

## 1. ÚVOD

Současný vědeckotechnický rozvoj je charakterizován prudkým rozvojem technických prostředků, zvláště počítačů, které umožňují provádět řízení nejrozmanitějších systémů, jako jsou např. technologické procesy, složité ekonomické systémy, ale i integrované robotické systémy s umělou inteligencí.

Přitom je velký zájem věnován i tvorbě matematických modelů objektů řízení, neboť tyto modely jsou základem při tvorbě řídicích systémů, při výběru algoritmů řízení apod., a v podstatné míře na nich závisí i kvalita řízení.

Poznamenejme, že matematické modely, tak jako modelování vůbec, nemají základní význam jen v oblasti řízení, kybernetiky, systémového inženýrství nebo v jiných technických vědách, ale dnes již ve všech vědních disciplínách, protože představují nejen vhodnou formu na vyjádření poznatků o zkoumaných objektech a jevech, ale spolu s prostředky výpočetní techniky představují velmi efektivní nástroj k jejich dalšímu a hlubšímu zkoumání.

V předkládaném učebním textu budeme věnovat pozornost způsobům tvorby matematických modelů objektů nebo procesů, využívajících matematickofyzikální analýzy i experimentů. Proces tvorby modelu bychom mohli nazvat modelováním. Dále bude věnována pozornost i metodám ztotožnění modelu s objektem, což bývá obvykle chápáno jako proces identifikace. Identifikace a modelování jsou tedy procesy, které se navzájem prolínají. Jejich podstata a cíl spočívá v následujícím: Na základě apriorních informací o systému, vyděleném na základě zvolené rozlišovací úrovně a smyslu užití modelu přímo na objektu zkoumání, odhadneme pomocí matematickofyzikální analýzy strukturu modelu a vhodně volenými experimenty přímo na tomto systému pak v druhém kroku odhadujeme vhodnými metodami identifikace parametry takto vytvořeného modelu. Je přirozené, že k odhadu parametrů modelu potřebujeme mít k dispozici vhodný testovací signál, kriterium k posouzení kvality vlastní identifikace a s tím úzce související výběr vhodného algoritmu, kterým budeme minimalizovat prostřednictvím parametrů modelu hodnotu kriteriální funkce.

Cílem identifikace a modelování je vytvořit takový model systému, definovaný na objektu, aby chování modelu bylo v jistém smyslu - nejčastěji z hlediska minima kriteriá - stejné jako u systému za stejných provozních podmínek.

Je třeba si uvědomit, že objekt je obklopen prostředím /okolím/, přičemž objekt a okolí jsou v neustálé interakci. Když hovoříme o identifikaci /ztotožnění/ modelu se systémem, potom a priori předpokládáme, že nejsou identické. Jedná se vždy o jistou aproximaci, která transformuje skutečnost do abstraktního světa matematiky.

V procesu identifikace a modelování hraje nemalou úlohu tvořivý intelekt, zkoumající daný systém, což je možno chápat jako součást analýzy identifikovaného systému. Člověk určuje hledisko identifikace, určuje její cíl / k jakému účelu bude modelu použito - zda k simulacím nebo k řízení daného objektu/, rozlišuje podstatné od nepodstatného a vytváří tak první zjednodušenou reprezentaci objektu. Těžko pro tyto úvahy najít nějaký předpis, jak je provádět.

Důležitou úlohu při procesu identifikace sehrává bezesporu samotná identifikace informace, která se o objektu získává na základě jeho pozorování, což se převážně děje měřením, které se kvantifikuje, uchovává a při konkretizaci modelu se známými a vhodnými prostředky a postupy zpracovává.

Tuto informaci často nazýváme empirickou informací, neboť byla získána na základě skutečného pozorování daného konkrétního procesu, na rozdíl od apriorní infer-

mace, kterou je možno charakterizovat jako existující poznatky nahromaděné lidstvem při pozorování celé třídy a příbuzných tříd objektů, do kterých zkoumaný objekt a tedy i systém patří. Tyto poznatky jsou uspořádány v ucelený soubor poznatků a představují bohatší informaci než je možno získat z empirické/experimentální/ informace na tom kterém zkoumaném objektu. Tato informace přitom existuje a priori a má rozhodující význam při odhadu struktury modelu.

Ztotožnění /identifikace/ modelu se systémem definovaném na objektu ve své podstatě představuje kvantitativní problém. Nejčastěji hledáme parametry/jejich hodnoty/ pro již předem vybranou strukturu modelu. V tomto případě mluvíme o parametrické identifikaci, kterou řešíme použitím formálních prostředků, tj. použitím vhodných a osvědčených algoritmů zpracovávajících empirickou informaci algoritmickou formou.

Úspěšnost procesu modelování a identifikace tedy závisí na několika faktorech které spočívají ve vhodném výběru apriorní informace, empirické informace a identifikačním algoritmu, v němž je obsaženo i hodnotící kritérium pro verifikaci modelu se skutečností.

Učební text se věnuje hlavně analytickým a experimentálním metodám identifikace. Oba dva přístupy se často kombinují. Pro experimentální identifikaci jsou důležité typy testovacích signálů, struktury modelů, kritéria shody mezi chováním modelu a objektu a v neposlední řadě i algoritmy pro minimalizaci chyby identifikace mezi modelem a objektem. Dále se dotkneme i problémů, které vznikají při identifikaci reálných systémů. Budou uvedeny některé způsoby jejich řešení.

