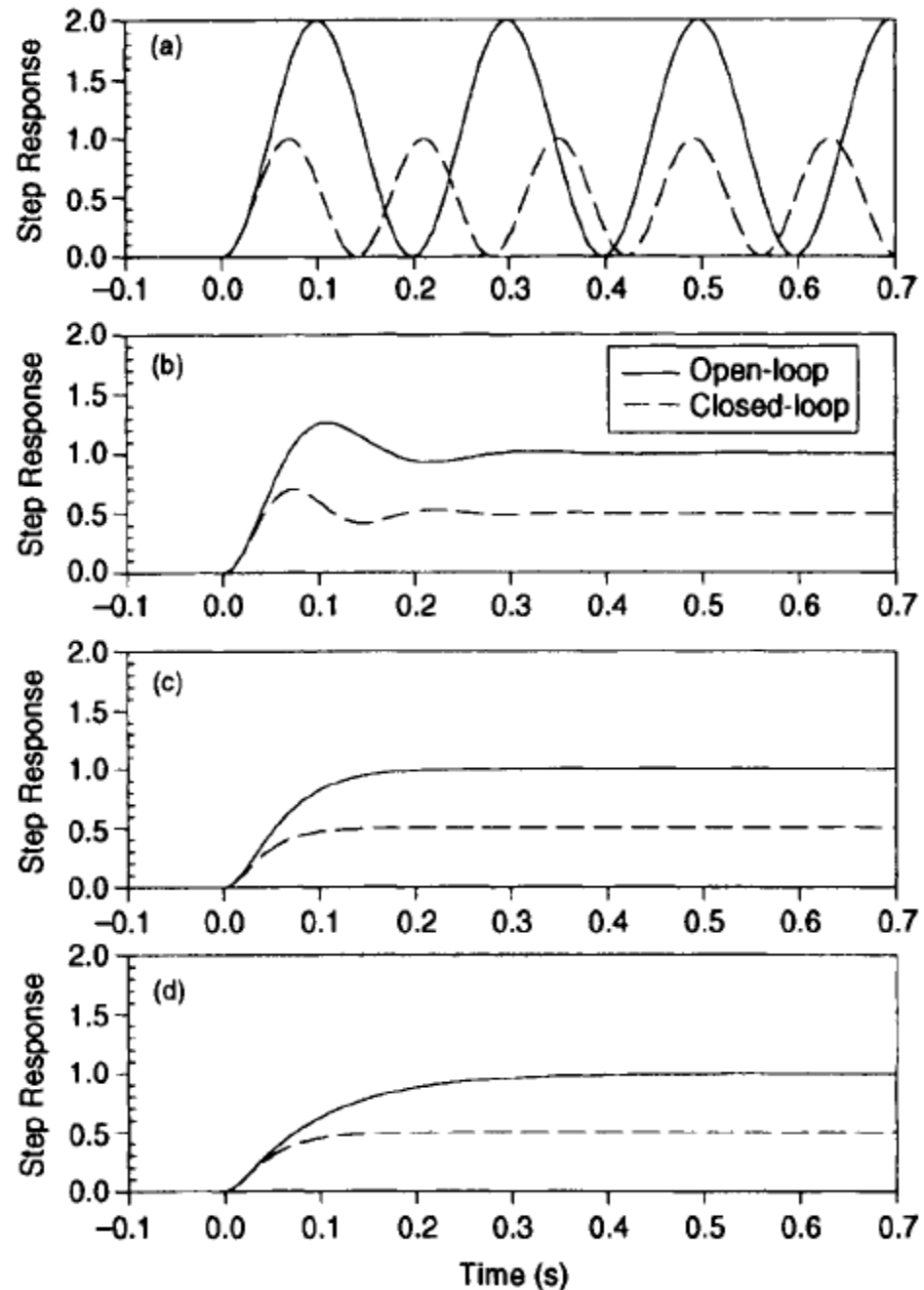
## 2) Tlumená odezva

$L=0.01 \text{ cmH}_2\text{O s}^2/\text{L}$   
 $C=0.1 \text{ L/cm H}_2\text{O}$   
 $R=0.5 \text{ cm H}_2\text{O/L}$

## 3) Kriticky tlumená odezva

## 4) Přetlumená odezva

$L=0.01 \text{ cmH}_2\text{O s}^2/\text{L}$   
 $C=0.1 \text{ L/cm H}_2\text{O}$   
 $R=1 \text{ cm H}_2\text{O/L}$



