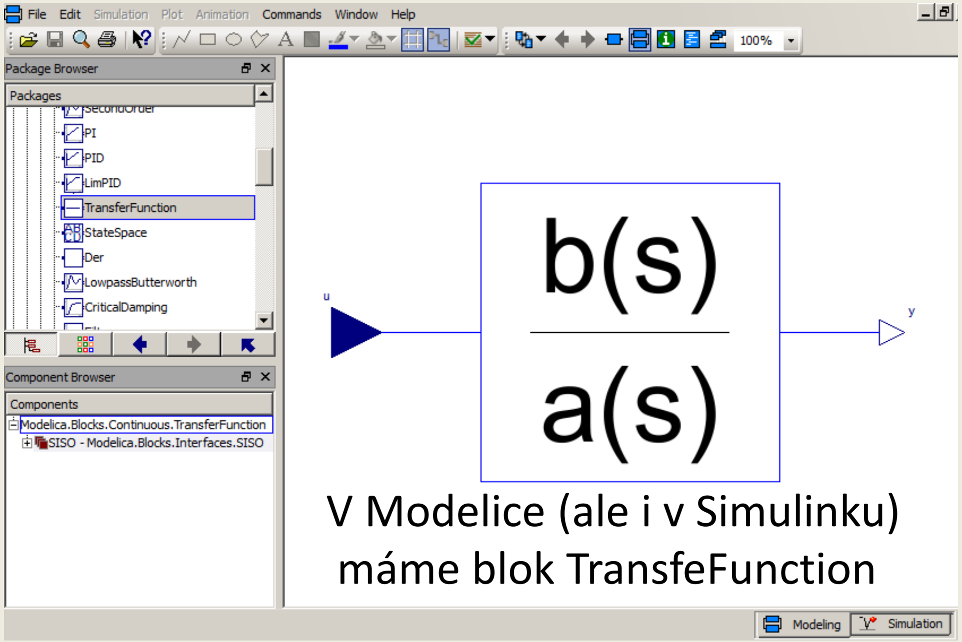
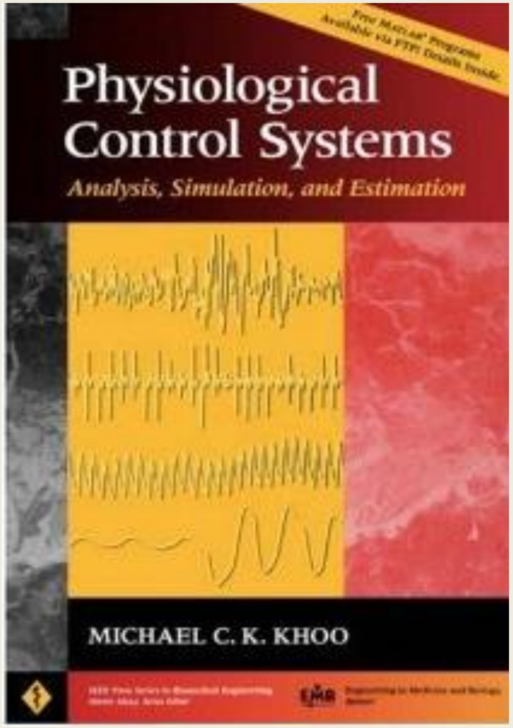
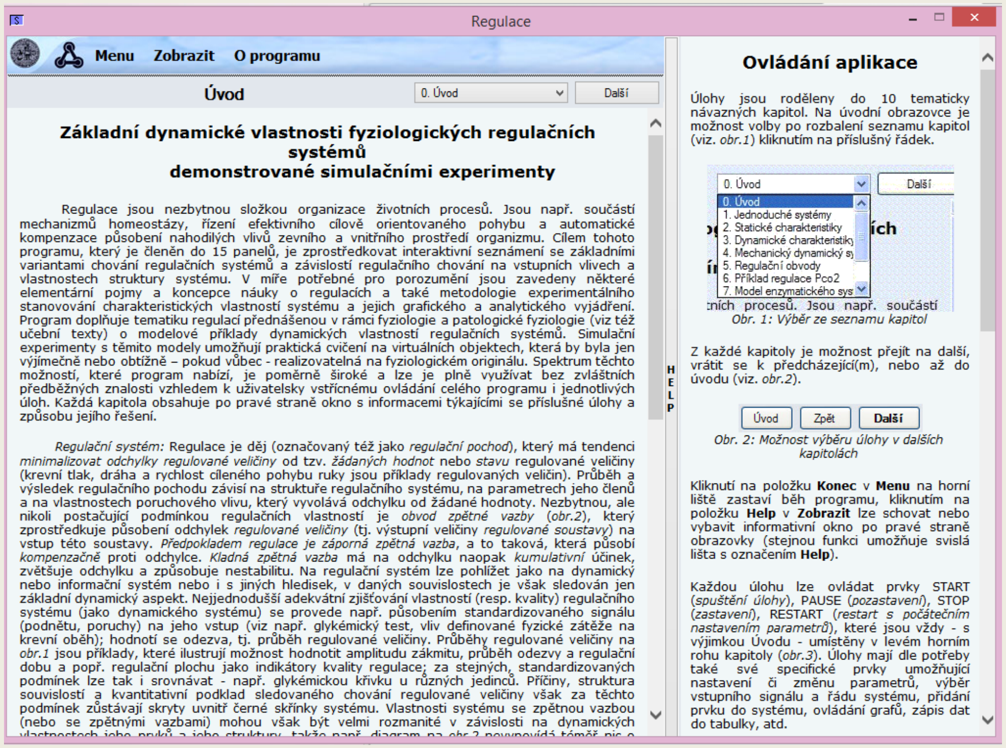
Analýza lineárních regulačních systémů v časové doméně



V Modelice (ale i v Simulinku) máme blok TransfeFunction

Studijní materiály





http://physiome.cz/atlas/sim/RegulaceSys/

[Khoo: Physiological Control Systems]() *Analýza systémů na fyziologických příkladech*

http://patf-biokyb.lf1.cuni.cz/wiki/cvut/mos_materialy usr:pwd biokyb:a6m33mos

Systémy

- Spojité vs diskrétní
- Deterministické vs stochastické
- Časově proměnné vs časově invariantní
  - Nezávisí na tom, „kolik je hodin“
- Kauzální vs nekauzální
  - Kauzální systém závisí pouze na minulých a současných hodnotách
  - Derivace je přirozeně NEKAUZÁLNÍM výpočtem
  - Tato kauzalita nemá nic společného s tím, že je modelica „akauzální“
- Lineární vs nelineární

Lineární systémy

Lineární systém (soustava) je systém, v němž platí princip **superpozice.**

To znamená, že za předpokladu, že $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ a $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$ platí:

Aditivita (výstupem pro součet dvou signálů bude stejný, jako součet výstupů pro tyto signály jednotlivě)

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

Homogenita (výstup pro násobek jiného vstupu bude roven stejnému násobku výstupu pro tento vstup):

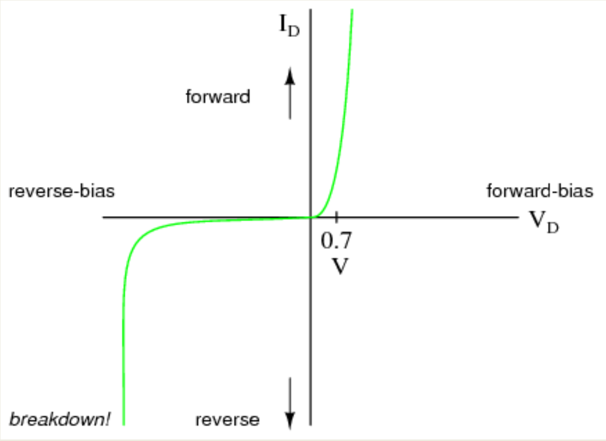
$$ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$$

Tyto podmínky lze také zapsat jako jedinou:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

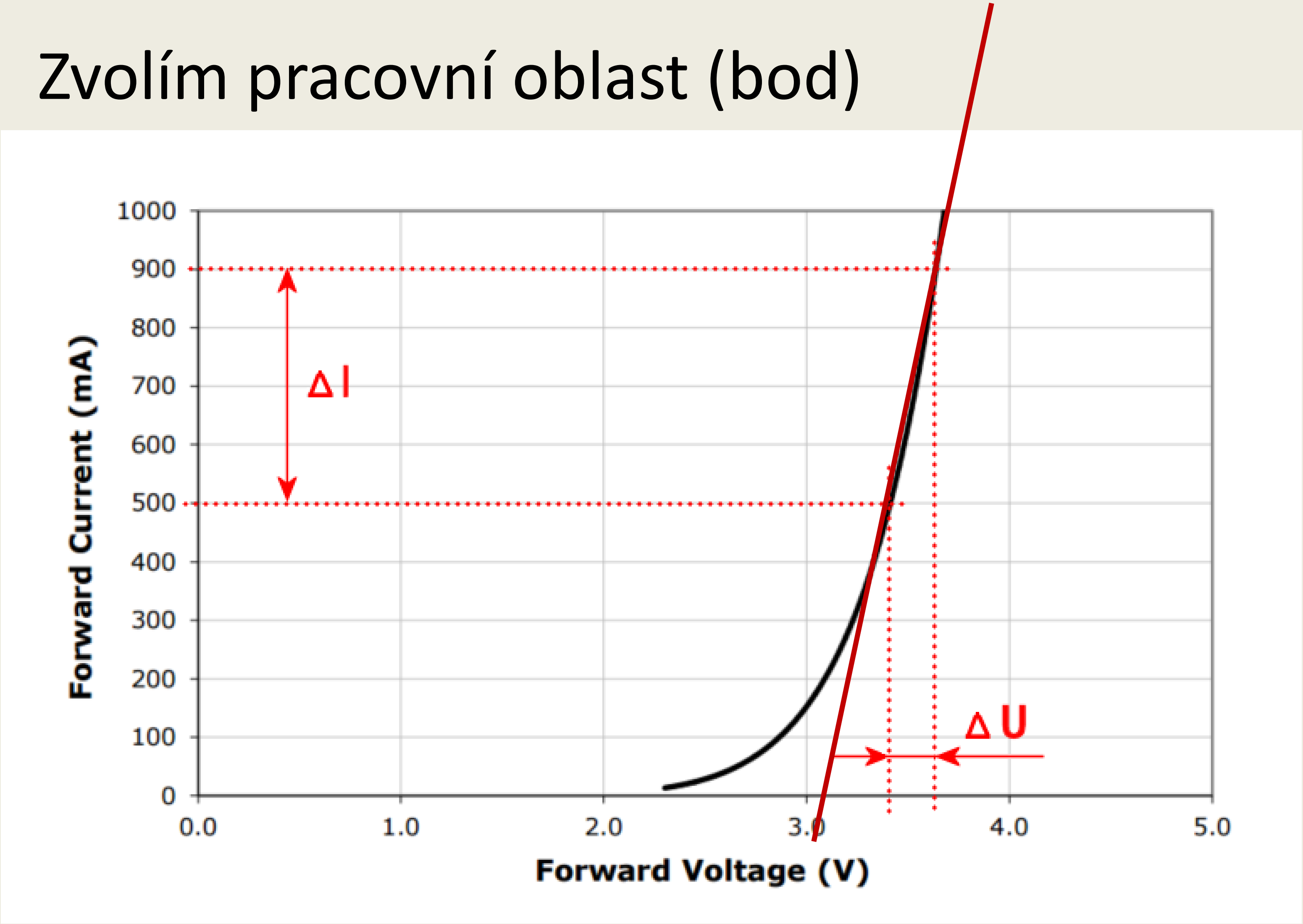
Superpozice

- řešení průtoku elektrického proudu
- skládání působení sil na hmotný bod
- je-li systém lineární a lze využít superpozice, je řešení takového systému často velmi jednoduché a jednoznačné.
- Chování takových systémů lze předpovědět i do budoucnosti.
- Nelineární – nelze využít (např. dioda)



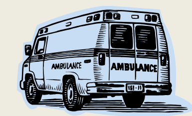
Linearizace

- Zvolím pracovní oblast (bod)

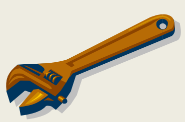


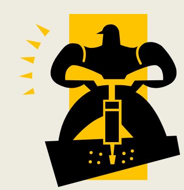
Systémová analýza

Linear time indiferent systems



LTI





LTI systémy

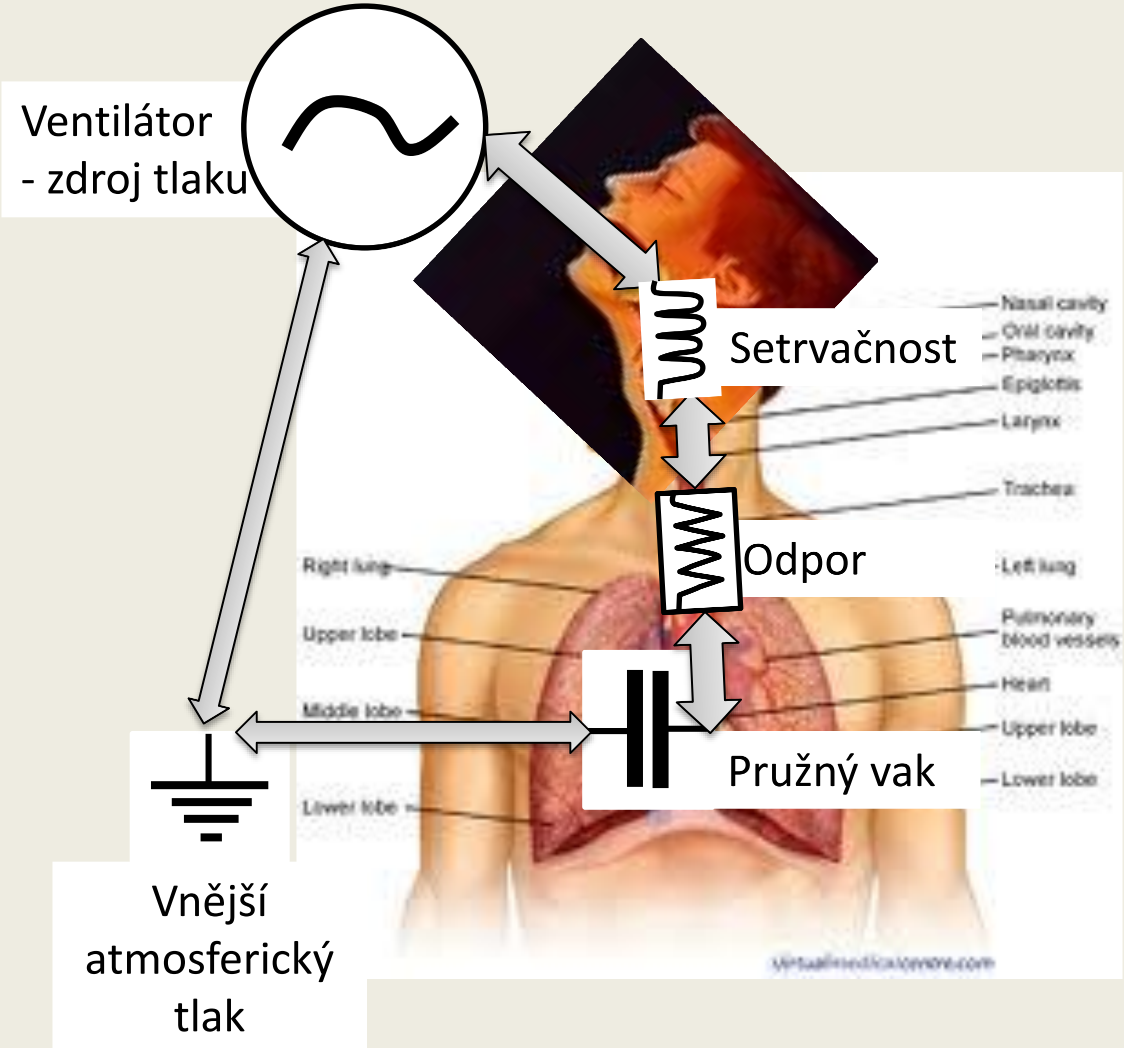
- Matematicky elegantní vztahy mezi vstupy a výstupy
- Lze určit výstupní odezvu na jakýkoli vstup
- Lze určit vstup při pozorování výstupu

- Čili: znám-li reakci na krátký vstup, mohu seskládat libovolný vstup a tím i libovolný výstup
- Nevytváří nové frekvenční složky, pouze zesiluje či potlačuje