Autor si je vědom toho, že zde nemohl uvést úplný nebo alespoň vyvážený přehled známých a vhodných identifikačních metod s uvedením vhodnosti či nevhodnosti té které metody pro ten který případ identifikace systému. Ve hře je totiž příliš mnoho faktorů, které nedovolují podat vhodný návod pro zdárné řešení procesu modelování a identifikace v plné šíři. V učebním textu jsou však uvedena jistá doporučení, jak tento nejednoduchý problém po částech řešit.

Naším cílem bude uvést studenta do problematiky a s uvedením další doporučené literatury poskytnout mu vhodné postupy a podněty, jak danou problematiku v konkrétním případě řešit.

Literatury z oblasti identifikace a modelování systémů je celá řada ať už ve formě knižní nebo ve formě příležitostných sborníků ze symposií IFAC a kongresů IFAC. Bohatá je i časopisecká literatura. Dodatek textu je věnován proto přehledu základní i doporučené literatury.

Učební text je určen pro studenty 4.ročníku ASŘ denního studia a pro 5.ročník dálkového studia studijního oboru ASŘ / automatizované systémy řízení v elektrotechnice a jejich projektování/. Poslouží i těm pracovníkům, kteří se zajímají o problematiku tvorby matematických modelů, jejich identifikaci, zkrátka těm, jejichž úkolem je navrhnout, vyprojektovat a realizovat automatické systémy řízení v rozličných sférách národního hospodářství.

Autor bude vděčen za připomínky, které by mohly přispět k dalšímu zkvalitnění předkládaného učebního textu.

#### Poznámky:

Uvedená literatura na konci učebního textu obsahuje 20 titulů "základní" literatury a 22 titulů "doplňkové" literatury. Přirozeně je řada další literatury, která je u autora k dispozici. Záleží na samotné aktivitě studentů a jejich zájmu o hlubší studium této problematiky, která tvoří základní pilíř teorie automatického řízení.

## 2. FILOSOFIE PROCESU IDENTIFIKACE A MODELOVÁNÍ

Identifikací v širším slova smyslu se rozumí proces ztotožňování našich poznatků a vědomostí o zkoumaném objektu se skutečností většinou na základě experimentů. Jedná se tedy o poznávací proces, který si je možno představit jako orientovanou interakci mezi poznávaným objektem /skutečností/ a poznávacím subjektem /pozorovatelem/. Orientovaná interakce vzájemného vztahu subjektu a pozorovatele objektu znamená, že subjekt mimo vlastní výběr objektu volí i hledisko jeho poznávání /rozlišovací úroveň, cíl, pro který identifikaci provádí a k jakému účelu bude modelu použito, technické prostředky apod./.

Výsledkem poznávacího procesu je určité relativní poznání /relativnost je způsobena zvoleným hlediskem, relativní omezeností poznávacích schopností subjektu/ o poznávaném objektu, které poznávající subjekt formuluje do jistých vět, pouček, matematických vztahů apod.

Hlavní problém při vyjadřování představy o poznání tkví v možnosti jejího vyjádření v rámci nějaké vědecké teorie, formulované pomocí vhodných výrazových prostředků /přirozená řeč, soustava znaků apod./.

Při hloubce dnešního poznání jeví již přirozený jazyk jako výrazový prostředek dávno nestačí /slovní rozbor poznání je příliš komplikovaný, nepřehledný a často neúplný/. Vhodný jazyk na vyjádření představy o poznání musí mít jednoduchou a přesnou syntaxi, musí být lehko přizpůsobitelný současné experimentální a výpočetní technice a musí jim poskytnout kvalitativně kvantitativní reprezentaci. Je přirozené, že tyto požadavky může splnit pouze nějaký formální systém.

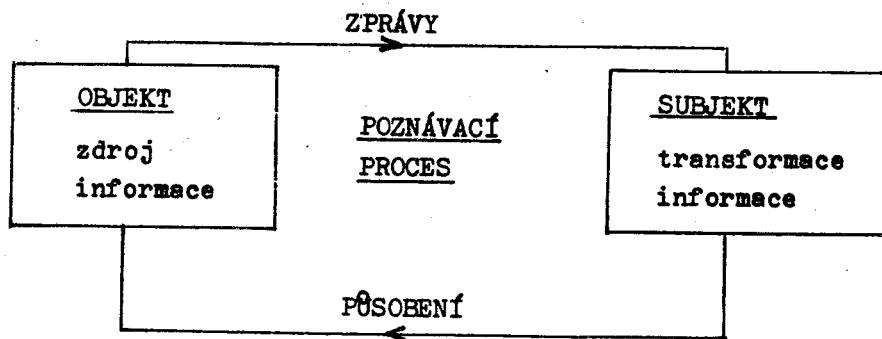
Identifikace prošla postupně etapami vývoje procesu poznání a adekvátně k nim se měnil také obsah jejich úloh. Totéž je možno říci i o procesu modelování. Postupovalo se od nejjednodušších problémů rozpoznávání znaků, vytváření pojmů až po vytváření asociací a analogií za účelem zevšeobecnování. Základní problémy identifikace a modelování, jakož i rozpoznávání znaků, klasifikace teorie znaků, abstrahování, zevšeobecnování, tvorby asociací a analogií bezprostředně souvisí s heuristikou, tj. disciplínou, která se zabývá neformálními metodami tvořivé činnosti.