# Zobecnění dynamiky systémů druhého řádu

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s) - kP_A(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s) - kY(s)} = \frac{G_{SS}}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$G_{SS}$  zesílení ustáleného stavu

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

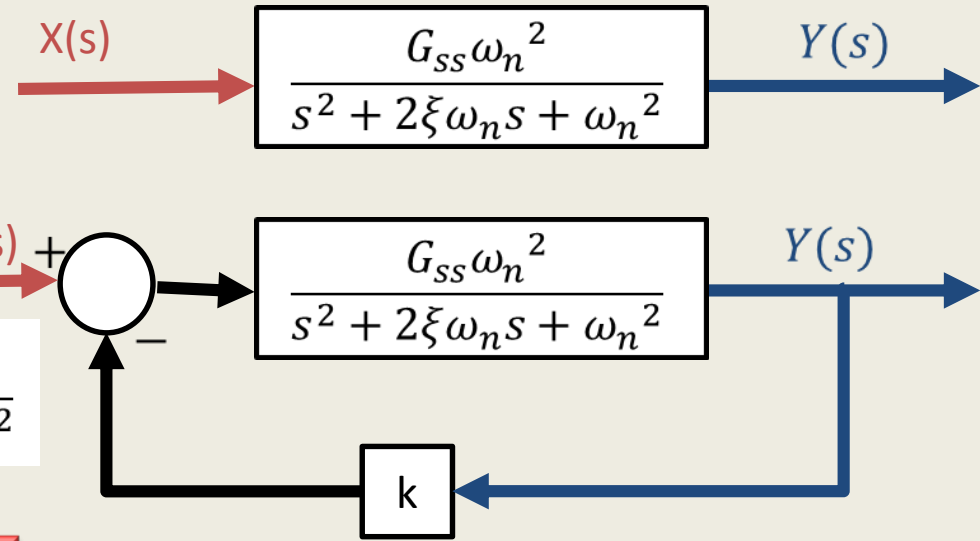
$\omega_n$  rezonanční frekvence

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{SS}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + (1 + kG_{SS})\omega_n^2}$$

$(1 + kG_{SS})$  zpětnovazební smyčka

# Zobecnění dynamiky systémů druhého řádu



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{SS}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + (1 + kG_{SS})\omega_n^2}$$

## 1) Netlumená (undamped) odezva

$$\xi = 0$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{SS}\omega_n^2}{s^2 + (1 + kG_{SS})\omega_n^2}$$

Impuls:

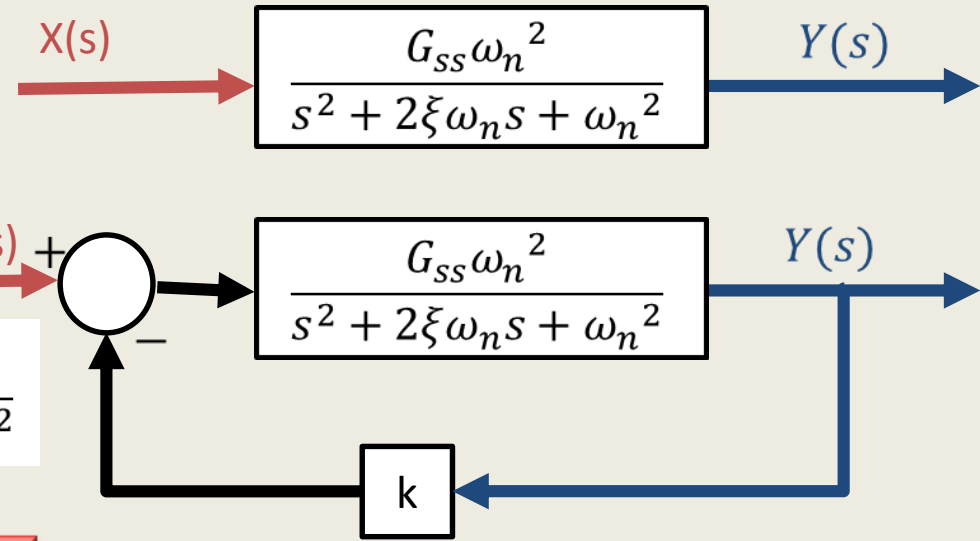
$$h_2(t) = \frac{G_{SS}\omega_n}{\sqrt{(1 + kG_{SS})}} \sin\left(\sqrt{(1 + kG_{SS})}\omega_n t\right)$$