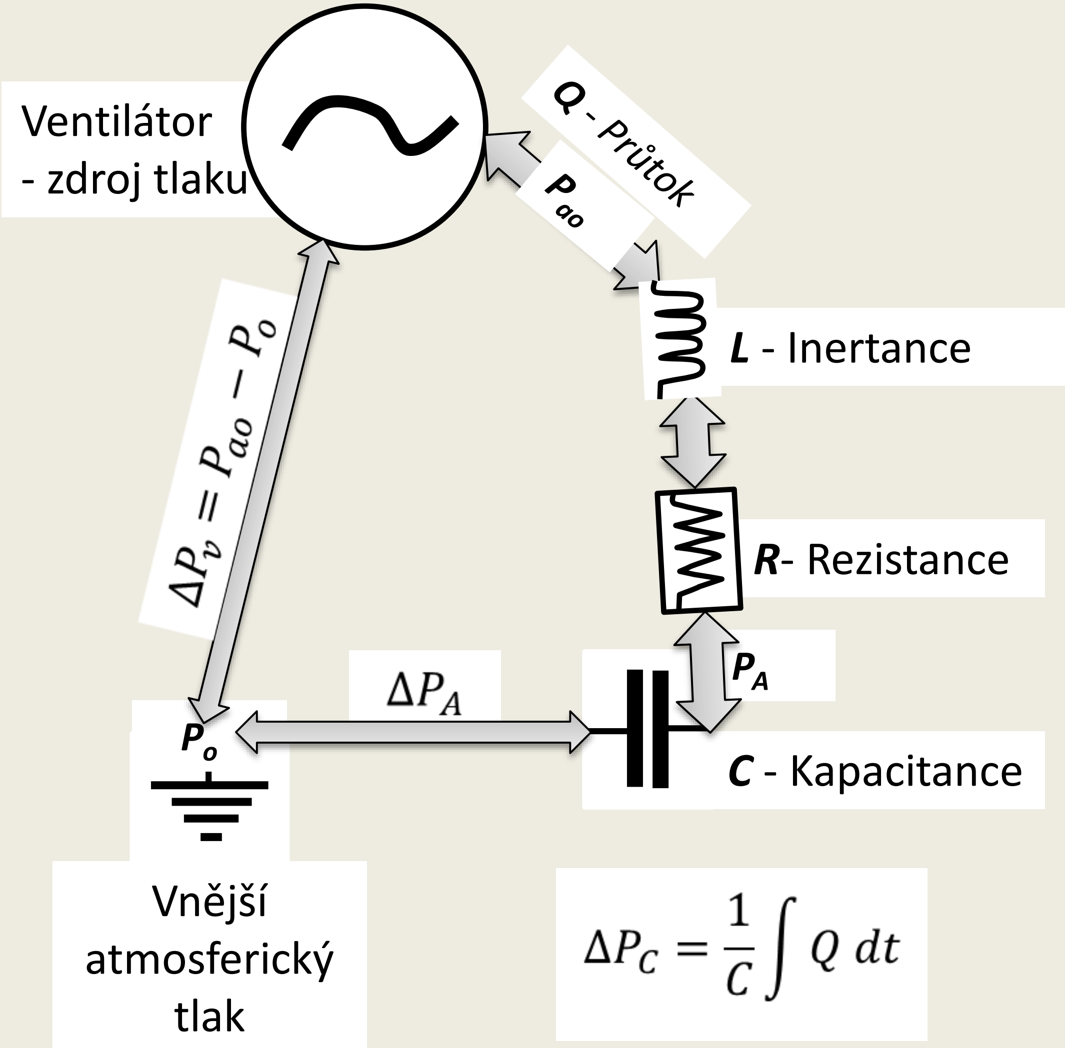
Popis LTI systémů

- Vnější popis systému
  - diferenciální rovnice
  - přenos a poloha pólů a nul přenosu systému
  - přechodová funkce
  - impulsní funkce
  - kmitočtový přenos
- Vnitřní popis systému (okamžitý stav)
  - Stavový popis (stavové veličiny)

Nejjednodušší model mechaniky dýchání



Nejjednodušší model mechaniky dýchání

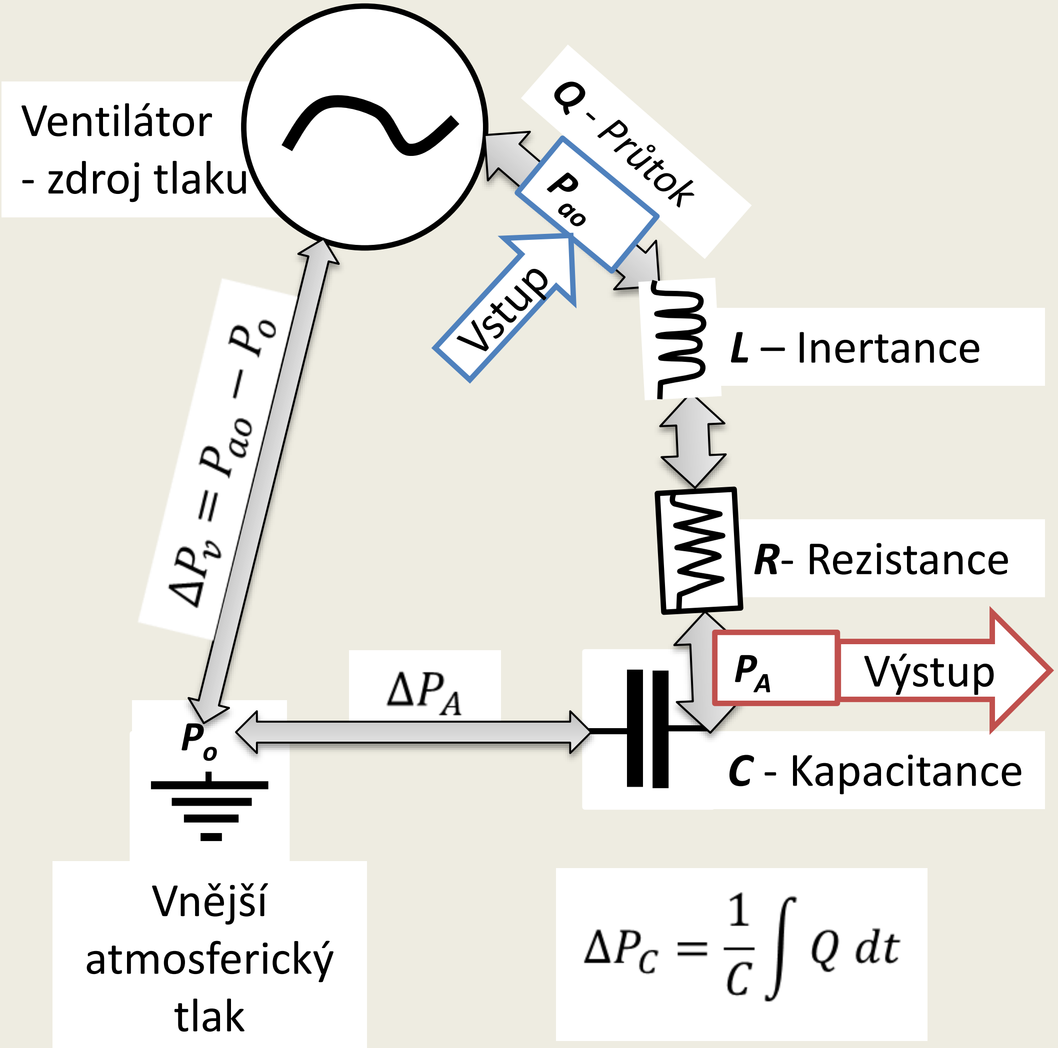


$$\Delta P_L = L\frac{dQ}{dt}$$

$$\Delta P_R = RQ$$

$$\Delta P_C = \frac{1}{C}\int Q\,dt$$

Nejjednodušší model mechaniky dýchání



$$\Delta P_L = L\frac{dQ}{dt}$$

$$\Delta P_R = RQ$$

$$\Delta P_v = \Delta P_L + \Delta P_R + \Delta P_C$$

$$\Delta P_A = \Delta P_C$$

$$\Delta P_C = \frac{1}{C}\int Q\,dt$$

$$P_{ao} - P_o = L\frac{dQ}{dt} + RQ + \frac{1}{C}\int Q\,dt$$

$$P_A - P_o = \frac{1}{C}\int Q\,dt$$

$$P_{ao} = LC\frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC\frac{dP_A}{dt} + P_A$$

řesení

$$\frac{Výstup}{Vstup} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

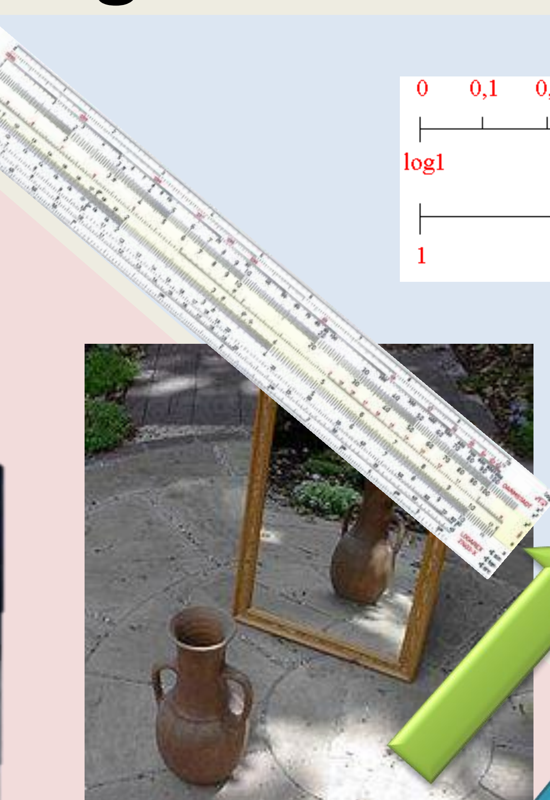
Nejjednodušší model mechaniky dýchání

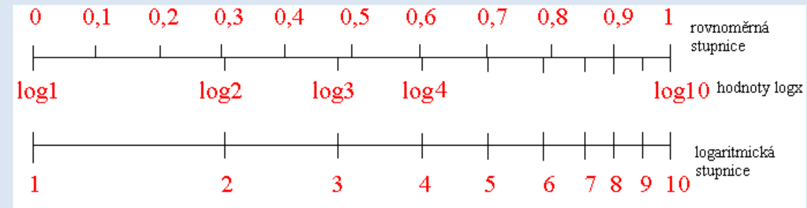
$$\frac{Výstup}{Vstup} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

řesení ?

$$P_{ao} = LC\frac{d^2P_A}{dt^2} + RC\frac{dP_A}{dt} + P_A$$

Logaritmické zrcadlo





$$\log(a\,b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log\left(a^b\right) = b\log(a)$$

sčítání a odečítání

$a\,b$

násobení a dělení

a/b

a^b

umocňování /odmocňování

Prostor obrazu

Prostor originálu

$$\frac{Výstup}{Vstup} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

řesení

$$P_{ao} = LC\frac{d^2P_A}{dt^2} + RC\frac{dP_A}{dt} + P_A$$

Laplaceovo zrcadlo

Oblast komplexní proměnné (s)

$$h(t) = \begin{cases} 1 \; pro \; t \geq 0 \\ 0 \; pro \; t < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^\infty (f(t)\,h(t))e^{st}\,dt$$

L{ }

$\mathrm{F}(s)$

L^{-1}{ }

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\oint \mathrm{F}(s)e^{st}\,ds$$

$f(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

$$\frac{Výstup}{Vstup} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

řesení ?

$$P_{ao} = LC\frac{d^2P_A}{dt^2} + RC\frac{dP_A}{dt} + P_A$$

Laplaceovo zrcadlo

Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$ - úloha v obraze

Snadnější

$F_2(s)$ - řešení úlohy v obraze

$L\{\ \}$

Úloha v originále: $f_1(t)$

Nesnadné

$L^{-1}\{\ \}$

Řešení v originále: $f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

$$\frac{Výstup}{Vstup} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

řesení ?

$$P_{ao} = LC\frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC\frac{dP_A}{dt} + P_A$$

Laplaceovo zrcadlo

Derivování originálu

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$ - úloha v obraze

L{ }

Snadné

$F_2(s)$ - řešení úlohy v obraze

Úloha v originále: $f_1(t)$

Nesnadné

L^{-1}{ }

Řešení v originále: $f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

Laplaceovo zrcadlo

Derivování originálu

$$\mathrm{L}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$ - úloha v obraze

$\mathrm{L}\{\ \}$

Snadnější

$F_2(s)$ - řešení úlohy v obraze

Úloha v originále: $f_1(t)$

Nesnadné

$\mathrm{L}^{-1}\{\ \}$

Řešení v originále: $f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

Derivování originálu

Laplaceovo zrcadlo

$$\mathrm{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-2} f''(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

$F_1(s)$ - úloha v obraze

$\mathrm{L}\{\ \}$

Snadnější

$F_2(s)$ - řešení úlohy v obraze

Úloha v originále: $f_1(t)$

Nesnadné

$\mathrm{L}^{-1}\{\ \}$

Řešení v originále: $f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

Laplaceovo zrcadlo

Integrování originálu

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^1 f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$ - úloha v obraze

$F_2(s)$ - řešení úlohy v obraze

Úloha v originále: $f_1(t)$

Řešení v originále: $f_2(t)$

$f_1(t) \xrightarrow{\mathrm{L}\{\ \}} F_1(s) \xrightarrow{\text{Snadnější}} F_2(s) \xrightarrow{\mathrm{L}^{-1}\{\ \}} f_2(t)$

$f_1(t) \xrightarrow{\text{Nesnadné}} f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

Laplaceovo zrcadlo

Linearita obrazu a originálu

$$L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(t) + a_2 F_2(t)$$

$$L^{-1}\{b_1 F_1(s) + b_2 F_2(s)\} = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t)$$

Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$ - úloha v obraze

Snadnější

$F_2(s)$ - řešení úlohy v obraze

L{ }

Úloha v originále: $f_1(t)$

Nesnadné

L-1{ }

Řešení v originále: $f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

Posun originálu (zpoždění)
= útlum obrazu

Laplaceovo zrcadlo

$L\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$
kde
$a \geq 0$
$f(t-a) > 0$
pro $t < a$

Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$ - úloha v obraze

Snadné

L{ }

$F_2(s)$ - řešení úlohy v obraze

Úloha v originále: $f_1(t)$

Nesnadné

L-1{ }

Řešení v originále: $f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

Posun obrazu = útlum originálu

Laplaceovo zrcadlo

$$\mathrm{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$ - úloha v obraze

Snadné

$F_2(s)$ - řešení úlohy v obraze

$\mathrm{L}\{\ \}$

Úloha v originále: $f_1(t)$

Nesnadné

$\mathrm{L}^{-1}\{\ \}$

Řešení v originále: $f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

Změna měřítka (podobnost)

Laplaceovo zrcadlo

$$L\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(as)$$

$$L^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right)\right\} = af(at)$$

Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$ - úloha v obraze

Snadné

$F_2(s)$ - řešení úlohy v obraze

L{ }

L^{-1}{ }

Úloha v originále: $f_1(t)$

Nesnadné

Řešení v originále: $f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

Laplaceovo zrcadlo

Příklady

Originál: *f(t)* — **Obraz: *F(s)***

Originál		Obraz
Jednotkový impulz: $\delta(t)$	$\Leftrightarrow$	1
Jednotkový skok: 1	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{s}$
t	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{r^k}{k!}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{s^{k+1}}$
$\frac{r^k}{k!}e^{-at}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$
$\sin \omega t$	$\Leftrightarrow$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\Leftrightarrow$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$1-e^{-at}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{a}{s(s+a)}$

…atd.

Prostor obrazu

Prostor originálu

Wolfram Mathematica:

In[1] = $\text{LaplaceTransform}[t\text{^}4\ \text{Sin}[t], t, s]$

Out[1]= $\frac{24(1-10s^2+5s^4)}{(1+s^2)^5}$

In[2]= InverseLaplaceTransform[(24 (1-10 s^2+5 s^4))/(1+s^2)^5,s,t]

Out[2] = $t^4\text{Sin}[t]$

Příklady

Laplaceovo zrcadlo

Originál: y(t), *x(t)*

Obraz: *Y(s), X(s)*

$$Y(s) = b_2 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s) - b_1 x(0) - b_2 s x(0) - b_2 \frac{dx(0)}{dt}$$

$$y(t) = b_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Prostor obrazu

Prostor originálu

Příklady

Laplaceovo zrcadlo

Originál: y(t), *x(t)*

Obraz: *Y(s), X(s)*

$$a_1 sY(s) + Y(s) - a_1 y(0) = b_2 s^2 X(s) + b_1 sX(s) + b_0 X(s) - b_1 x(0) - b_2 s x(0) - b_2 \frac{dx(0)}{dt}$$

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Prostor obrazu

Prostor originálu

Laplaceovo zrcadlo

Originál: y(t), *x(t)*

Obraz: *Y(s), X(s)*

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + Y(s) - a_1 y(0) - a_2 s y(0) - a_2 \frac{dy}{dt} =$$
$$= b_2\, s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s) - b_1 x(0) - b_2 s x(0) - b_2 \frac{dx(0)}{dt}$$

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \mathrm{y}(\mathrm{t}) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Prostor obrazu

Prostor originálu

Laplaceovo zrcadlo

Originál: y(t), *x(t)*

Obraz: *Y(s), X(s)*

Při nulových počátečních podmínkách:

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + Y(s) = b_2\ s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \mathrm{y(t)} = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Prostor obrazu

Prostor originálu

Příklady

Laplaceovo zrcadlo

Originál: *f(t)*

Obraz: *F(s)*

Při nulových počátečních podmínkách:

$$Y(s) = b_2\, s^2X(s) + b_1 sX(s) + b_0X(s)$$

$$y(t) = b_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$a_1 sY(s) + Y(s) = b_2\, s^2X(s) + b_1 sX(s) + b_0X(s)$$

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$a_2 s^2Y(s) + a_1 sY(s) + Y(s) = b_2\, s^2X(s) + b_1 sX(s) + b_0X(s)$$

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Prostor obrazu

Prostor originálu

Nejjednodušší model mechaniky dýchání

Oblast komplexní proměnné (s)

$F_1(s)$ - úloha v obraze

$F_2(s)$ - řešení úlohy v obraze

Úloha v originále: $f_1(t)$

Řešení v originále: $f_2(t)$

$f_1(t) \xrightarrow{L\{\ \}} F_1(s)$

$F_1(s) \xrightarrow{\text{Snadnější}} F_2(s)$

$F_2(s) \xrightarrow{L^{-1}\{\ \}} f_2(t)$

$f_1(t) \xrightarrow{\text{Nesnadné}} f_2(t)$

Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu

$$\frac{Výstup}{Vstup} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)} \quad \xleftarrow{\text{řesení ?}} \quad P_{ao} = LC\frac{d^2P_A}{dt^2} + RC\frac{dP_A}{dt} + P_A$$

Laplaceovo zrcadlo

Oblast komplexní proměnné (s)

Úloha v originále:

$$P_{ao} = LC\frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC\frac{dP_A}{dt} + P_A$$

počáteční podmínky:

$$P_A(t_0) = 0,\ P_A{}'(t_0) = 0$$
$$P_{ao}(t_0) = 0$$

Úloha v obraze:

$$P_A(s) = P_{ao}(s)\,(LCs^2 + RCs + 1)$$

L{ }

Snadnější

Řešení úlohy v obraze:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Nesnadné