Interakce mezi systémem definovaném na objektu, resp. jeho reprezentací a poznávajícím subjektem, zprostředkovává neurosmyslová soustava subjektu. Prvý odraz poznávaného objektu je ve vědomí subjektu. Tento obsah vědomí subjektu představuje prvé poznání. Odraz poznávaného objektu ve vědomí subjektu tvoří jeho model, a to tzv. vnitřní konceptuální model objektu /externí model je vytvořený jinde a z jiných prostředků, např. v počítači/.

Vnitřní model je možno vytvořit jen na základě toho, co jsme se o zkoumaném objektu dozvěděli, co se pozorováním zkoumaného objektu odrazilo do našeho vědomí, co jsme si uvědomili apod. Můžeme se tedy na poznávací proces dívat jako na proces získávání informací /odezev/ a zpětného působení subjektu na objekt za účelem dalšího prohloubení a upřesnění vlastního poznání.

Popsanou situaci si můžeme znázornit jednoduchým obrázkem /obr. 2.1./, ve kterém objekt reprezentuje zdroj informací pro subjekt, jenž zpětně působí na objekt a prostřednictvím vstupů a výstupů vytváří vazby s poznávajícím subjektem. Výstupní informace z objektu /vstupní informace subjektu/ přijímá subjekt ve formě zpráv, které se přes nahromaděné zkušenosti subjektu transformují na výstupní signály subjektu /vstupní signály objektu/, kterými subjekt působí na poznávaný objekt.

Prostřednictvím takto vytvořené vazby subjekt dostává neustále informace o



Obr. 2.1 Přenos informací mezi subjektem a objektem

tom, jaký je rozdíl mezi zkoumaným objektem a jeho představou /interním-vnitřním modelem/ o něm. Neustálým aplikováním přijímání a zpracování zpráv, zpětným působením na objekt, subjekt postupně ztotožňuje nebo-li identifikuje svoje představy a poznatky o objektu.

Takovýmto způsobem by / i když ve zjednodušené podobě/ prováděl identifikaci člověk s cílem vytvořit si vnitřní model např. vnějšího prostředí, kterým je obklopen.

Kdybychom chtěli provést jakýsi formální popis procesu identifikace, provedli bychom to následujícím algoritmem: Objekt v čase  $t_0$  vyšle zprávu s obsahem informace  $I_1$ . Subjekt v čase  $t_1$  přijme / ovšem za předpokladu, že je schopen takovou zprávu přijmout/ zprávu s obsahem  $I_1$ . Přijetí-uvědomění si této informace znamená, že identifikující subjekt poznal jistou část vlastností objektu. Po přímtnutí přijaté informace zpětně na objekt, což subjekt vykoná v dalším časovém okamžiku  $t_2$  a vyslání další zprávy objektem znamená, že v čase  $t_3$  subjekt přijme už zprávu s obsahem informace  $I_2$ . Znamená to, že subjekt stále více chápe a tím dokonaleji poznává vlastnosti objektu, neboť k přijaté informaci  $I_1$  se informace  $I_2$  připočítává. Takto se proces opakuje až do času  $t_k$ , kdy subjekt přijme zprávu s původním obsahem informace  $I_1$ , kterou zdroj-objekt vysílá v okamžiku  $t_0$ , a která se nemění. Protože informace  $I_1$ , vysílaná zdrojem se nemění, na straně příjmu informace rostla, musela se v procesu poznání měnit relativní omezenost poznávacích schopností subjektu. Poznávací schopnost subjektu rostla díky růstu informace, která opět rostla díky paměti subjektu.

Na základě zapamatování si informací získaných v minulosti se bude redundantnost přijímaných zpráv z vyšetřovaného objektu vzhledem na subjekt postupně snižovat. To ale znamená, že obsah informace v přijímaných zprávách se bude zvětšovat, a tak nastává postupná kompresie zpráv. Pochopitelně, že relativní omezenost subjektu dovoluje přibližovat se k minimální redundanci a k maximální kompresi pouze asymptoticky jako k nikdy nedosažitelným hodnotám.

Z uvedeného vyplývá, že schema identifikace uvedené na obr. 2.4. je jistou obdobou spojovacího kanálu, jak jej známe z teorie informace.

Vytvoření modelu zkoumaného objektu pouze ve formě jisté představy, tzv. interního modelu subjektu, je pro vědu a praxi málo užitečný. Proto subjekt musí dosažené závěry formulovat a vyjádřit v některém jazyku čili vytvořit tzv. externí model zkoumaného objektu.

Analýzou procesu identifikace dospíváme k tomu, že jeho základní technologií jsou experiment a známé způsoby odvozování tj. indukce a dedukce. Experiment

konkrétní technologií. Zahrnuje přístroje na měření, převod veličin apod., tj. všechny ty prostředky, které umožňují transformaci v objektě probíhajícího jevu do viditelných relací nebo kvantit /např. výchylky přístrojů, číselný záznam apod./.Indukce je proces intuitivního dospívání k všeobecným závěrům na základě částečných pozorování. Dedukce je proces logického vyvozování závěrů z jisté množiny tvrzení. Je tedy metodou logickou a jejím základním nástrojem jsou logické systémy. Identifikace však nezahrnuje přístup k vlastnímu předmětu identifikace, tj. zkoumanému objektu. Identifikace poskytuje návod, jak proces zkoumání uskutečňovat, jak jej provádět. Nemluví o tom, co na daném objektu zkoumat, jak jej chápat.