Skok:

$$g_2(t) = \frac{G_{SS}}{1 + kG_{SS}} \left(1 - \cos\left(\sqrt{(1 + kG_{SS})}\omega_n t\right)\right)$$

Oscilace kolem  $\frac{G_{SS}}{1 + kG_{SS}}$

# Zobecnění dynamiky systémů druhého řádu



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{SS}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + (1 + kG_{SS})\omega_n^2}$$

## 2) Tlumená (underdamped) odezva

$$\xi^2 < 1 + kG_{SS}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{SS}\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega^2(1 + kG_{SS} - \xi^2)}$$

Impuls:

$$h_2(t) = \frac{G_{SS}\omega_n}{\sqrt{1 + kG_{SS} - \xi^2}} e^{-\omega_n \xi t} \sin(\omega_n \sqrt{1 + kG_{SS} - \xi^2} t)$$

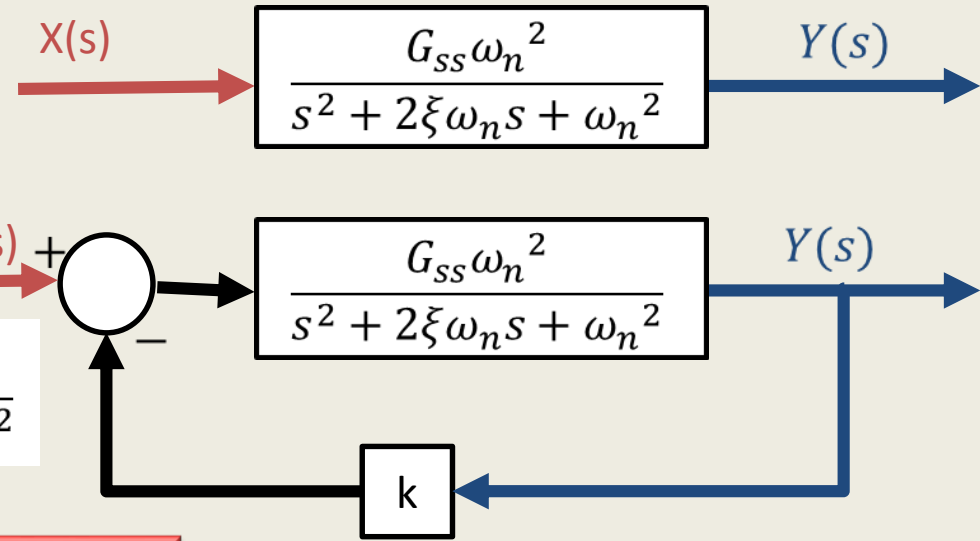
Skok:

$$g_2(t) = \frac{G_{SS}}{1 + kG_{SS}} \left( 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 + kG_{SS} - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 + kG_{SS} - \xi^2} t + \theta) \right)$$

kde:  $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 + kG_{SS} - \xi^2}}{\xi} \right)$



# Zobecnění dynamiky systémů druhého řádu



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{SS}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + (1 + kG_{SS})\omega_n^2}$$

### 3) Kriticky tlumená (underdamped) odezva

$$\xi^2 = 1 + kG_{SS}$$

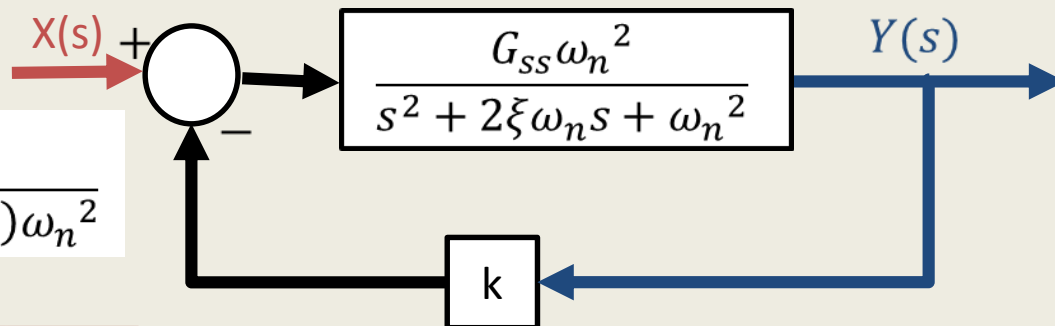
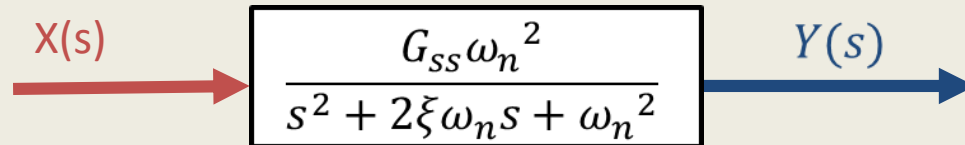
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{SS}\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n)^2}$$