$L^{-1}\{\ \}$

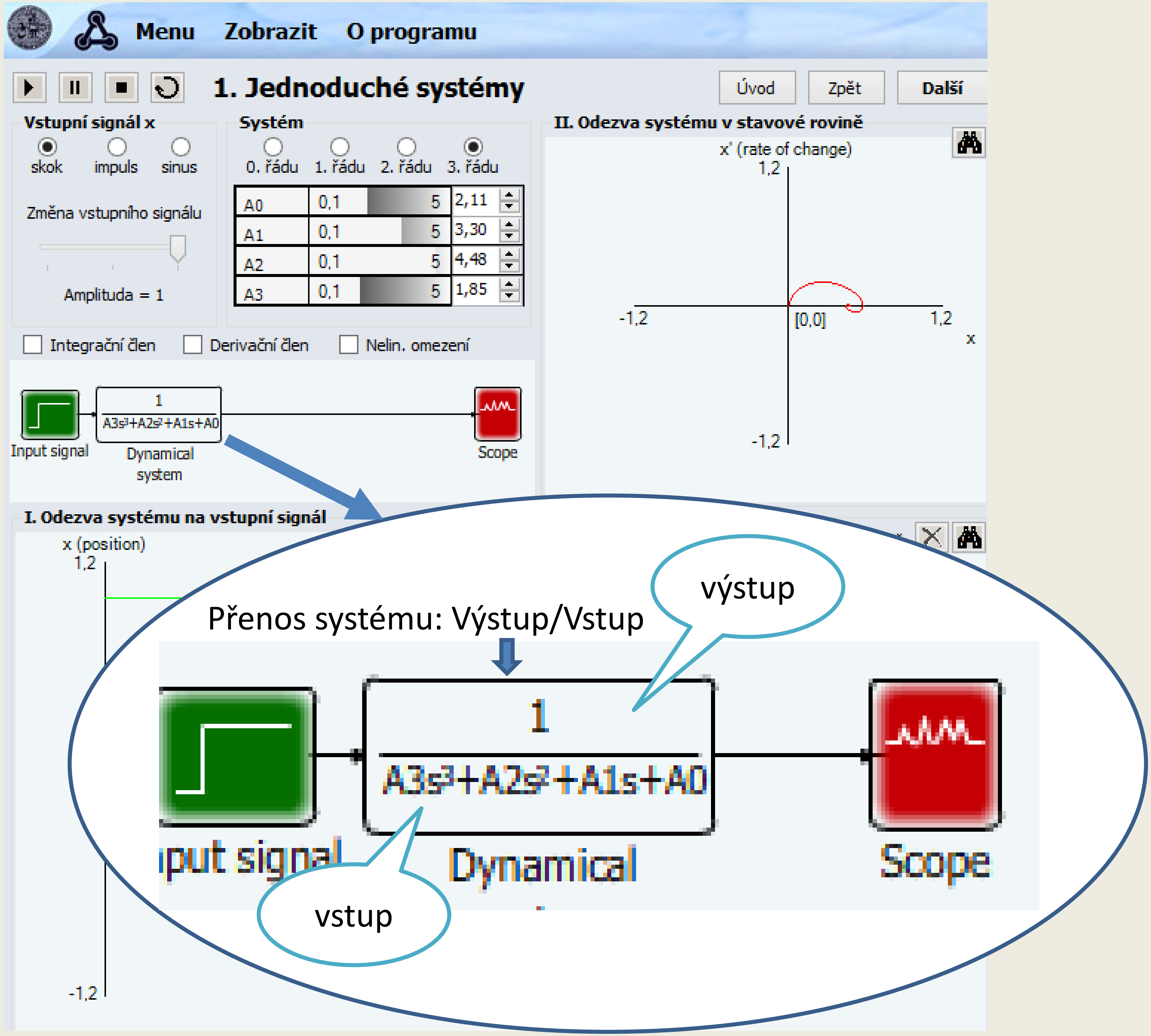
Řešení v originále:

$$\frac{Výstup}{Vstup} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

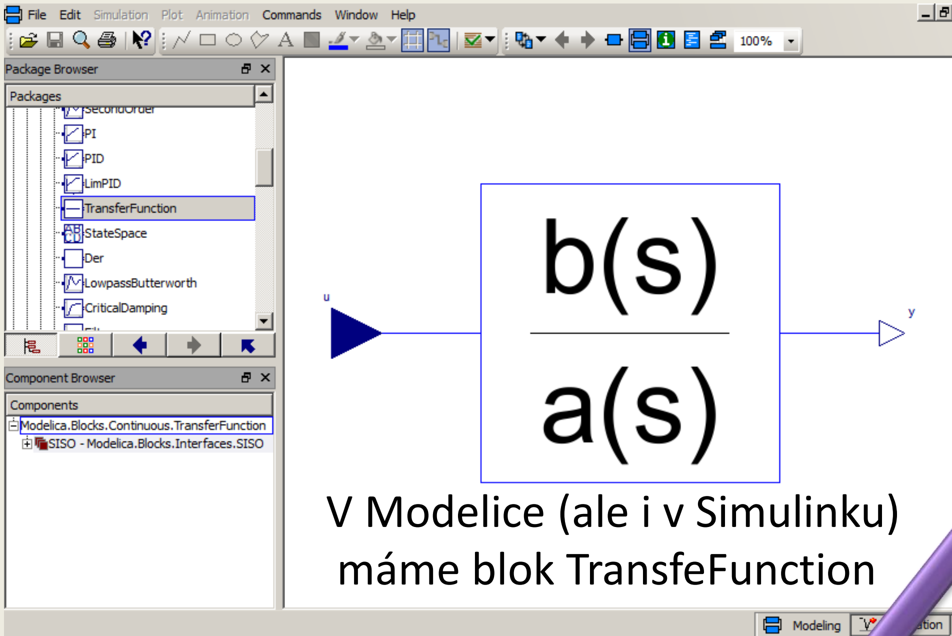
Oblast reálné proměnné (oblast času t)

Prostor obrazu

Prostor originálu


Menu
Zobrazit
O programu
1. Jednoduché systémy
Úvod
Zpět
Další
Vstupní signál x
skok
impuls
sinus
Změna vstupního signálu
Amplituda = 1
Systém
0. řádu
1. řádu
2. řádu
3. řádu
A0 0,1 5 2,11
A1 0,1 5 3,30
A2 0,1 5 4,48
A3 0,1 5 1,85
Integrační člen
Derivační člen
Nelin. omezení
Input signal
Dynamical system
Scope
II. Odezva systému v stavové rovině
x' (rate of change)
I. Odezva systému na vstupní signál
x (position)
Přenos systému: Výstup/Vstup
výstup
vstup

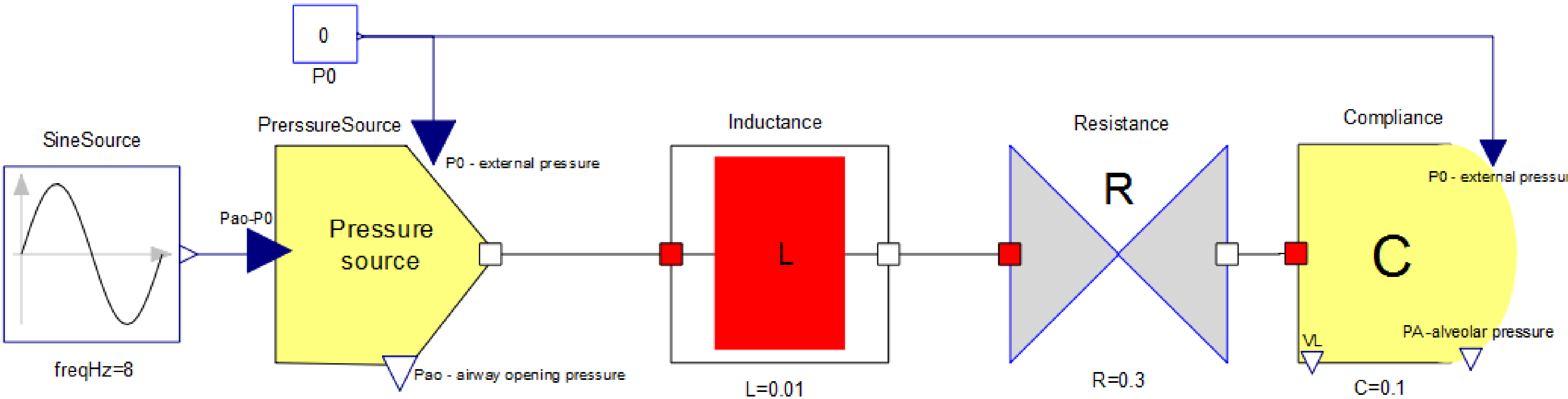
Nejjednodušší model mechaniky dýchání



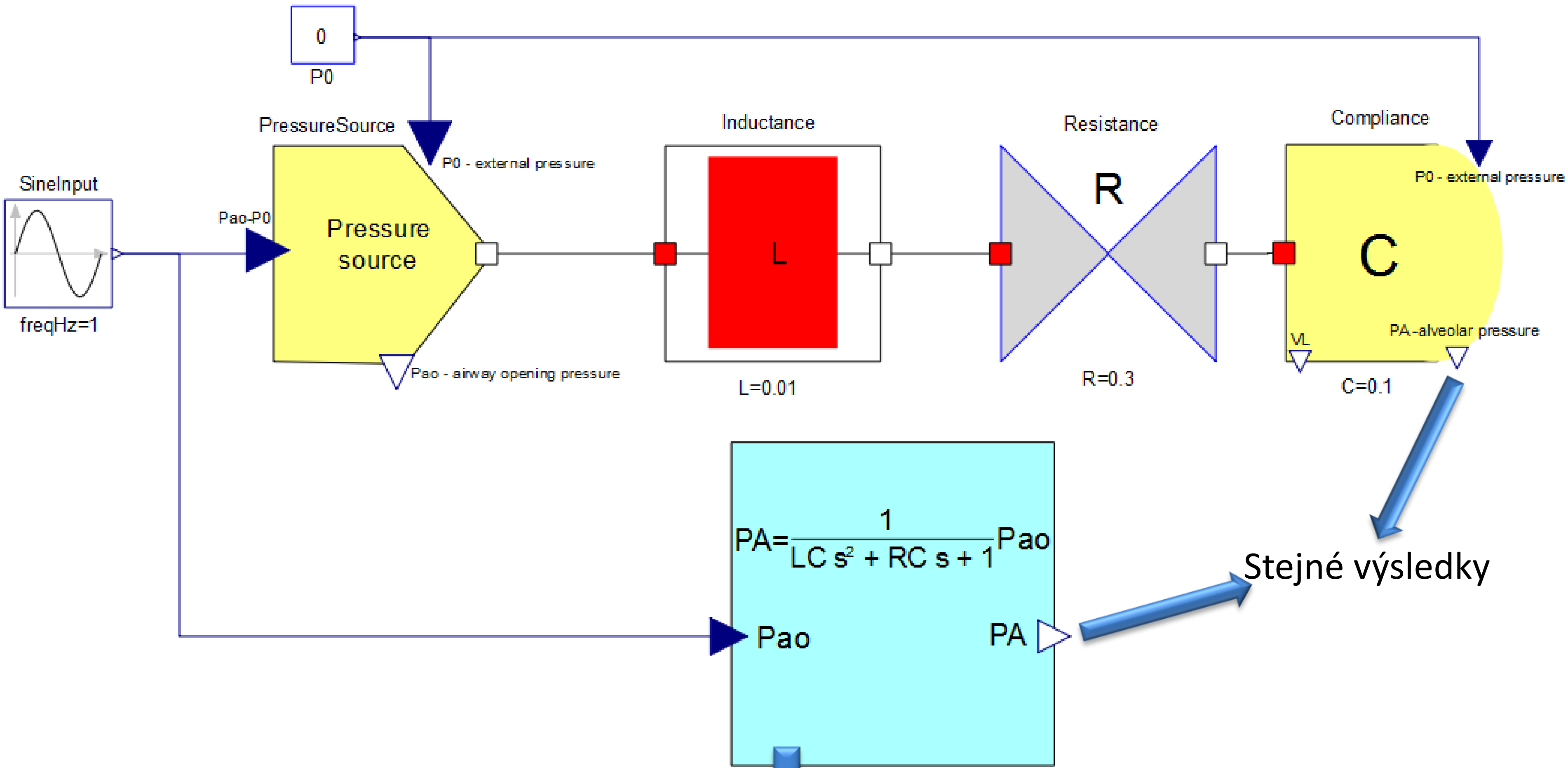
V Modelice (ale i v Simulinku) máme blok TransfeFunction

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

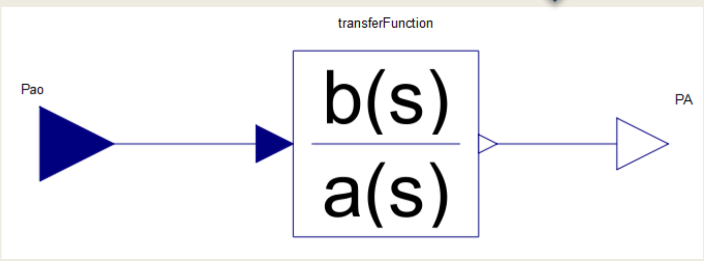
$$\frac{Výstup}{Vstup} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)} = \frac{P_{ao}(t)}{LC\frac{d^2P_A(t)}{dt^2} + RC\frac{dP_A(t)}{dt} + P_A(t)} =$$



$$P_{ao} = LC\frac{d^2P_A}{dt^2} + RC\frac{dP_A}{dt} + P_A$$



Stejné výsledky



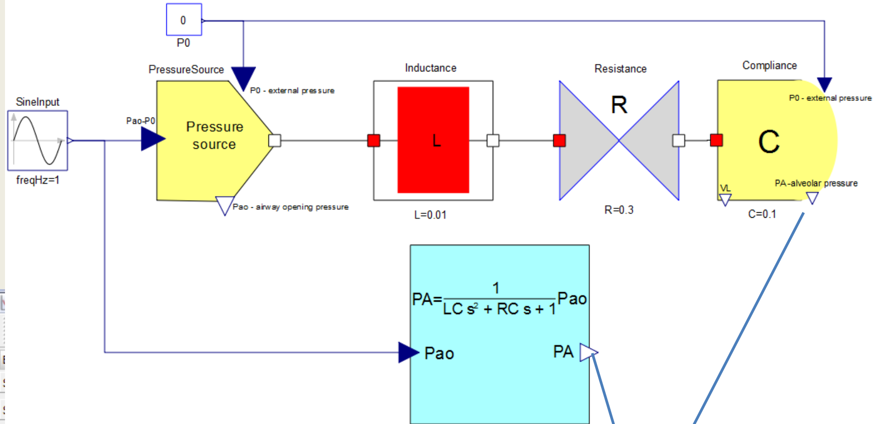
$$P_{ao} = LC\frac{d^2P_A}{dt^2} + RC\frac{dP_A}{dt} + P_A$$

Parameters:

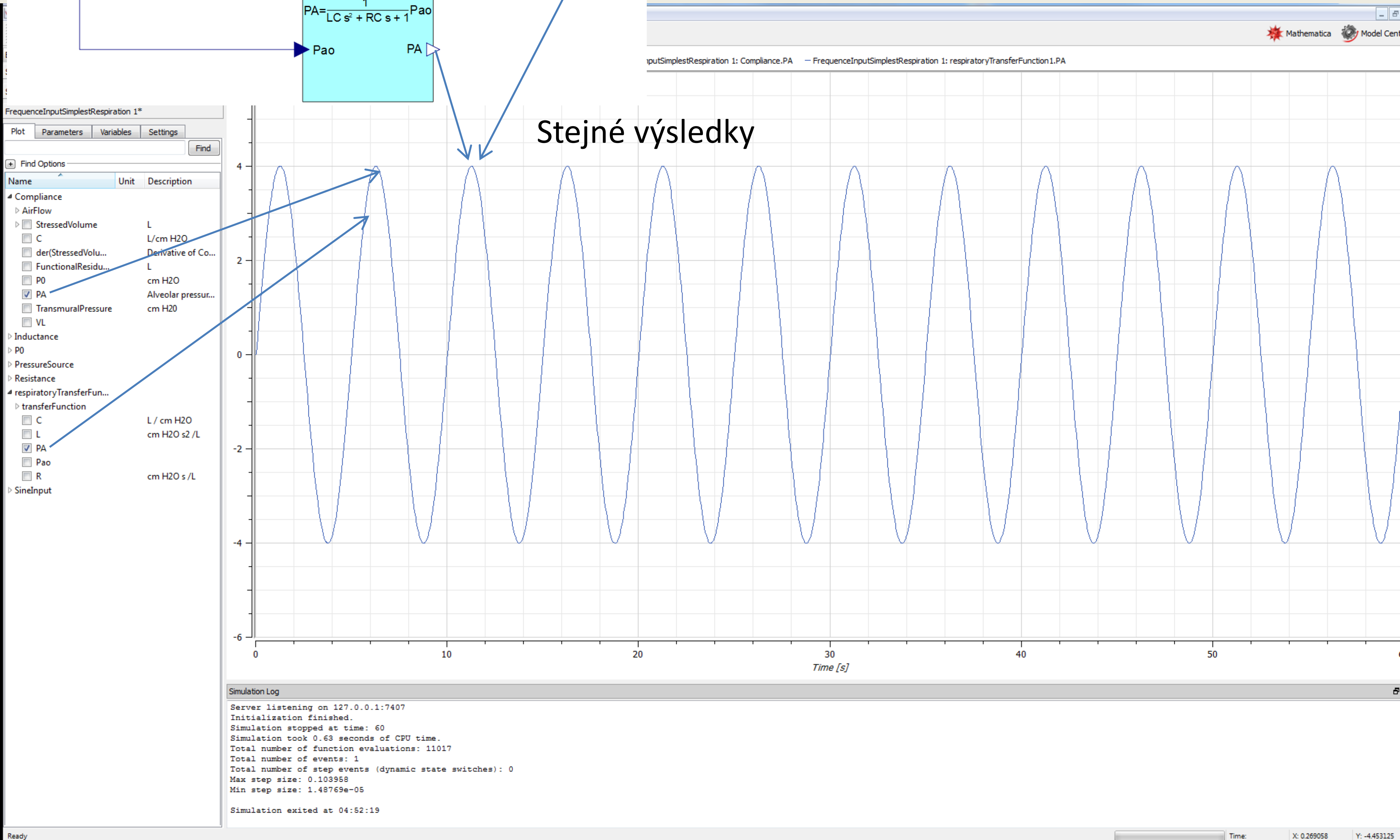
a: {L*C,R*C,1}

b: {1}

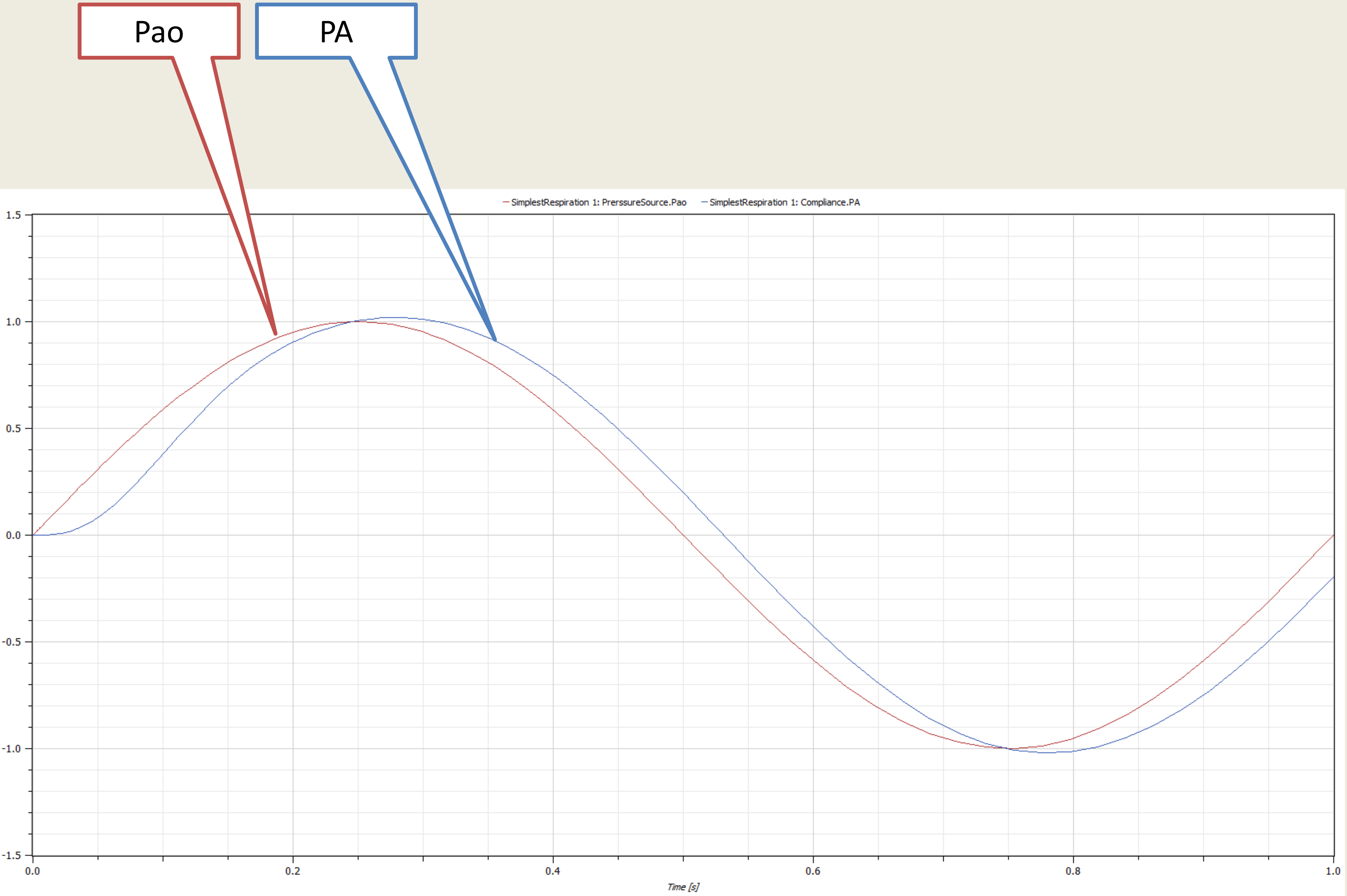
$$H(s) = \frac{Výstup}{Vstup} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



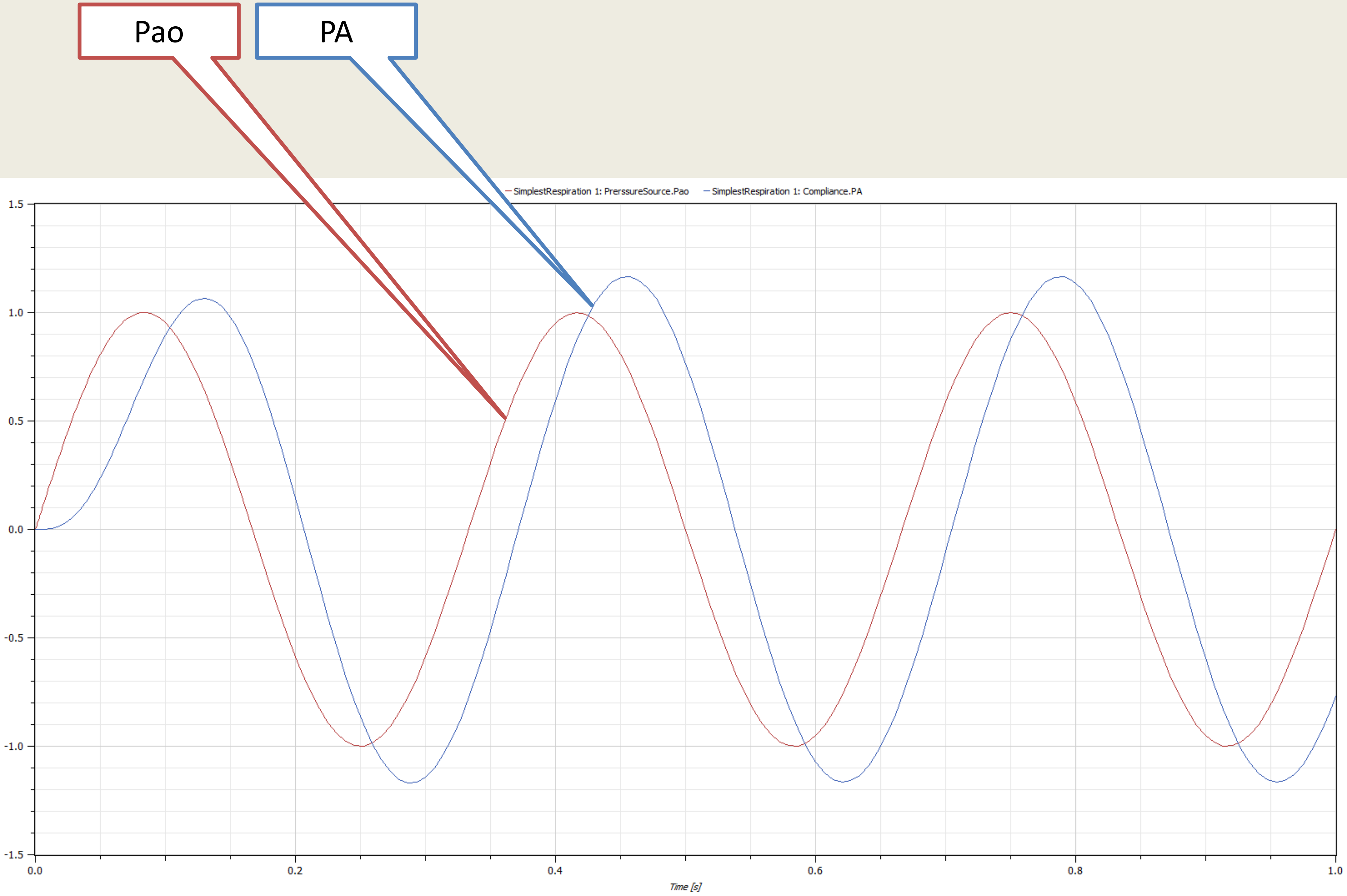
Stejné výsledky



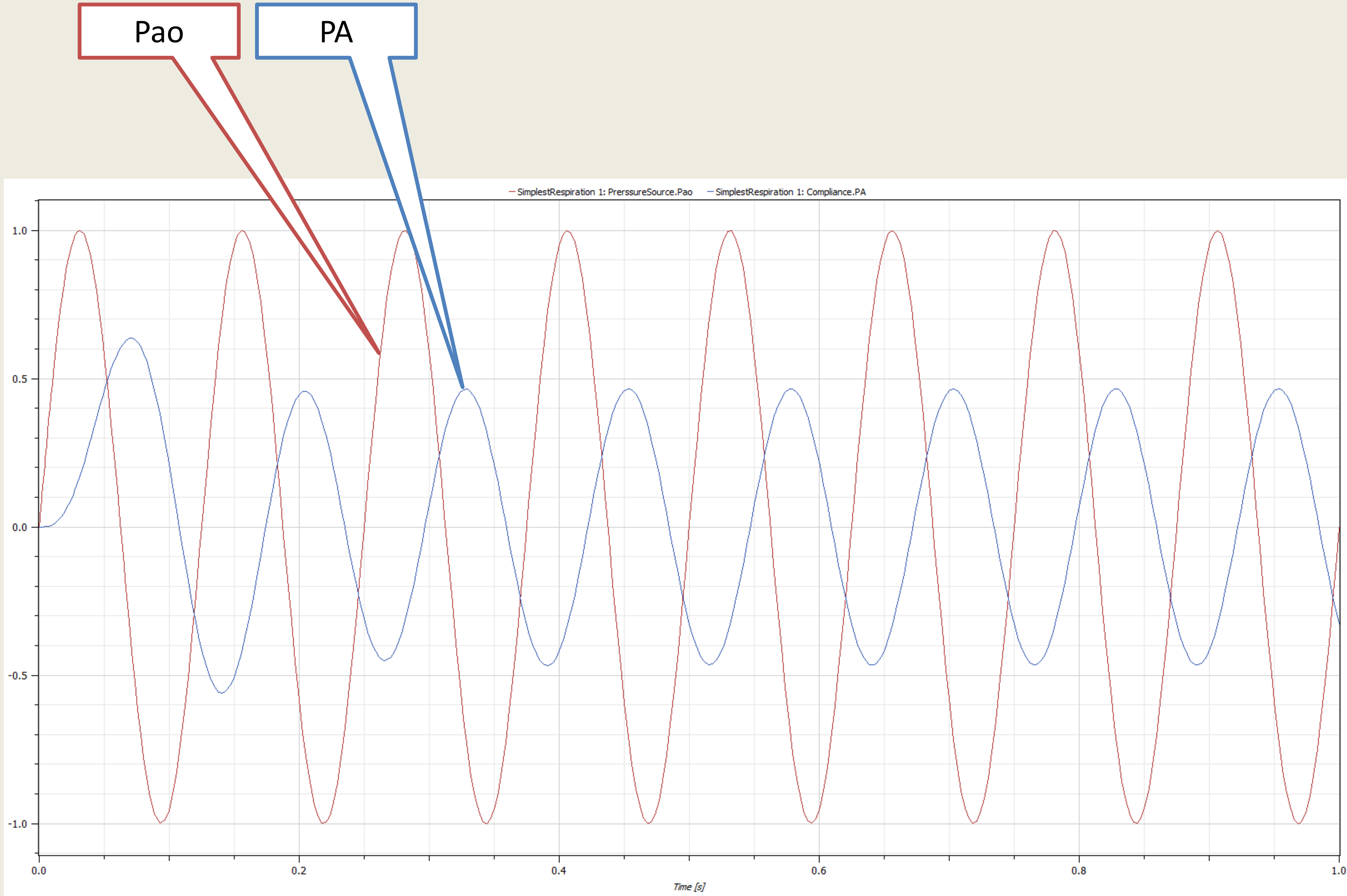
Budící vstup - 1 Hz

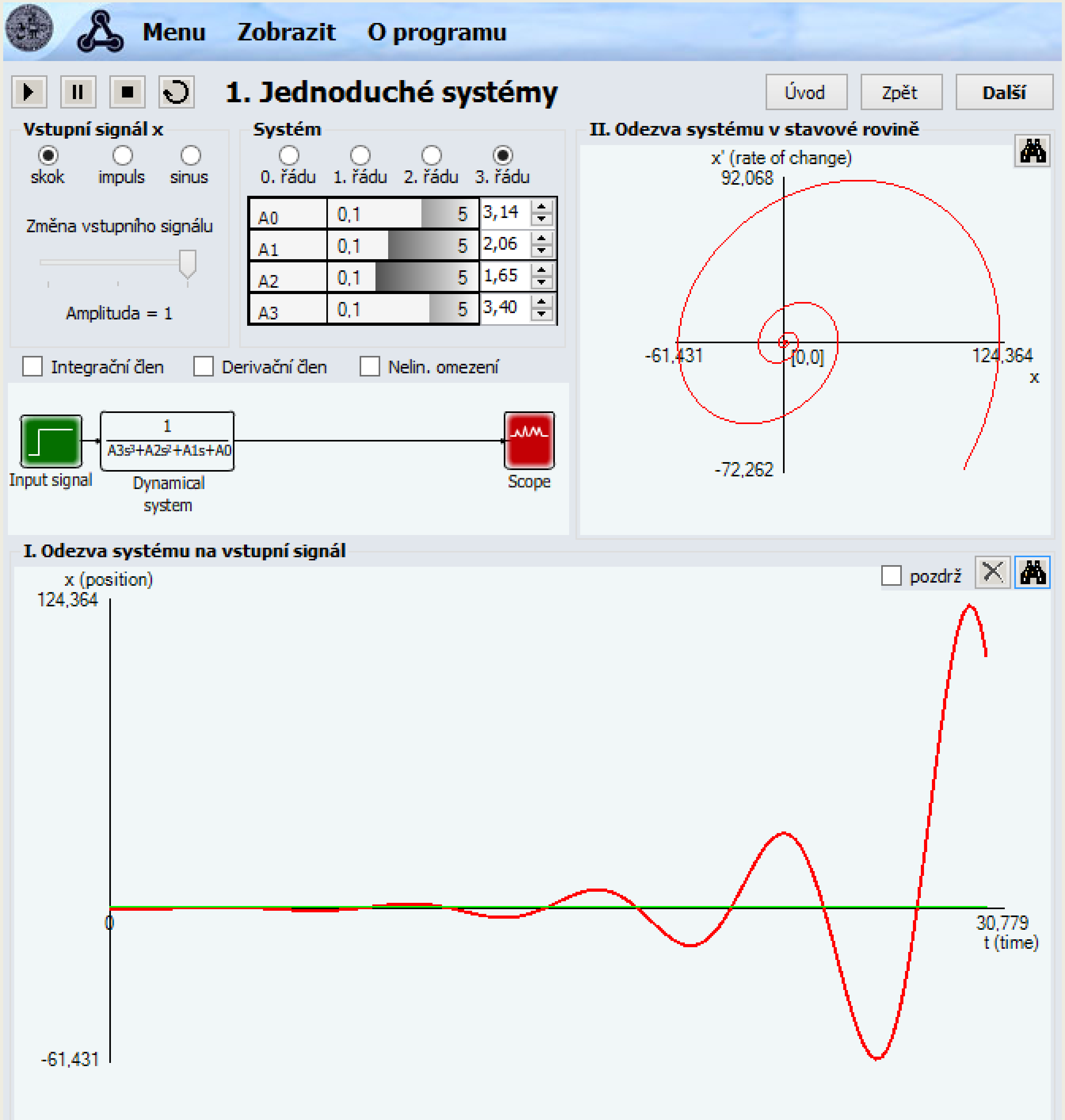


Budící vstup - 3 Hz



Budící vstup - 8 Hz





Menu
Zobrazit
O programu
1. Jednoduché systémy
Úvod
Zpět
Další
Vstupní signál x
skok
impuls
sinus
Změna vstupního signálu
Amplituda = 1
Systém
0. řádu
1. řádu
2. řádu
3. řádu
A0 0,1 5 3,14
A1 0,1 5 2,06
A2 0,1 5 1,65
A3 0,1 5 3,40
Integrační člen
Derivační člen
Nelin. omezení
1
A3s³+A2s²+A1s+A0
Input signal
Dynamical system
Scope
II. Odezva systému v stavové rovině
x' (rate of change)
92,068
-61,431
[0,0]
124,364
x
-72,262
I. Odezva systému na vstupní signál
pozdrž
x (position)
124,364
0
30,779
t (time)
-61,431

Přenosová funkce

- poměr Laplaceova obrazu výstupní veličiny k Laplaceovu obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách

$$G(s) = \frac{\mathrm{L}\{u(t)\}}{\mathrm{L}\{y(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Sestavení přenosové funkce

- Systém se vstupní u(t) a výstupní y(t) veličinou

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

- Laplaceova transformace

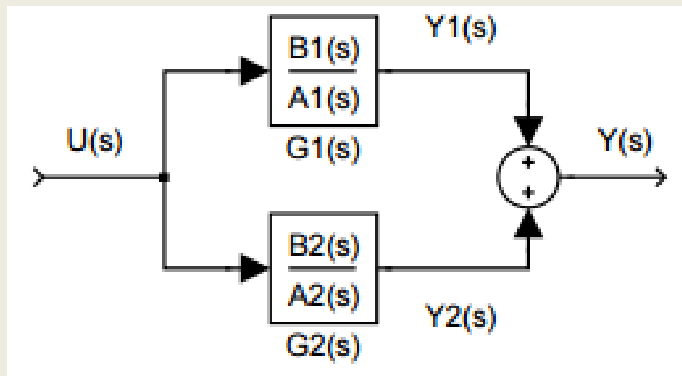
$$(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0) U(s)$$