Definovat systém na objektu z hlediska daného účelu a vytvořit vyhovující model jsou základní úlohy identifikace a modelování.

## 2.1 Kontrolní otázky a úkoly

1. Co se rozumí pod pojmem modelování?
2. Co je to identifikace?
3. Jaké jsou cíle identifikace a modelování?
4. Jaké znáte druhy informace?
5. Jak se liší parametrická identifikace od identifikace jako takové?
6. Objasněte filosofii procesu identifikace a modelování.
7. Charakterizujte identifikaci jako poznávací proces zprostředkovaný přenosem informace mezi objektem a subjektem.
8. Vysvětlete pojmy indukce a dedukce.
9. Zmýšlejte se nad vlastním postupem, který se ve Vás odehrává, když si vytváříte svůj vnitřní model světa, vnějšího okolí apod.

### Poznámky :

Problémy identifikace a modelování úzce souvisejí s problémy teorie poznání, s tzv. poznatelností světa. Kapitola je zaměřena na obecnější pojetí pojmů identifikace a modelování. Bylo použito lit. [1].

### 3. NĚKTERÉ ZÁKLADNÍ POJMY A PROBLÉMY IDENTIFIKACE A MODELOVÁNÍ

#### 3.1 Definování systému na objektu

Provedeme-li rozklad zkoumaného objektu na soubor složek  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vzájemně vázaných a reprezentujících objekt, pak soubor složek

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\} \quad (3.1)$$

nazýváme složkovou charakteristikou objektu.

Označíme-li dále symboly  $r_{ij}$  vzájemnou souvislost složek  $a_i$  a  $a_j$ , tedy  $r_{ij} = r(a_i, a_j)$  jako např. závislost vstupních veličin složky  $a_j$  na výstupních veličinách složky  $a_i$ , potom soubor všech uvažovaných závislostí

$$R = \{r_{ij}\} \quad (3.2)$$

nazýváme relační charakteristikou objektu, a dále každý soubor

$$S = \{A, R\} \quad (3.3)$$

nazýváme systémem a příslušný rozklad objektu představuje definování systému na objektu. Soubor složek systému  $A$  představuje soubor uvažovaných vlastností nebo veličin zkoumaného objektu.

Jako vstup definujeme tu množinu vazeb nebo proměnných, prostřednictvím kterých se systém ovlivňuje, tj. prostřednictvím kterých okolí působí na systém.

Jako výstup systému definujeme množinu vazeb nebo proměnných, prostřednictvím kterých systém projevuje svoje působení na venek, a tak ovlivňuje okolí.

Podnětem nazýváme stav veličin množiny vstupních proměnných v daném časovém okamžiku.

Odezvou nazýváme stav veličin množiny výstupních proměnných, způsobených určitým podnětem.

Abychom mohli definovat systém /tj. matematické vztahy/, který reprezentuje reálný uvažovaný jev nebo objekt, je zapotřebí:

- provést výběr vlastností - atributů jevů  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pro pozorování,
- specifikovat /pomocí experimentu nebo použitím předpokladů/ hodnoty atributů, tj. získat množiny hodnot atributů  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,
- označit kombinace hodnot atributů pozorované v každém experimentu,
- shromáždit kombinace ze všech vykonaných experimentů, abychom mohli zkoumaný jev reprezentovat jeho systémem.

Toto vyjádření matematicky znamená, že systém  $S$  je relací definovanou na množinách  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , tj., že systém  $S$  je podmnožinou kartézského součinu množin  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , nebo-li

$$S \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \quad (3.4)$$

Ze vztahu (3.4) je vidět, že systém je vlastně soubor uspořádaných  $n$ -tic z množin  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Systém je třeba dále specifikovat. Nejčastěji se tato specifikace zadává ve tvaru vstup-výstup numerickou rovnicí. Jiné specifikace jsou např. numerické pro-

..., algoritmy apod.

### 3.2 Stav systému

Definujeme-li systém S pomocí dvou složek objektu a to vstupu U a výstupu Y, potom píšeme

$$S \subset U \times Y \quad (3.5)$$

Protože S je obecně relací, může být ke každému vstupu víc výstupů. Došlo by v takovém případě k porušení kauzality. Zavedením pojmu stav systému se tomuto porušení zabránuje. Účelem stavu systému je transformovat relaci S do funkce

$$S_z : Z \times U \rightarrow Y \quad (3.6)$$

tak, že pro každé z a u, kdy  $S_z(z, u) = y$ , potom (u, y) jsou dvojice v S.