Impuls:  $h_2(t) = G_{SS}\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$

Skok: 
$$g_2(t) = \frac{G_{SS}}{\xi} \left[ \frac{1}{\xi} - \left( \frac{1}{\xi} \omega_n t \right) e^{-\xi\omega_n t} \right]$$

$$= \frac{G_{SS}}{\sqrt{1+kG_{SS}}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1+kG_{SS}}} - \left( \frac{1}{\sqrt{1+kG_{SS}}} + \omega_n t \right) e^{-\xi\omega_n t} \right]$$

# Zobecnění dynamiky systémů druhého řádu



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{SS}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + (1 + kG_{SS})\omega_n^2}$$

## 4) Přetlumená (overdamped) odezva

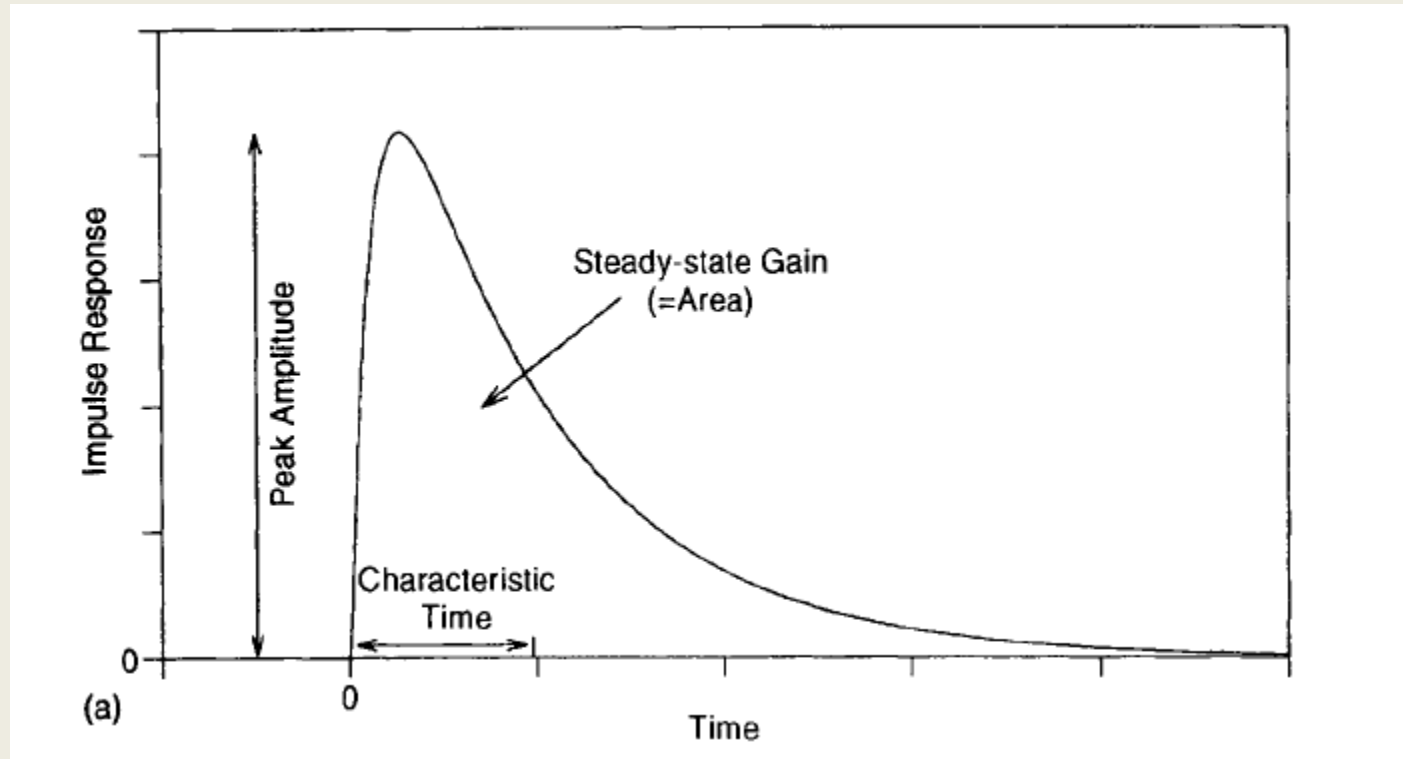
$$\xi^2 > 1 + kG_{SS}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{SS}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + (1 + kG_{SS})\omega_n^2}$$