- Výsledný přenos

$$G(s) = \frac{\mathrm{Y}(s)}{\mathrm{U}(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

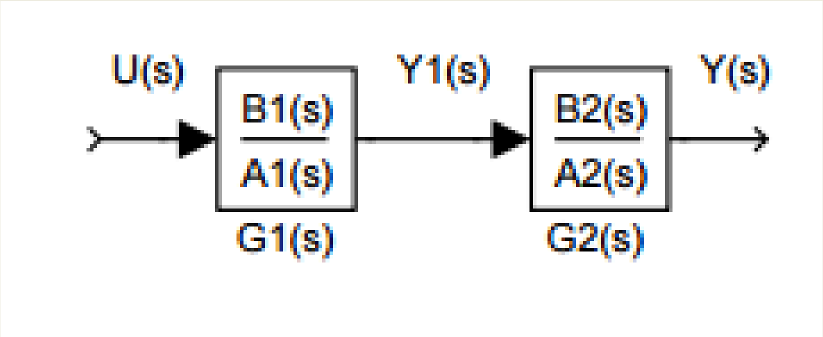
Paralelní kombinace přenosových funkcí

- Prostý součet přenosů



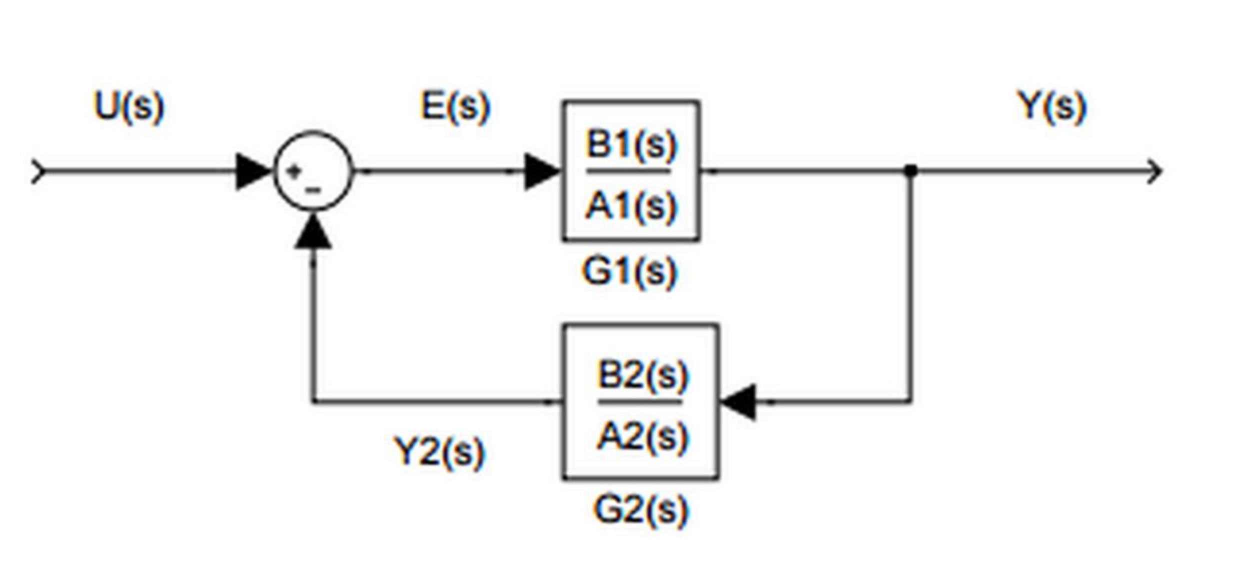
$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} G_i(s)$$

Seriová kombinace přenosových funkcí



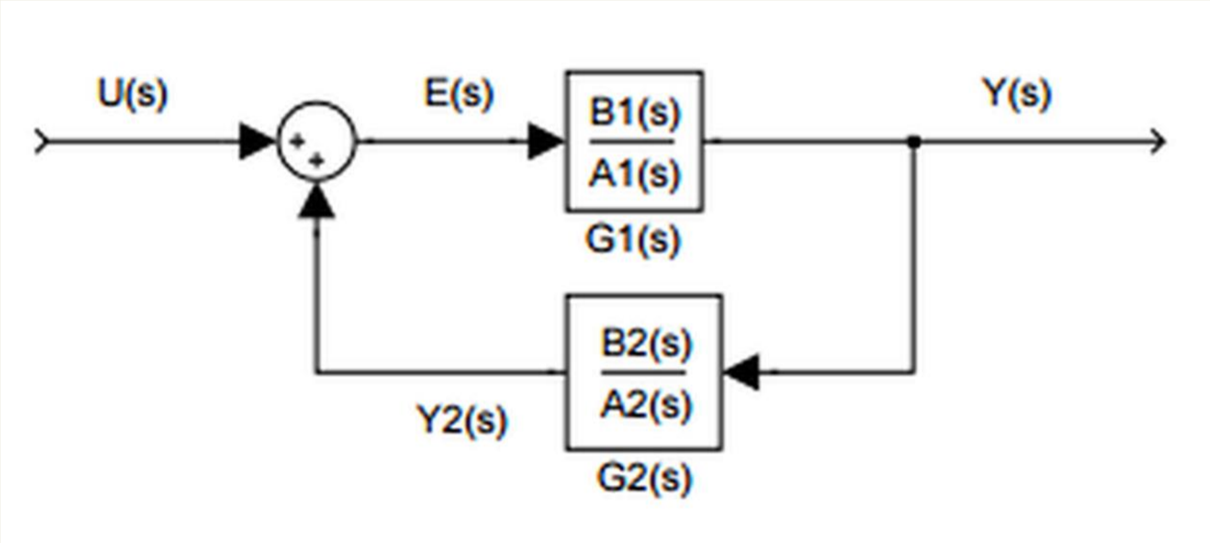
$$G(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s)$$

V záporné zpětné vazbě



$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{B_1(s)A_2(s)}{A_1(s)A_2(s) + B_1(s)B_2(s)}$$

V kladné zpětné vazbě



$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} = \frac{B_1(s)A_2(s)}{A_1(s)A_2(s) - B_1(s)B_2(s)}$$

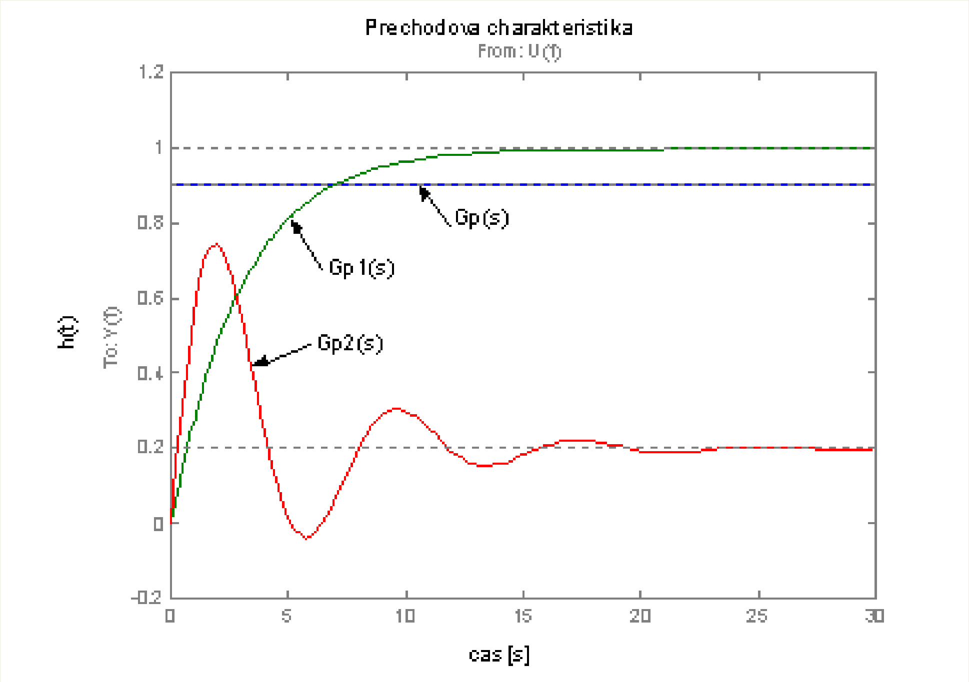
Přechodová charakteristika

- Odezva na jednotkový (Haevisideův) skok
- časový průběh výstupní veličiny systému *h*(*t*)

$$Gp(s) = 0{,}9$$

$$Gp_1(s) = \frac{1}{3s+1}$$

$$Gp_2(s) = \frac{5s+1}{7s^2+3s+5}$$



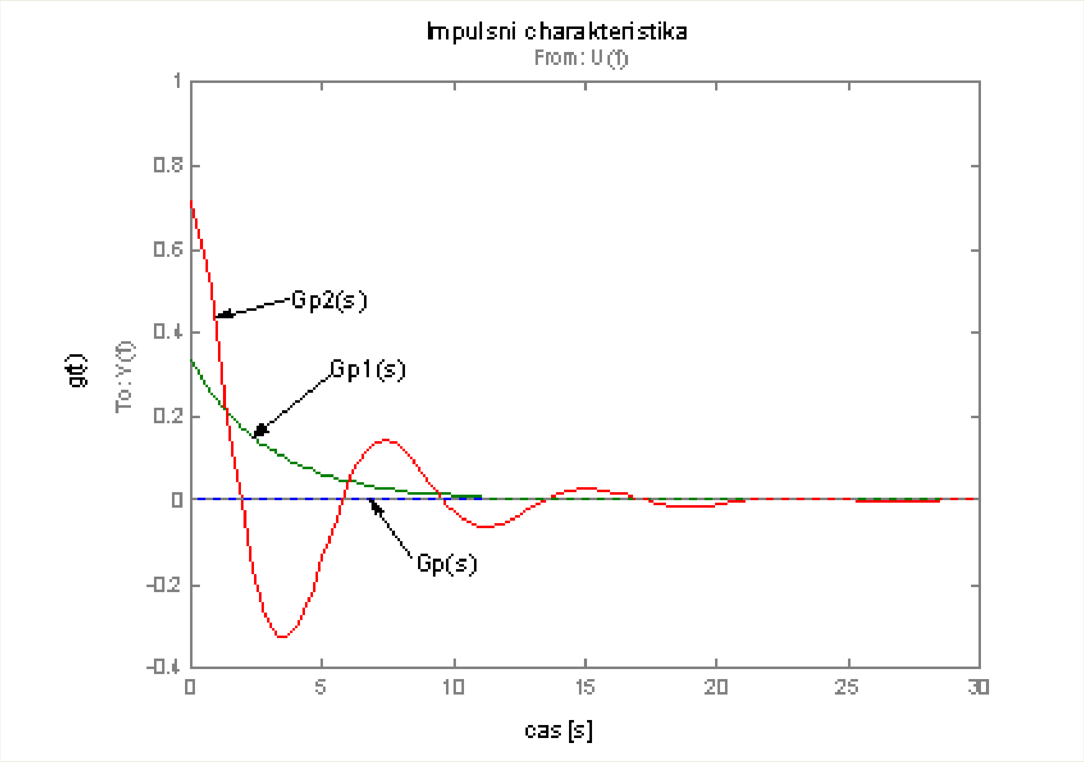
Impulsní charakteristika

- Odezva na jednotkový (Diracův) impuls
- časový průběh výstupní veličiny systému *h*(*t*)

$$Gp(s) = 0{,}9$$

$$Gp_1(s) = \frac{1}{3s+1}$$

$$Gp_2(s) = \frac{5s+1}{7s^2+3s+5}$$



Nuly, póly, zesílení

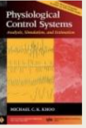
- Kořeny charakteristické rovnice:

$$G(s) = \frac{b_m}{a_n} \frac{(s+n_1)\dots(s+n_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)},$$

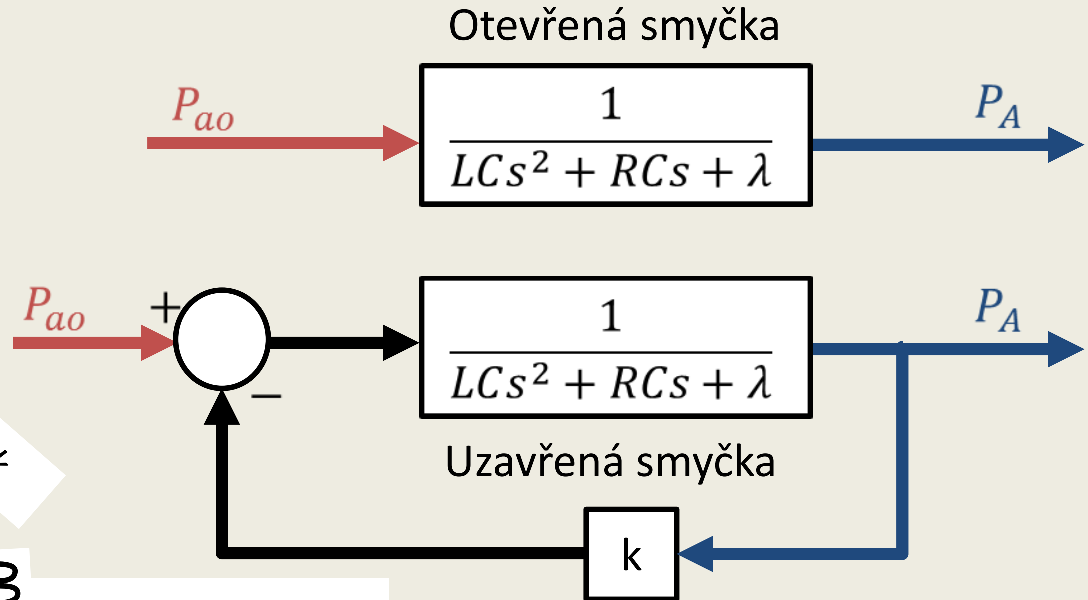
- Jsou v čitateli nuly (-n1..-nm)
- Jsou ve jmenovateli póly (-p1, … -pn)
- Zesílení je bm/an

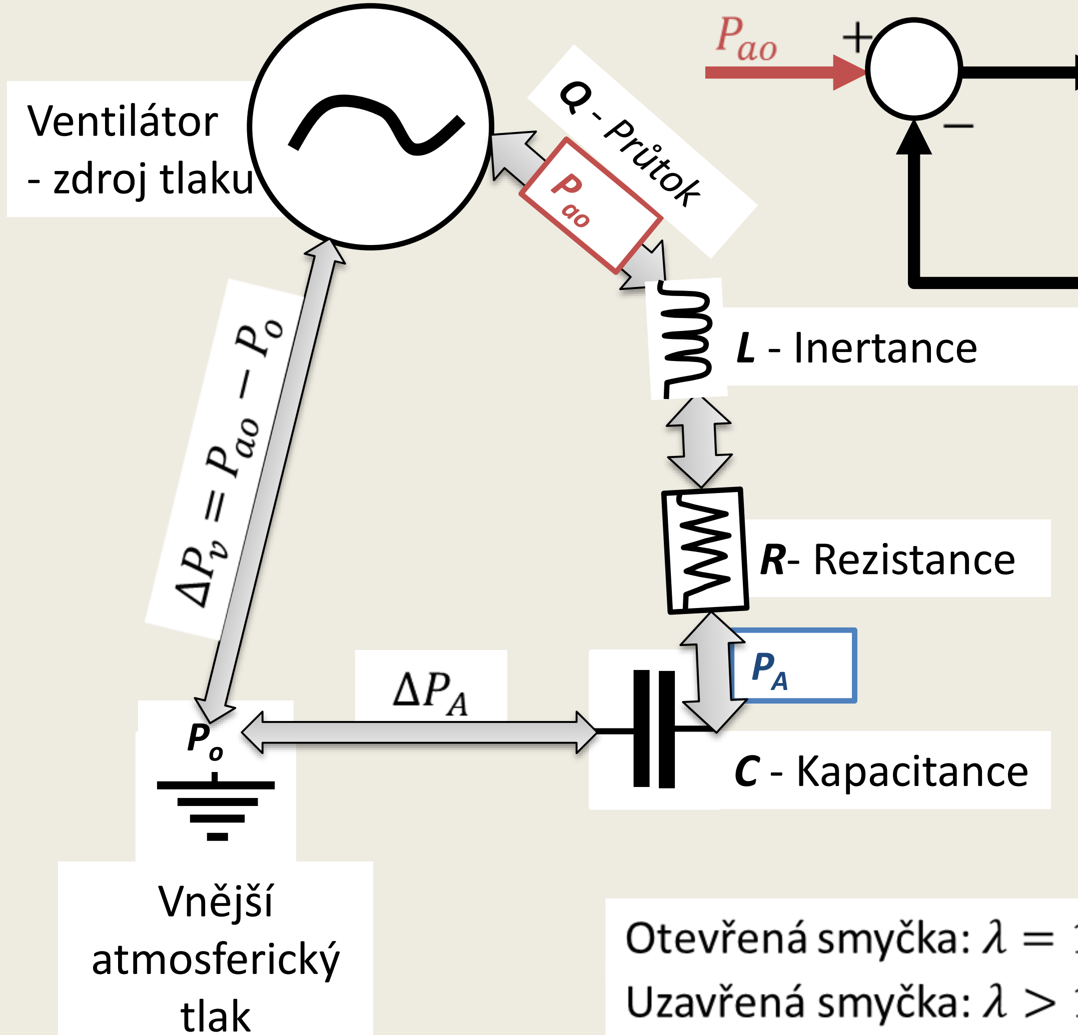
- Např. $$G(s) = \frac{3s^2(s+2)}{s^2(s+5)(s+6)(s+2)}$$

- Nuly 0, 0, -2, póly 0,0, -5, -6, -2, zesílení 3



Nejjednodušší model mechaniky dýchání





$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

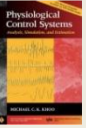
$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s) - kP_A(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + (1 + k)}$$