### 3.3 Struktura systému

Vyjděme z popisu systému nějakou množinou vztahů

$$R = \{ R_1, R_2, \dots, R_n \} \quad (3.7)$$

Vztah R se určuje induktivním způsobem. Jeho určení si můžeme představit např. tak, že jej vybereme zadáním nějakého všeobecného vztahu a konkrétními hodnotami jeho neurčených složek, tedy

$$R = \{ F, \xi \} \quad (3.8)$$

kde F je struktura a  $\xi$  je množina neurčených složek vybraného vztahu. Pro lineární systém prvního řádu bude R tvaru

$$R = \{ 1/p, +, \dots, T_1, K \} \quad (3.9)$$

kde  $1/p, +, \dots$  jsou operace integrování, sčítání a násobení,  $T_1$  a K jsou parametry systému /časová konstanta a zesílení/. Struktura systému potom bude

$$F = \{ 1/p, +, \dots \} \quad \text{a složky} \quad \xi = \{ T_1, K \} \quad (3.10)$$

Struktura systému, zvláště problém jejího výběru, má pro identifikaci prvořadý význam. Často se určení struktury systému zaměňuje nebo spojuje s určením vztahu popisující systém. Ve skutečnosti se ale jedná o dvě úlohy, resp. dvě etapy identifikace. Prvou z nich tvoří výběr struktury systému F a druhou porovnání chování systému se vztahy patřícími do množiny F, což umožňuje nalezení optimálních hodnot složek vztahů  $\xi$ . Druhou etapu identifikace je možno vykonávat systematicky avšak za podmínky, že jsme dokončili prvou etapu, tj. výběr struktury, kterou však neumíme vykonat jinak než heuristicky.

### 3.4 Chování systému

Chováním systému rozumíme způsob, jak systém reaguje na podněty. Reakce systému na podněty závisí na vlastnostech systému, nebo-li od způsobu přechodu systému z jednoho stavu do stavu následujícího a od způsobu zobrazení stavu systému na výstup systému. Někdy hovoříme, že chování systému udává operátor transformace systému, pod kterým budeme rozumět soubor pravidel, podle kterých se každému vstupu systému a stavu systému přiřazuje výstup systému.

### 3.5 Dynamický systém

Formální definice dynamického systému zní

$$S = (T, X, U, \Omega, Y, \Gamma, \varphi, \gamma) \quad (3.11)$$

- kde
- $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  - uspořádaná množina časových okamžiků
  - $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  - množina stavů systému
  - $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}$  - množina vstupních hodnot
  - $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$  - množina výstupních hodnot
  - $\Omega = \{\omega : T \rightarrow U\}$  - neprázdná množina přípustných vstupních funkcí
  - $\Gamma = \{\gamma : T \rightarrow Y\}$  - množina výstupních funkcí
  - $\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$  - vnitřní zobrazení určující přechodovou funkci systému

mu  $x(t) = \varphi(t; \tau; x, \omega) \in X$ , tedy stav, který nastane v čase  $t \in T$  z počátečního stavu  $x = x(\tau) \in X$  pro  $\tau \in T$  při působení  $\omega \in \Omega$ ,

$\gamma : T \times X \rightarrow Y$  - výstupní zobrazení definující výstup systému

$$y(t) = \gamma[t, \tau, x(t)]$$

Přechodová funkce stavů  $\varphi$  má tyto vlastnosti:

- je definována pro všechna  $t \geq \tau$  ale nemusí být definována pro  $t < \tau$ ,
- platí  $\varphi(t; t, x, \omega) = x$  pro všechna  $t \in T$ , pro všechna  $x \in X$  a pro všechna  $\omega \in \Omega$ ,
- má vlastnosti pologrupy, tj. pro libovolné  $t_1 < t_2 < t_3$  bude  $\varphi(t_3; t_1, x, \omega) = \varphi[t_3; t_2, \varphi(t_2; t_1, x, \omega), \omega]$  pro všechna  $x \in X$  a pro všechna  $\omega \in \Omega$ ,
- splňuje následující: jestliže  $\omega, \omega' \in \Omega$  a  $\omega(\tau, t) = \omega'(\tau, t)$ , potom  $\varphi(t; \tau, x, \omega) = \varphi(t; \tau, x, \omega')$ .

Z této obecné definice dynamického systému můžeme odvodit celou řadu specifických dynamických systémů.

Dynamický systém je stacionární tehdy a jen tehdy, když

- $T$  je aditivní grupa (ve smyslu aditivnosti reálných čísel),
- $\Omega$  je uzavřená množina vzhledem na operátor posunutí z  $\tau: \omega \rightarrow \omega'$  definovaného vztahem  $\omega'(t) = \omega(t + \tau)$  pro všechna  $\tau, t \in T$ ,
- zobrazení  $\varphi(t; \tau, x, \omega) = \varphi(t + s; \tau + s, x, \omega)$  pro všechna  $s \in T$ ,
- zobrazení  $\gamma(t; \dots)$  :  $X \rightarrow Y$  je nezávislé na čase  $t$ .