Impuls: 
$$h_2(t) = \frac{G_{SS}\omega_n}{\sqrt{\xi^2 - 1 - kG_{SS}}} \left( e^{-\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1 - kG_{SS}})t} + e^{-\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1 - kG_{SS}})t} \right)$$

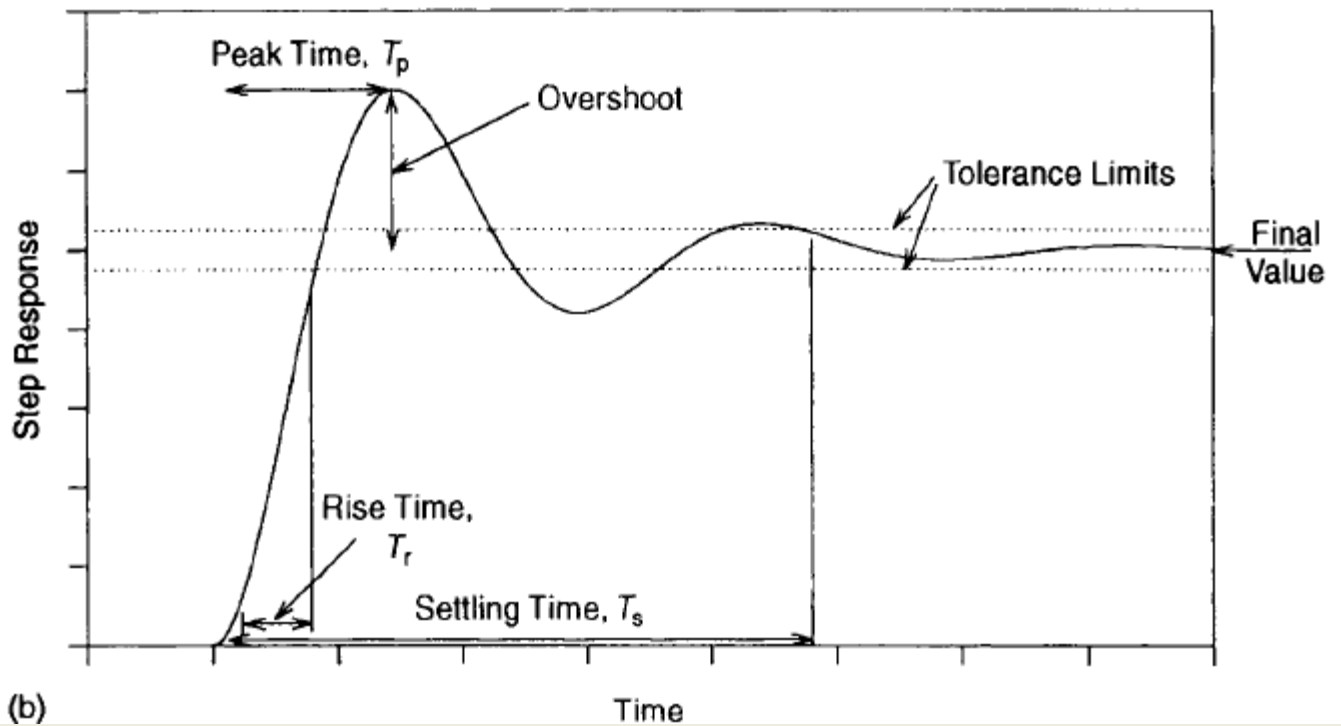
Skok: 
$$g_2(t) = \frac{G_{SS}}{\sqrt{\xi^2 - 1 - kG_{SS}}} \left( \frac{1 - e^{-\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1 - kG_{SS}})t}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1 - kG_{SS}}} + \frac{1 - e^{-\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1 - kG_{SS}})t}}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1 - kG_{SS}}} \right)$$