Otevřená smyčka: $\lambda = 1$

Uzavřená smyčka: $\lambda > 1$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$



Přechodové odezva systému prvního řádu

Nebudeme uvažovat setrvačnost: L=0

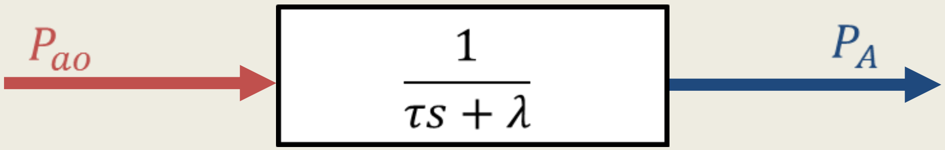
$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

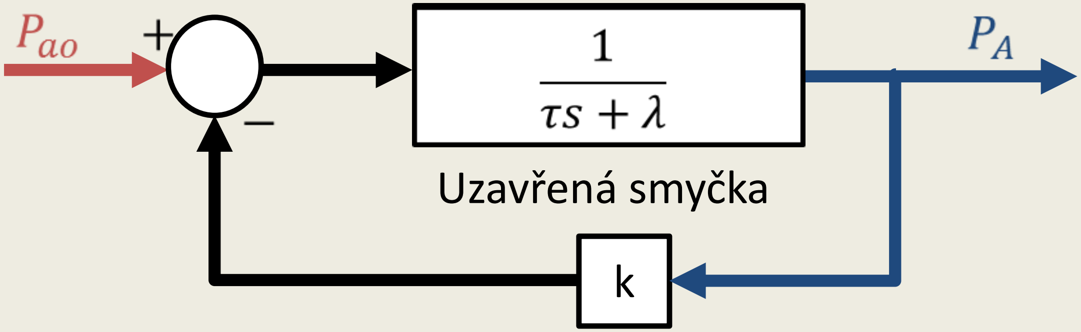
$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{RCs + \lambda}$$

$$RC = \tau$$

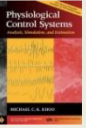
$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{\tau s + \lambda}$$

Otevřená smyčka





Uzavřená smyčka

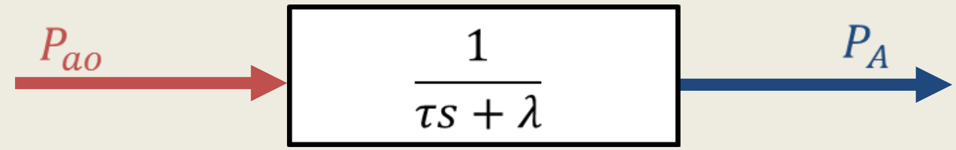


Přechodové odezva systému prvního řádu na jednotkový impuls

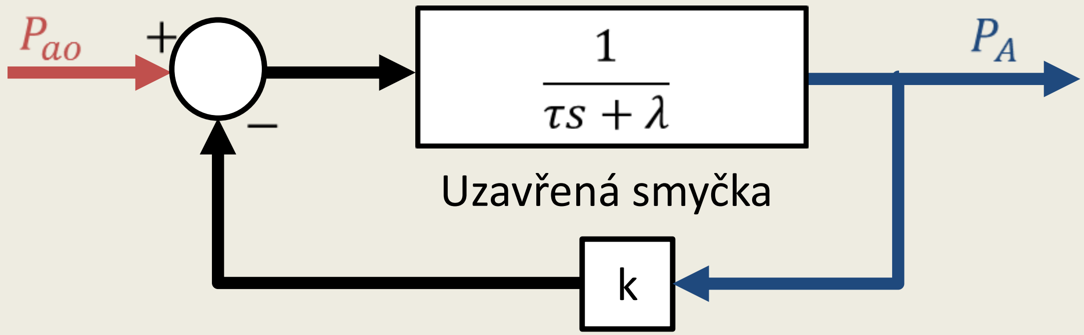
Nebudeme uvažovat setrvačnost: L=0

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

Otevřená smyčka



$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{RCs + \lambda}$$



Uzavřená smyčka

$$RC = \tau$$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{\tau s + \lambda}$$

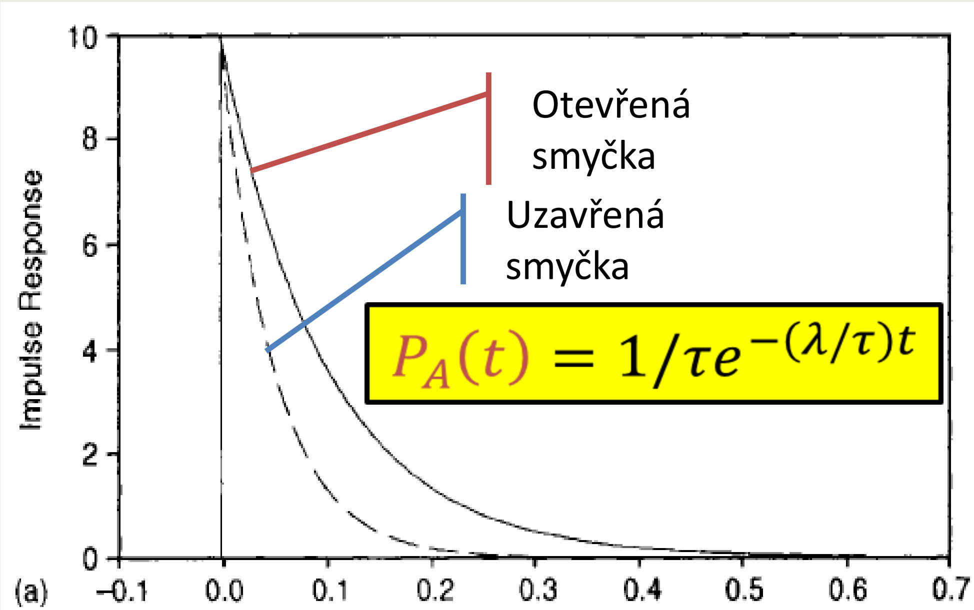
Jednotkový impulz: $\delta(t)$ ⟷ 1

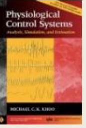
$P_{ao}(s)$=1

$$P_A(s) = \frac{1}{\tau s + \lambda}$$

e^{-at} ⟷ $\frac{1}{s+a}$

$$P_A(s) = \frac{1/\tau}{s + \lambda/\tau} = 1/\tau\left(\frac{1}{s + \lambda/\tau}\right)$$





Přechodové odezva systému prvního řádu na jednotkový skok

Nebudeme uvažovat setrvačnost: L=0

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{RCs + \lambda}$$

$$RC = \tau$$

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{\tau s + \lambda}$$

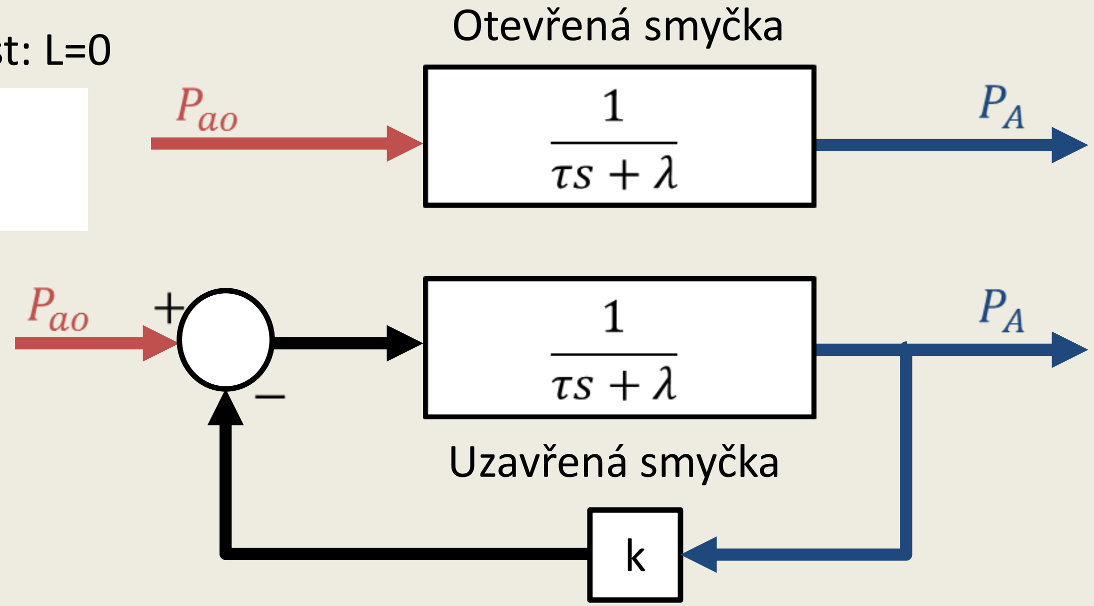
Jednotkový skok: 1 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{s}}$

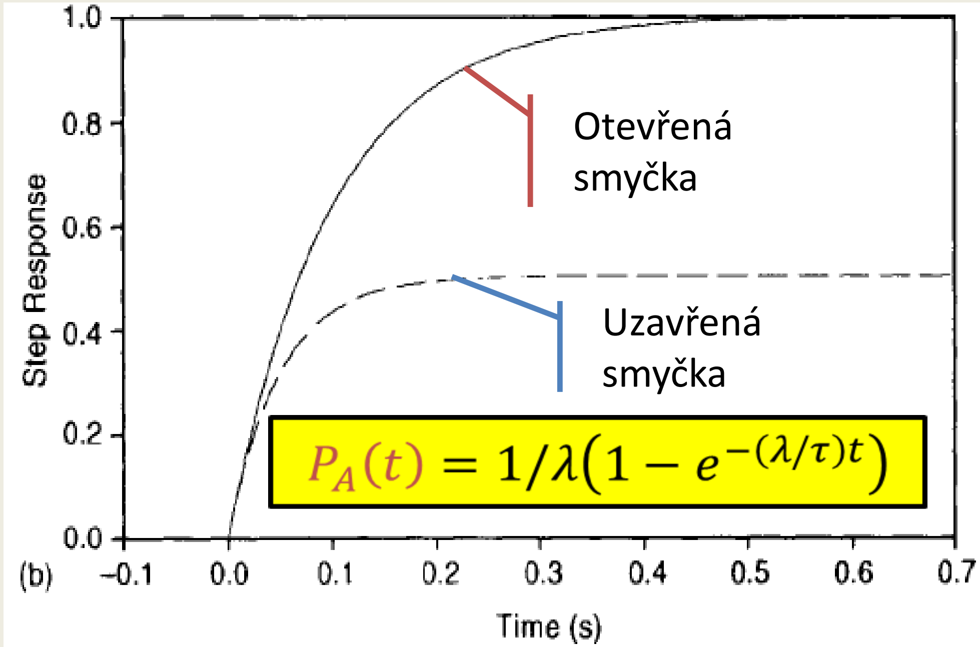
$$P_{ao}(s) = 1/s$$

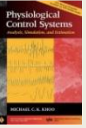
$$P_A(s) = \frac{1}{s(\tau s + \lambda)}$$

$\boxed{1 - e^{-at}} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{a}{s(s+a)}}$

$$P_A(s) = \frac{1/\tau}{s(s + \lambda/\tau)} = 1/\lambda\left(\frac{\lambda/\tau}{s + \lambda/\tau}\right)$$



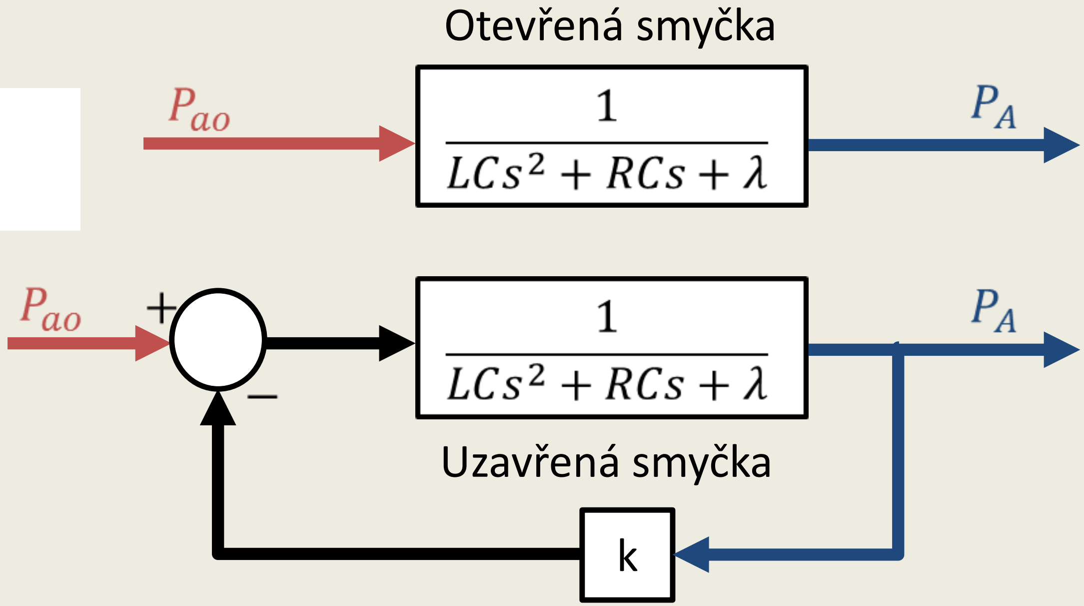


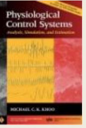


Přechodové odezva systému druhého řádu

Budeme uvažovat setrvačnost:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$





Přechodové odezva systému druhého řádu na jednotkový impuls

Jednotkový impuls: $\delta(t)$ ⟷ 1

Budeme uvažovat setrvačnost:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

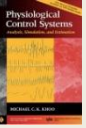
$P_{ao}(s)$=1

$$P_A(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + \lambda/(LC)}$$

4 typy chování

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{\lambda}{LC}}$$



Přechodové odezva systému druhého řádu na jednotkový impuls

Jednotkový impuls: $\delta(t)$ ⟷ 1

$P_{ao}(s)=1$

Budeme uvažovat setrvačnost:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + \lambda/(LC)}$$

4 typy chování

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{\lambda}{LC}}$$

1) Netlumená odezva

L=0.01 cmH_2O s^2/L
C=0.1 L /cm H_2O

Když R=0: Imaginární kořeny

$$\alpha_1 = j\sqrt{\frac{\lambda}{LC}} \qquad \alpha_2 = -j\sqrt{\frac{\lambda}{LC}}$$

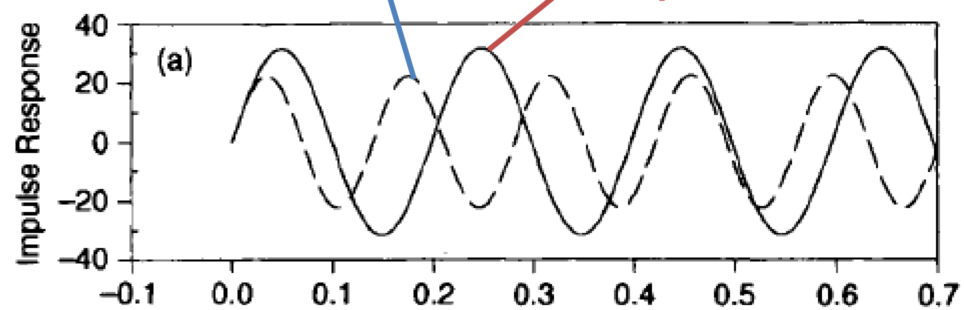
$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + \lambda/(LC)}$$

$\sin \omega t$ ⟷ $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

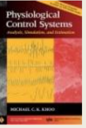
$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + \lambda/(LC)} = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda LC}}\right)\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{LC}}}{s^2 + \frac{\lambda}{LC}}$$

Uzavřená smyčka

Otevřená smyčka



$$P_A(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda LC}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{LC}}\, t\right)$$



Přechodové odezva systému druhého řádu na jednotkový impuls

Jednotkový impuls: $\delta(t)$ ⟷ 1

$P_{ao}(s)=1$

Budeme uvažovat setrvačnost:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + \lambda/(LC)}$$

4 typy chování

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{\lambda}{LC}}$$

2) Tlumená odezva

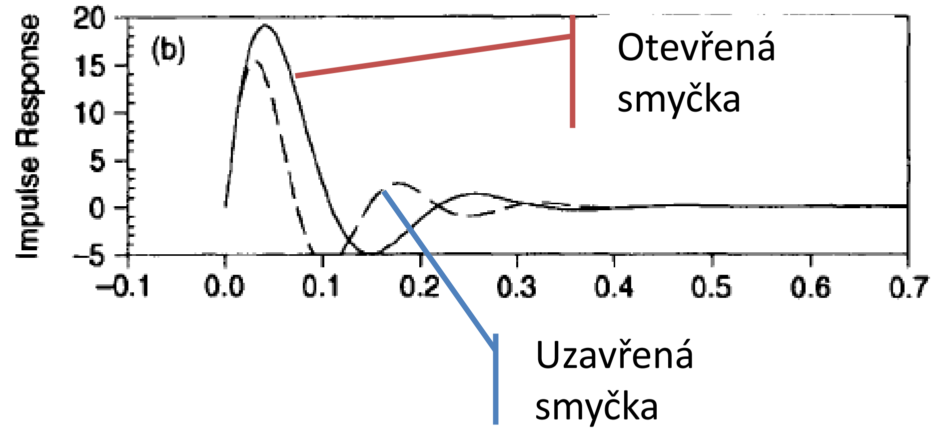
L=0.01 cmH$_2$O s^2/L
C=0.1 L /cm H$_2$O
R=0.5 cm H$_2$O/L

Když $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{\lambda}{LC}$: Komplexně sdružené kořeny