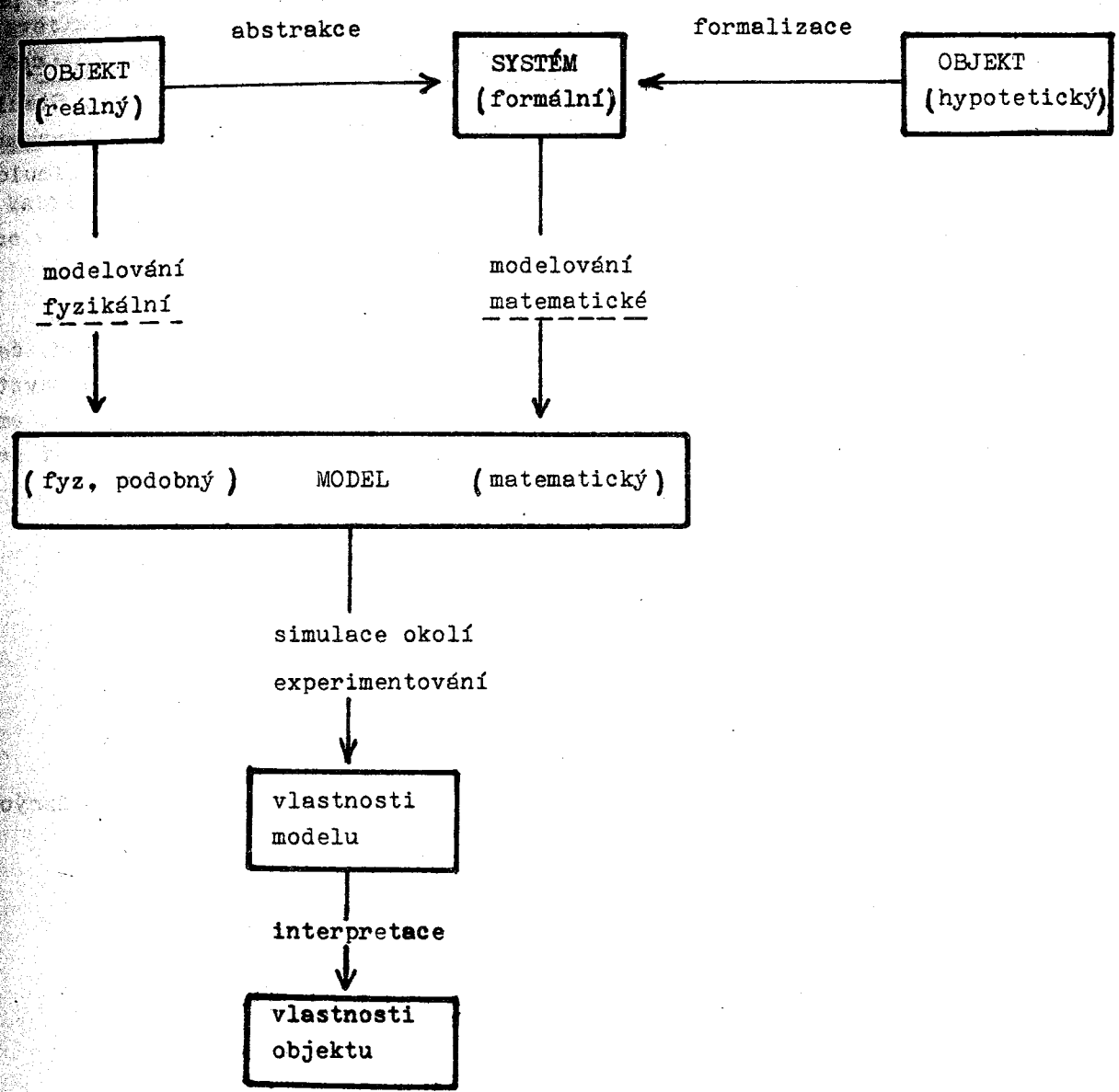
Dynamický systém  $S$  je spojitý v čase tehdy a jen tehdy, když  $T$  je množina reálných čísel.

Dynamický systém je diskretní v čase tehdy a jen tehdy, když  $T$  je množina celých čísel.

Dynamický systém  $S$  je konečné dimenze tehdy a jen tehdy, když  $X$  je konečný lineární prostor, přičemž  $\dim S = \dim x_s$ ,



Dynamický systém S je konečný tehdy a jen tehdy, když X, U a Y jsou konečné  
 a mimo to je systém stacionární a diskretní v čase.  
 Dynamický systém S je lineární tehdy a jen tehdy, když  
 $X, \Omega, Y$  a  $\Gamma$  jsou vektorové prostory nad libovolně zadaným polem K,  
 zobrazení  $\psi(t; \tau, \dots) : X \times \Omega \rightarrow X$  je K - lineární pro všechna t a  $\tau$ ,  
 zobrazení  $\gamma(t, \dots) : X \rightarrow Y$  je K - lineární pro všechna t.  
 Tak bychom mohli ve výčtu systémů pokračovat dále. Zaměříme však nyní naši  
 pozornost na souvislost mezi pojmy objekt - systém a model, která je znázorněna  
 na obr. 3.1



Obr. 3.1 Schema souvislosti pojmů objekt, systém, model

Modelování je proces poznávání struktury, principů chování jistého objektu pomocí zobrazení zkoumaného objektu jiným prostředkem, umožňujícím napodobit některé jeho vlastnosti důležité z hlediska účelu jeho poznání.

Model je hmotný objekt (zařízení), které fyzikálně věrně zobrazuje zkoumaný objekt (fyzikálně podobný model) nebo reálně zobrazuje (realizuje) systém definovaný na zkoumaném nebo hypotetickém objektu nebo formální systém popisující

vlastnosti objektu. Simulace představuje modelování systémů abstraktními systémy znaků, číslic, symbolů, systémů výroků apod. za účelem ulehčení jejich zkoumání cestou experimentování s takto vytvořenými modely, zejména použitím počítačů. Na otázku, jaké jsou přednosti simulace, si můžeme odpovědět takto:

- simulace umožňuje zkoumat zpravidla víc proměnných, než by bylo možné na zkoumaném objektu,
- náklady na simulaci jsou řádově nižší než při experimentování na zkoumaném objektu,
- čas potřebný na zkoumání rozličných situací systému simulací může být mnohokrát kratší než čas, který by byl potřebný na zkoumání té samé simulace přímo na zkoumaném objektu,
- simulace dovoluje experimentovat i za podmínek, které reálně neexistují.