# Charakteristika odezvy na impuls



Impuls:

# Charakteristika odezvy na skok

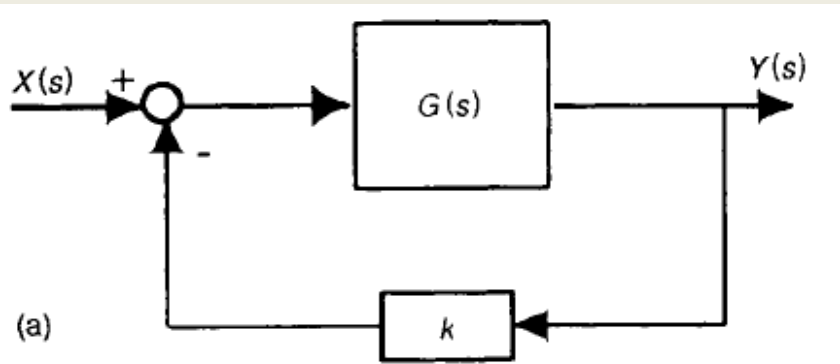


Skok:

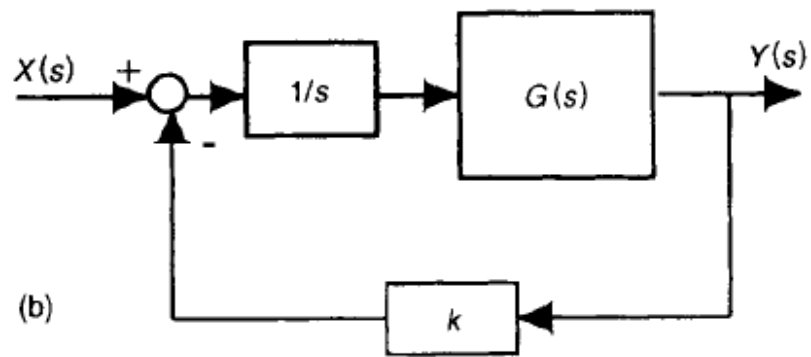
(b)

# Zpětné vazby –proporcionální, integrační a derivační

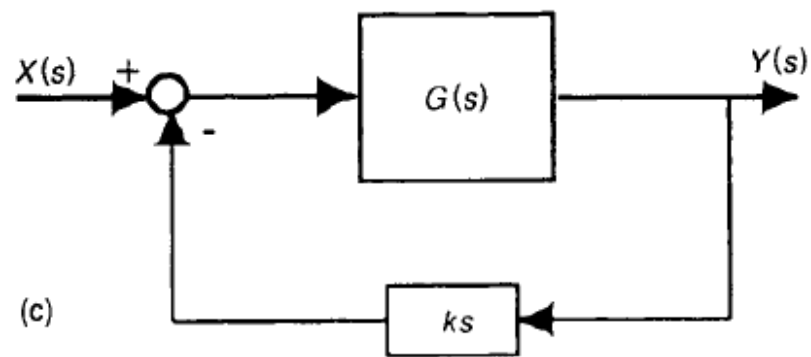
1) proporcionální

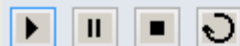


2) integrační



3) derivační





## 2. Statické charakteristiky

Úvod

Zpět

Další

### Vstupní signál

skok 0 3 2,58

### Systém

1. řádu

2. řádu

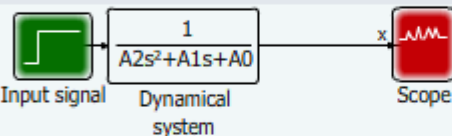
### Nelinearita

Bez nelinearity

Nelinearita 1

Nelinearita 2

Nelinearita 3



změna uspořádání nelinearity

Vstupní amplituda	Ustálená hodnota výstupu
0,565573752	0,565582633
0,6639344	0,66394484
1	1,00001562
1,52459013	1,524614
2,237705	2,23774
2,48360658	2,48364544
2,581967	2,58200765

### Odezva systému na vstupní signál

pozdrž



### Statické charakteristiky