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \gamma^2}$$

$$\gamma = \frac{R}{2L}\sqrt{\frac{4L\lambda}{R^2C} - 1} > \frac{R}{2L} \qquad \alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\gamma$$



$$P_A(t) = \frac{1}{LC\gamma} e^{-(R/2L)t} \sin(\gamma t)$$

Přechodové odezva systému druhého řádu na jednotkový impuls

Budeme uvažovat setrvačnost:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

Jednotkový impuls: $\delta(t)$ ⟷ 1

$P_{ao}(s)$=1

$$P_A(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + \lambda/(LC)}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{\lambda}{LC}}$$

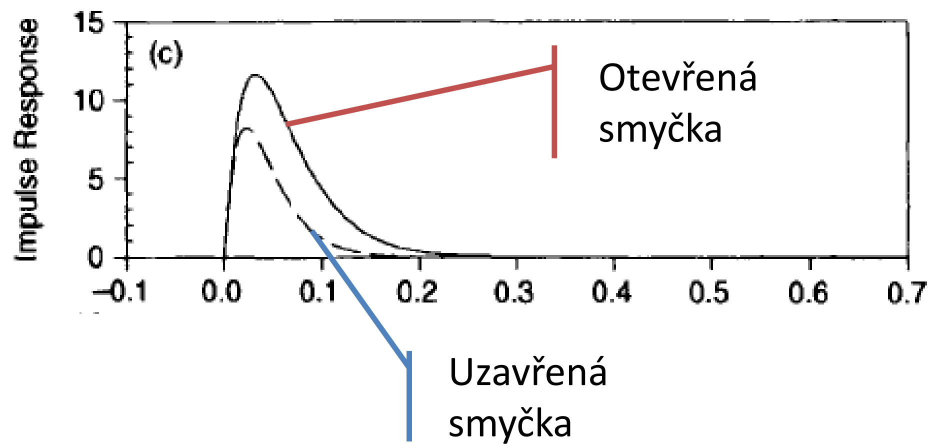
4 typy chování

3) Kriticky tlumená odezva

Když $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{\lambda}{LC}$: dva stejné reálné kořeny

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2}$$



$$P_A(t) = \frac{1}{LC} t e^{-t/\tau_c}$$

where:

$$\tau_c = \frac{2L}{R} = \sqrt{\frac{LC}{\lambda}}$$

Přechodové odezva systému druhého řádu na jednotkový impuls

Jednotkový impuls: $\delta(t)$ ⟷ 1

$P_{ao}(s) = 1$

$$P_A(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$P_A(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + \lambda/(LC)}$$

Budeme uvažovat setrvačnost:

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + \lambda}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{\lambda}{LC}}$$

4 typy chování

4) Přetlumená odezva

L=0.01 cmH_2O s^2/L
C=0.1 L /cm H_2O
R=1 cm H_2O/L

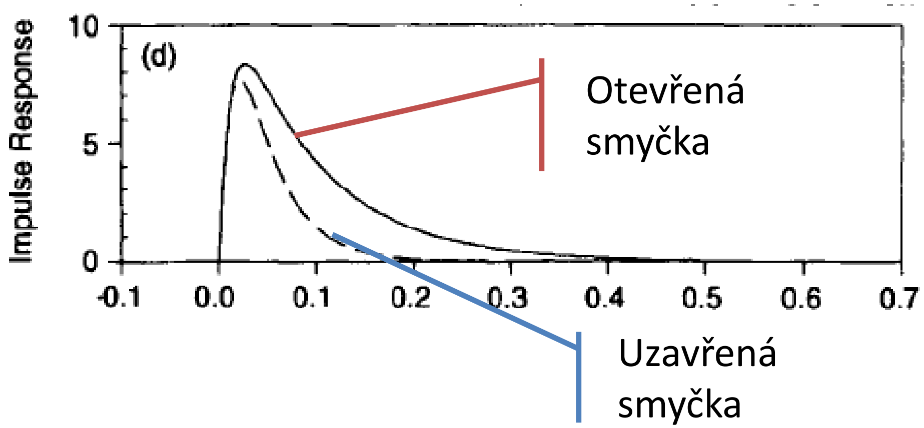
Když $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{\lambda}{LC}$: dva různé reálné kořeny

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L}(1 \pm \mu)$$

kde:

$$\mu = \sqrt{1 - \frac{4L\lambda}{R^2C}}$$

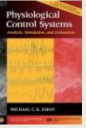
$$P_A(s) = \frac{1/LC}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)(1-\mu)\left(s + \frac{R}{2L}\right)(1+\mu)}$$



$$P_A(t) = \frac{1}{\mu RC}\left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_1}\right)$$

where:

$$\tau_1 = \frac{2L}{R(1-\mu)}, \quad \tau_1 = \frac{2L}{R(1+\mu)}$$



Přechodové odezva systému druhého řádu na jednotkový skok

(Podrobnosti viz kniha)

1) Netlumená odezva

L=0.01 cmH_2O s^2/L
C=0.1 L /cm H_2O

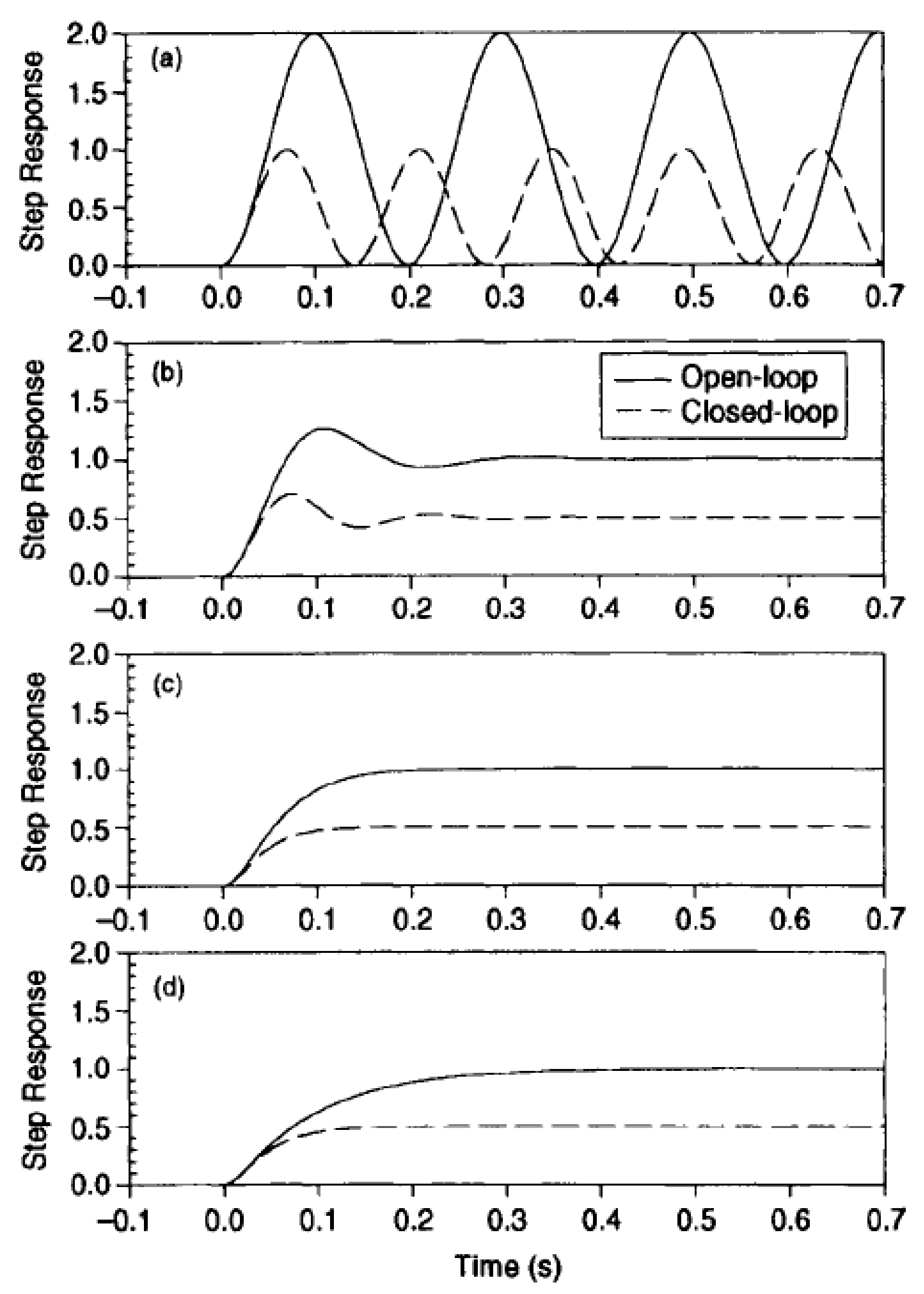
2) Tlumená odezva

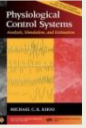
L=0.01 cmH_2O s^2/L
C=0.1 L /cm H_2O
R=0.5 cm H_2O/L

3) Kriticky tlumená odezva

4) Přetlumená odezva

L=0.01 cmH_2O s^2/L
C=0.1 L /cm H_2O
R=1 cm H_2O/L





Zobecnění dynamiky systémů druhého řádu

$$\frac{P_A(s)}{P_{ao}(s) - kP_A(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s) - kY(s)} = \frac{G_{ss}}{LCs^2 + RCs + 1}$$

G_{ss} zesílení ustáleného stavu

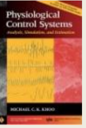
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ω_n rezonanční frekvence

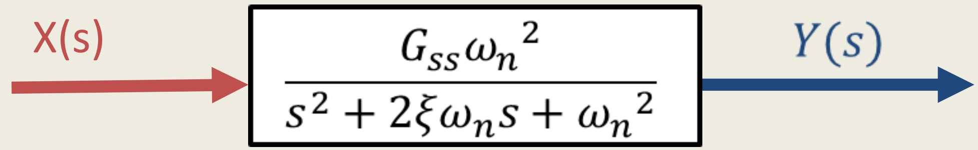
$$\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

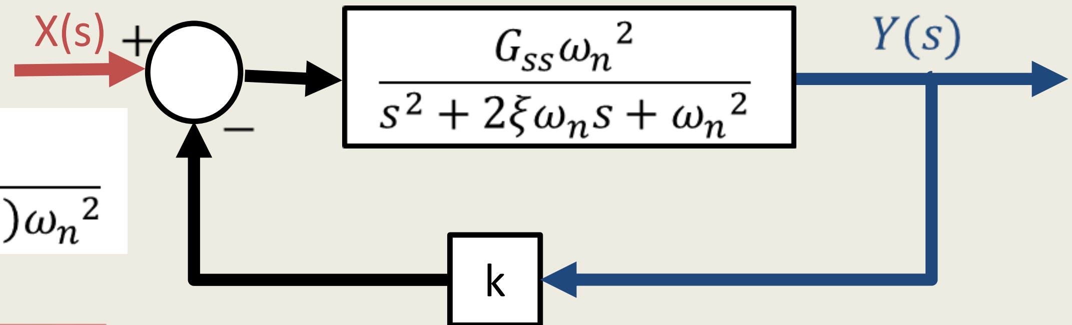
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{ss}{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + (1 + kG_{ss}){\omega_n}^2}$$

$(1 + kG_{ss})$ zpětnovazební smyčka



Zobecnění dynamiky systémů druhého řádu



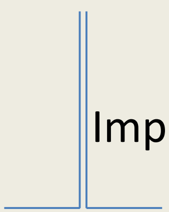


$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{ss}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + (1 + kG_{ss})\omega_n^2}$$

1) Netlumená (undamped) odezva

$$\xi = 0$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{ss}\omega_n^2}{s^2 + (1 + kG_{ss})\omega_n^2}$$



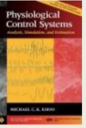
Impuls:

$$h_2(t) = \frac{G_{ss}\omega_n}{\sqrt{(1 + kG_{ss})}} \sin\left(\sqrt{(1 + kG_{ss})}\,\omega_n t\right)$$

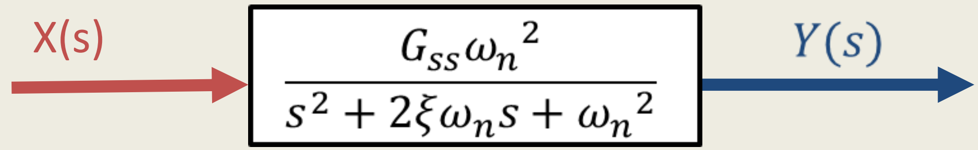
Skok:

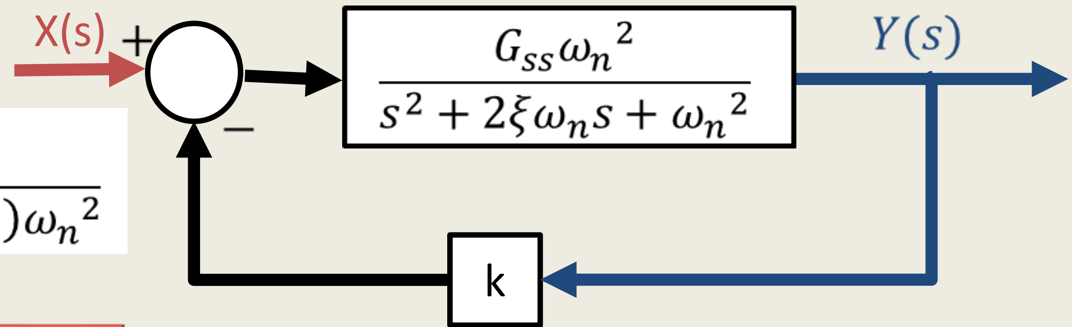
$$g_2(t) = \frac{G_{ss}}{1 + kG_{ss}}\left(1 - \cos\left(\sqrt{(1 + kG_{ss})}\,\omega_n t\right)\right)$$

Oscilace kolem $\frac{G_{ss}}{1+kG_{ss}}$



Zobecnění dynamiky systémů druhého řádu



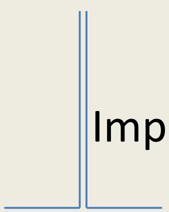


$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{ss}\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + (1 + kG_{ss})\omega_n^{\ 2}}$$

2) Tlumená (underdamped) odezva

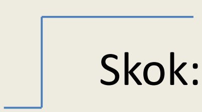
$$\xi^2 < 1 + kG_{ss}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{ss}\omega_n^{\ 2}}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega^2(1 + kG_{ss} - \xi^2)}$$



Impuls:

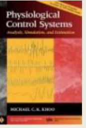
$$h_2(t) = \frac{G_{ss}\omega_n}{\sqrt{1 + kG_{ss} - \xi^2}} e^{-\omega_n \xi t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1 + kG_{ss} - \xi^2}\, t\right)$$



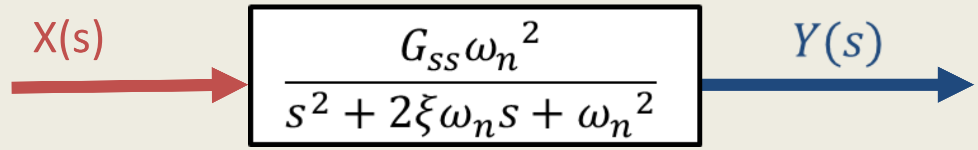
Skok:

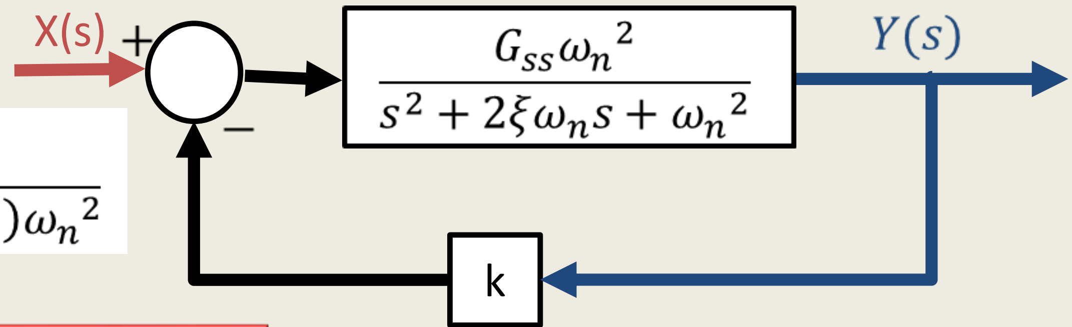
$$g_2(t) = \frac{G_{ss}}{1 + kG_{ss}} \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 + kG_{ss} - \xi^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1 + kG_{ss} - \xi^2}\, t + \theta\right)\right)$$

kde: $\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1 + kG_{ss} - \xi^2}{\xi}}\right)$



Zobecnění dynamiky systémů druhého řádu





$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{ss}\omega_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+(1+kG_{ss})\omega_n{}^2}$$

3)Kriticky tlumená (underdamped) odezva

$$\xi^2 = 1 + kG_{ss}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_{ss}\omega_n{}^2}{(s+\xi\omega_n)^2}$$

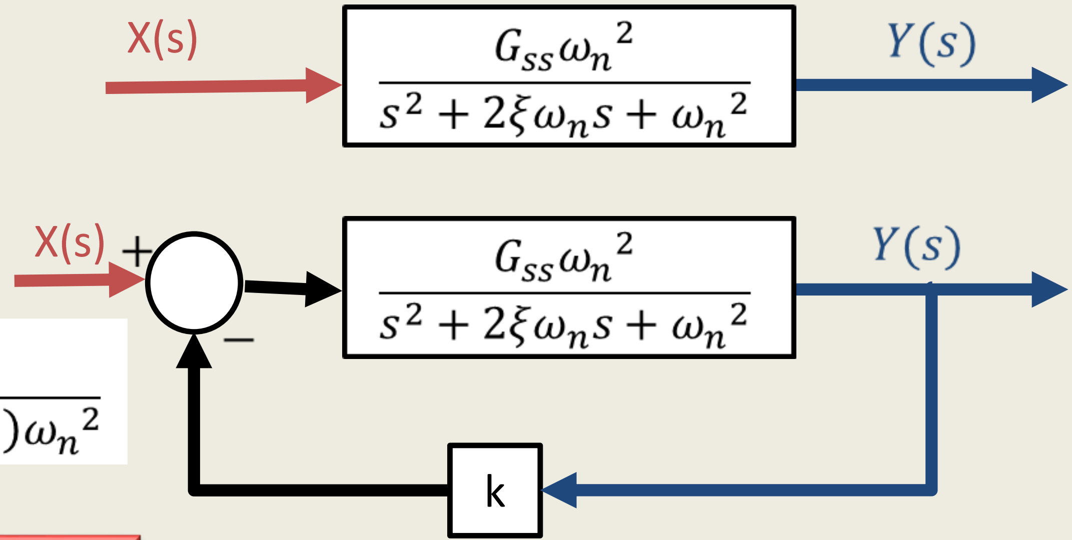
Impuls: $h_2(t) = G_{ss}\omega_n{}^2 t e^{-\omega_n t}$