Simulace je limitována kvalitou modelu a použitou výpočetní technikou. Simulace velmi často využívá heuristický přístup, který je velmi účelný při výběru simulačních testů a podmínek zkoumání systému. Logický výběr podmínek pro simulování složitějších systémů způsobuje značné potíže.

### 3.6 Základní problémy identifikace

Již jsme uvedli, že identifikací objektu budeme rozumět analytickou, častěji však experimentální a vyhodnocovací činnost, zaměřenou na definování systému (modelu), nebo upřesnění již definovaného systému zkoumaného objektu, přičemž experimenty se konají přímo na zkoumaném objektu. Jako každý experimentální proces má i identifikace tyto základní problémy:

A - metodické

B - přístrojové

K základním metodickým problémům patří:

klasifikace

- a - objektů (procesů) z hlediska identifikace,
- b - identifikačních metod z hlediska jejich aplikovatelnosti

a dále vytváření identifikačních metod pro:

identifikaci příznaků objektu pro jeho zařazení,  
definování, resp. specifikování už definovaných systémů (modelů) různých objektů,

K základním přístrojovým problémům patří:

- a - plánování experimentů, kam zahrnujeme
  - volbu a generování testovacích signálů,
  - určení intervalů vzorkování a kvantování signálů,
  - volbu optimálního počtu úrovní a experimentálních bodů,
  - vymezení prostoru experimentování a platnosti modelu,
  - vypracování programu experimentů,
- b - metody prvotního a operativního zpracování údajů, kam patří:
  - filtrace údajů,
  - korekce údajů,
  - komprese údajů apod.
- c - vyhodnocení adekvátnosti (identickosti) definovaného systému s modelem.

Dále sem přirozeně patří výběr vhodných přístrojů, kterými bude prováděn sběr a přenos, záznam a zpracování údajů, citlivost, přesnost a spolehlivost přístrojů, použití toho kterého číslíkového výpočetního systému. apod.

stény  
mání  
ú.  
zkou-  
a ob-  
no-  
ímo  
ace  
mu-  
vání  
tě-  
mu  
ex-  
ces

otázky a úkoly

1. Jaké definovat systém na objektu? Čím je charakterizován?

2. Charakterizujte pojmy vstup, výstup, podnět, odezva.

3. Popište stav a struktura systému?

4. Co rozumíte pod pojmem chování systému?

5. Jaké definován dynamický systém?

6. Jaké typy dynamických systémů znáte?

7. Jak závisí pojmy objekt, systém, model mezi sebou?

8. Jaké pojmy modelování, model, simulace.

9. Na jaké spočívají základní problémy identifikace a modelování?

V kapitole jsou přirozeně uvedeny jen některé základní pojmy a problémy identifikace a modelování. Při psaní této kapitoly bylo použito lit. [1].

#### 4. TESTOVACÍ SIGNÁLY

Velmi vážnou otázkou při identifikaci je vymezení podmínek, za kterých bude získaný model platit nebo jinak řečeno, co vymezuje oblast jeho platnosti. Po oblastí platnosti modelu budeme rozumět takovou oblast, která bude ohraničená rozsahem podmínek, při jejichž splnění bude model dostatečně adekvátní, t.j. svojí přesností bude vhodně aproximovat vlastnosti procesu, soustavy.

S tímto problémem právě velmi úzce souvisí druhy a vlastnosti testovacích signálů. Tyto signály se také jinak nazývají jako signály vstupní, budící apod. Jsou to ony, které vymezují oblast platnosti modelu a v nemalé míře ovlivňují volbu kritéria identifikace / shody, totožnosti se / , algoritmu pro nastavování / odhad / parametrů, stručně řečeno metodu identifikace s jejími praktickými problémy.

Vlastnosti testovacích signálů většinou oceňujeme podle jejich nejvýznamnějších charakteristik jako časových, frekvenčních, informačních, pravděpodobnostních a dalších.

Z hlediska identifikace rozlišujeme tyto třídy testovacích signálů:

- deterministické, jejichž průběhy v čase jsou známými funkcemi času, což značí, že hodnoty takovýchto signálů se mohou určit pro kterýkoliv časový okamžik. Patří sem sinusové, trojúhelníkové, lichoběžníkové signály, jednotkové skoky a další deterministické signály,
- náhodné, jejichž průběhy v čase jsou neznámé nebo náhodné funkce času. Není je tedy možné popsat nějakou funkcí času. Charakterizují se pravděpodobnostními charakteristikami. Patří sem různé šумы / bílý, barevný /,
- pseudonáhodné, u kterých průběh v čase je známý, má charakter náhodného průběhu s periodou, která je nastavitelná.

Jemnější klasifikace testovacích signálů obsahuje deterministické signály aperiodické, periodické, náhodné signály stacionární ergodické, neergodické, pseudonáhodné signály dvojhladinové / dvojúrovňové / a vícehladinové / víceúrovňové /.

##### 4.1 Klasifikace testovacích signálů

V tabulkách 4.1, 4.2, 4.3 a 4.4 je uvedena klasifikace testovacích signálů s uvedením jejich časových průběhů, časových funkcí, obrazů ve Fourierově transformaci, spekter / rozkladů do Fourierovy řady / , autokorelačních funkcí a spektrálních výkonových hustot. V literatuře jiný název: výkonová spektrální hustota.