Skok:

$$g_2(t) = \frac{G_{ss}}{\xi}\left[\frac{1}{\xi} - \left(\frac{1}{\xi}\omega_n\right)e^{-\xi\omega_n t}\right]$$

$$= \frac{G_{ss}}{\sqrt{1+kG_{ss}}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+kG_{ss}}} - \left(\frac{1}{\sqrt{1+kG_{ss}}} + \omega_n t\right)e^{-\xi\omega_n t}\right]$$

Zobecnění dynamiky systémů druhého řádu



$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_{ss}{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+(1+kG_{ss}){\omega_n}^2}$$

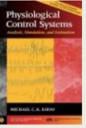
4)Přetlumená (overdamped) odezva

$$\xi^2>1+kG_{ss}$$

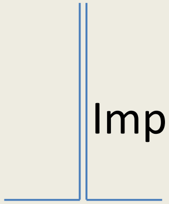
$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_{ss}{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+(1+kG_{ss}){\omega_n}^2}$$

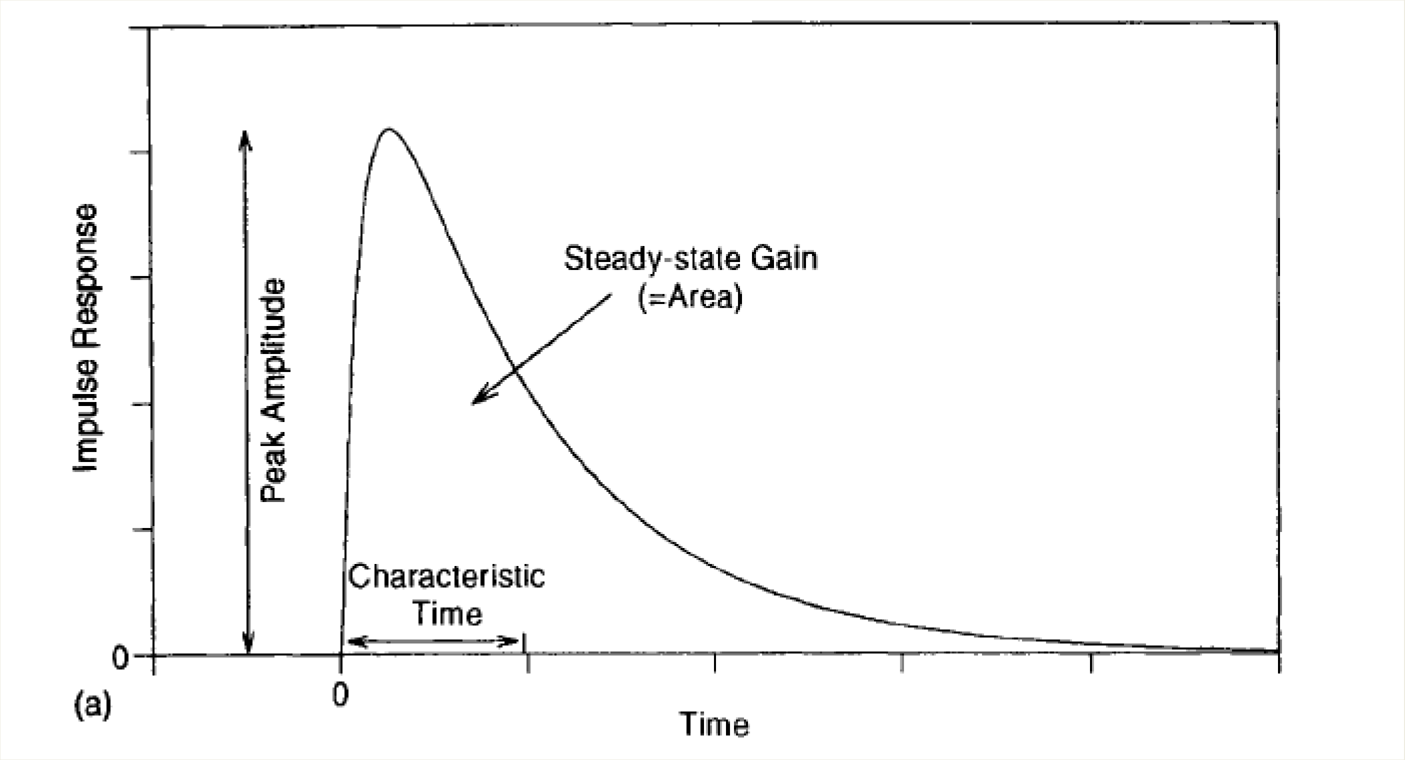
Impuls: $$h_2(t)=\frac{G_{ss}\omega_n}{\sqrt{\xi^2-1-kG_{ss}}}\left(e^{-\omega_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1-kG_{ss}}\right)t}+e^{-\omega_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1-kG_{ss}}\right)t}\right)$$

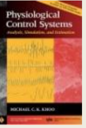
Skok: $$g_2(t)=\frac{G_{ss}}{\sqrt{\xi^2-1-kG_{ss}}}\left(\frac{1-e^{-\omega_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1-kG_{ss}}\right)t}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1-kG_{ss}}}+\frac{1-e^{-\omega_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1-kG_{ss}}\right)t}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1-kG_{ss}}}\right)$$



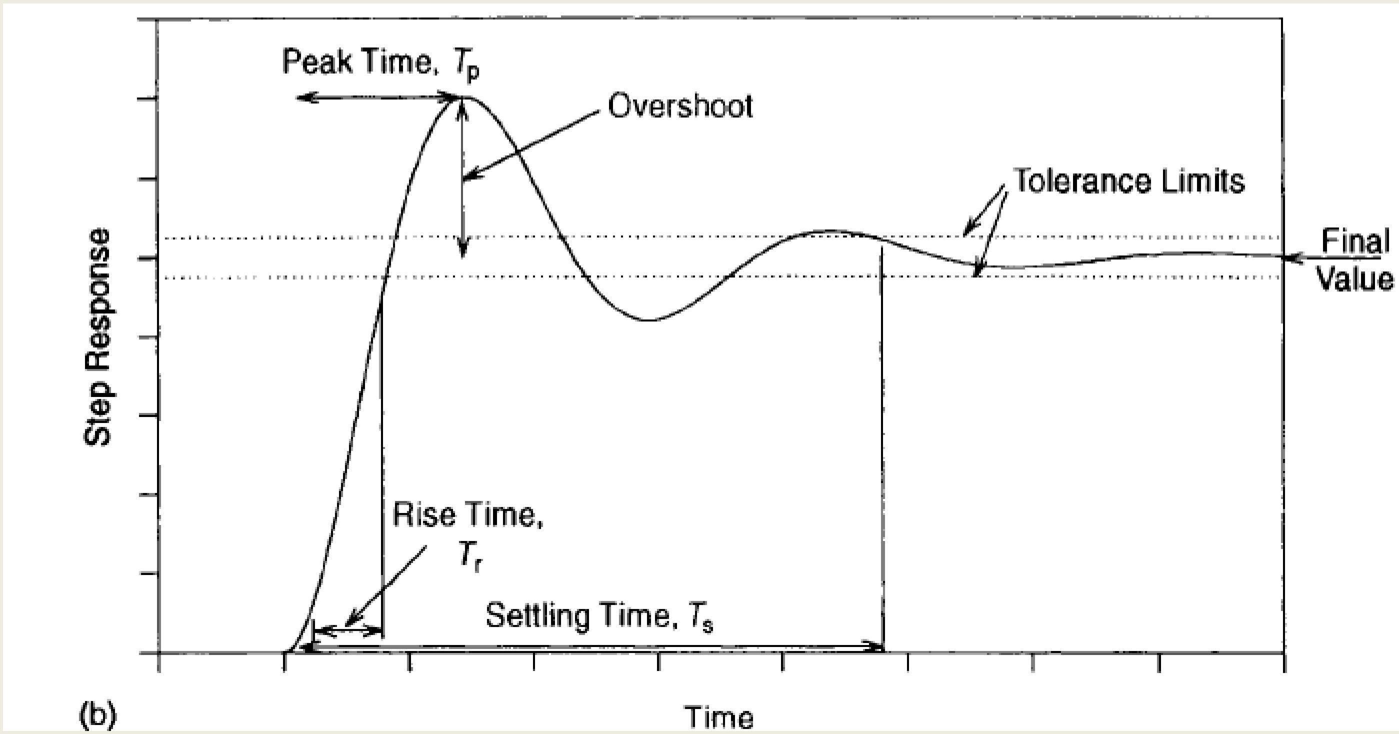
Charakteristika odezvy na impuls

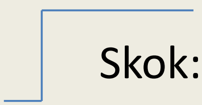
Impuls: 



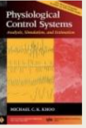


Charakteristika odezvy na skok





Skok:

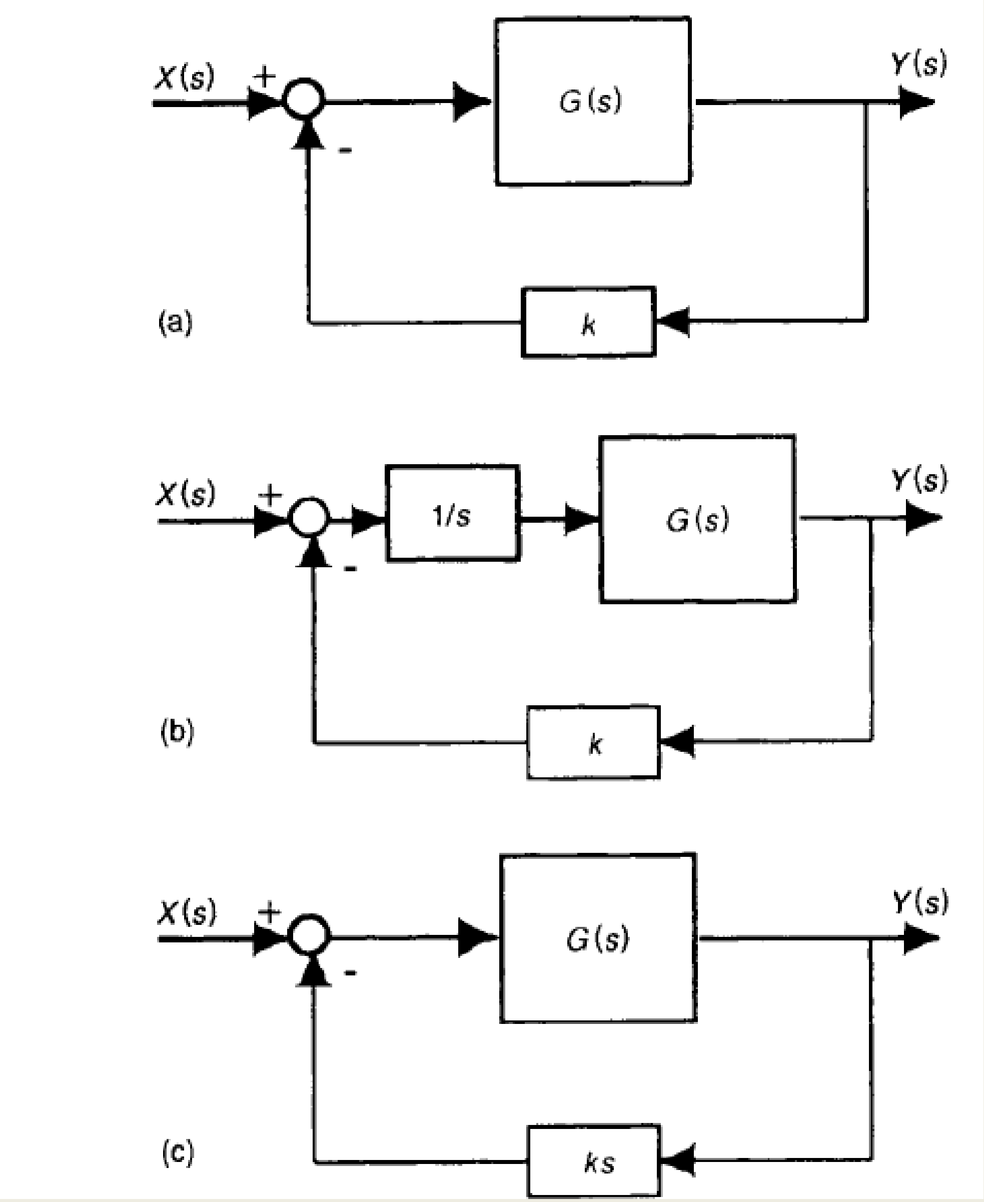


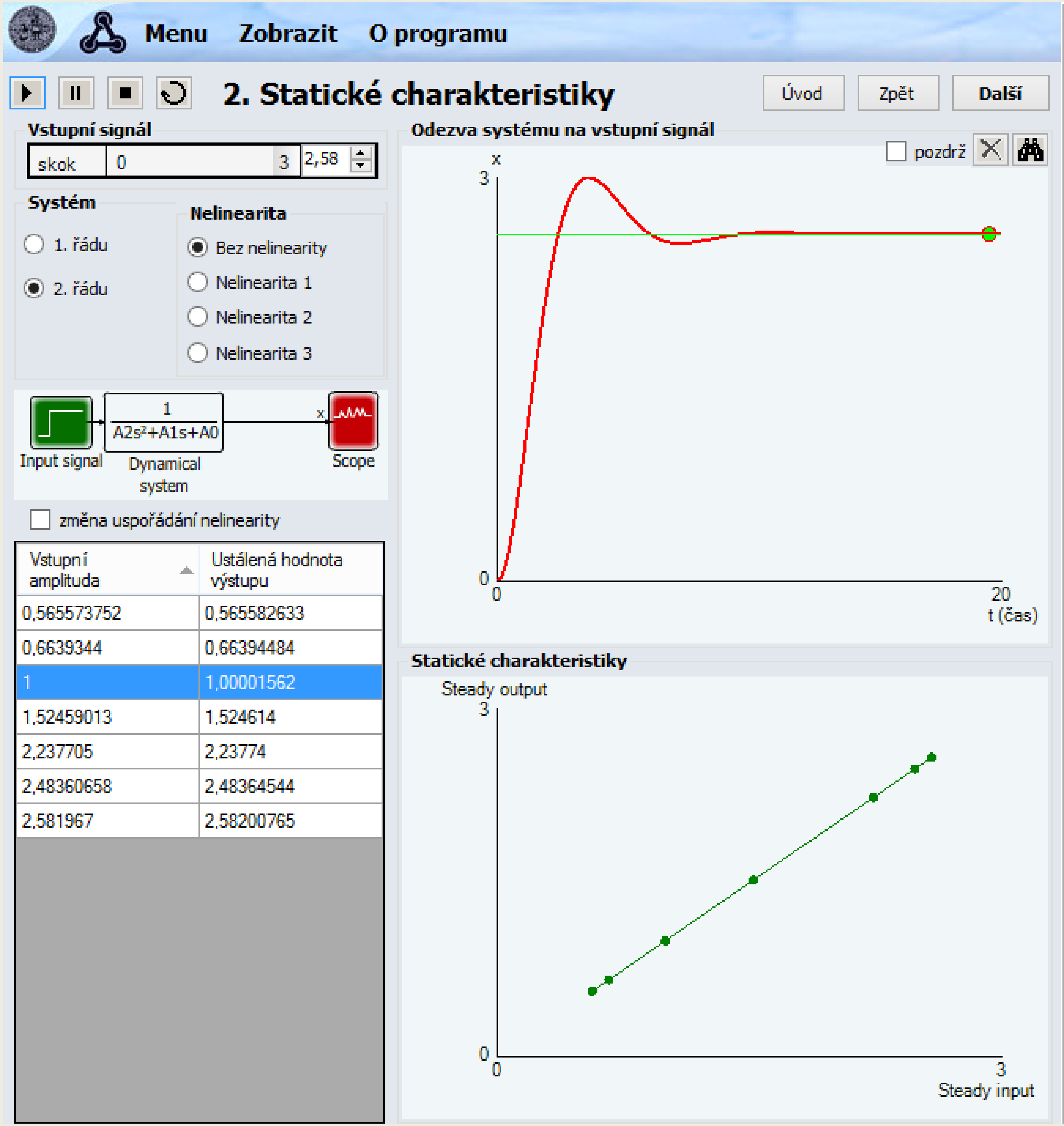
Zpětné vazby –proporcionální, integrační a derivační

1) proporcionální

2) integrační

3) derivační




Menu
Zobrazit
O programu
2. Statické charakteristiky
Úvod
Zpět
Další
Vstupní signál
skok
0
3
2,58
Systém
1. řádu
2. řádu
Nelinearita
Bez nelinearity
Nelinearita 1
Nelinearita 2
Nelinearita 3
1
A2s²+A1s+A0
x
Input signal
Dynamical system
Scope
změna uspořádání nelinearity
Vstupní amplituda
Ustálená hodnota výstupu
0,565573752
0,565582633
0,6639344
0,66394484
1
1,00001562
1,52459013
1,524614
2,237705
2,23774
2,48360658
2,48364544
2,581967
2,58200765
Odezva systému na vstupní signál
pozdrž
x
3
0
0
20
t (čas)
Statické charakteristiky
Steady output
3
0
0
3
Steady input