V tabulce 4.1 jsou uvedeny aperiodické deterministické testovací signály. Pro aperiodický signál  $f(t)$  s konečnou energií na intervalu  $-\infty < t < \infty$ , pro který platí


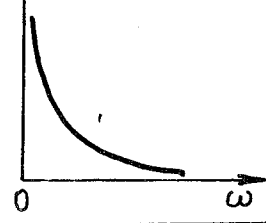
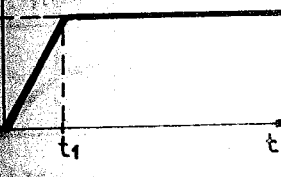
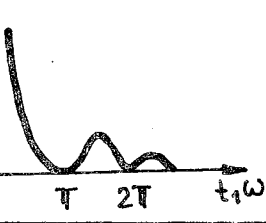
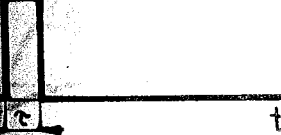
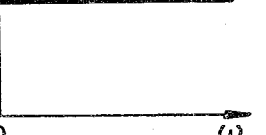
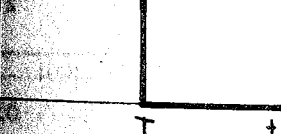
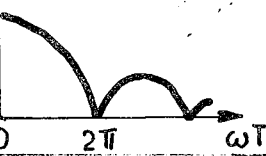
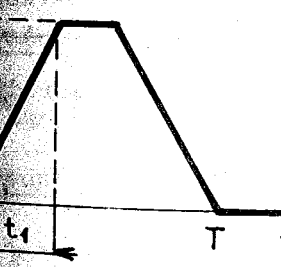
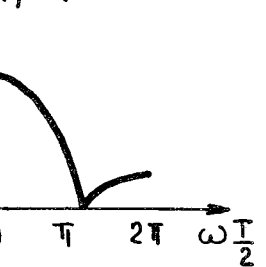
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (4.1)$$

existuje Fourierova transformace

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.2)$$

která reprezentuje spektrální vlastnosti signálu  $f(t)$ .  $F(j\omega)$  je komplexní

4.1 Charakteristiky a matematické vyjádření aperiodických testovacích signálů

Typ signálu Časový průběh	Funkce času Obraz ve FT	Spektrum
<p>skok</p> 	$f(t) = 0, \quad t < 0$ $f(t) = 1, \quad t \geq 0$ $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$	<p><math> F(j\omega) </math></p> 
<p>reálný skok</p> 	$f(t) = 0, \quad t < 0$ $f(t) = \frac{t}{t_1}, \quad 0 \leq t < t_1$ $f(t) = 1, \quad t_1 \leq t < \infty$ $F(j\omega) = \frac{1}{\omega^2 t_1} e^{-j\omega t_1} - 1$	<p><math> F(j\omega) </math></p> 
<p>jednotkový impuls</p> 	$f(t) = 1/\tau, \quad 0 \leq t < \tau$ $f(t) = 0, \quad \tau \leq t < \infty$ $F(j\omega) = 1$	<p><math> F(j\omega) </math></p> 
<p>pravouhlý impuls</p> 	$f(t) = 0, \quad T < t < \infty$ $f(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq T$ $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T} - 1$	<p><math> F(j\omega) </math></p> 
<p>licheběžníkový impuls</p> 	$f(t) = 0, \quad T < t < \infty$ $f(t) = t/t_1, \quad 0 \leq t < t_1$ $f(t) = \frac{T-t}{t_1}, \quad T-t_1 < t \leq T$ $f(t) = 1, \quad t_1 \leq t \leq T-t_1$ $ F(j\omega)  = \frac{4}{\omega^2 t_1 (T-t_1)^2} \cdot \sin \frac{\omega t_1}{2} \cdot \sin \frac{\omega (T-t_1)}{2}$	<p><math> F(j\omega) </math></p> 

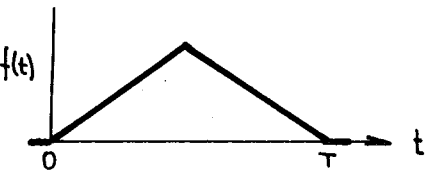
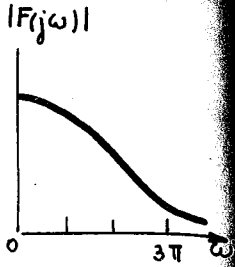
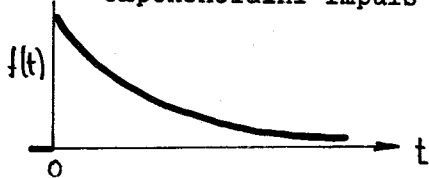
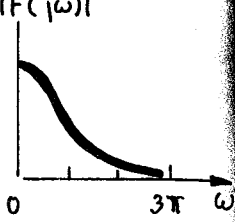
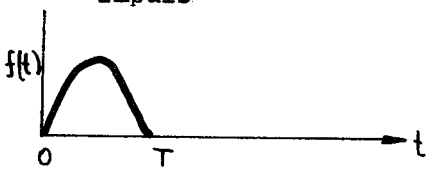
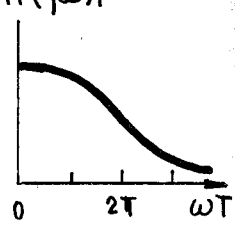
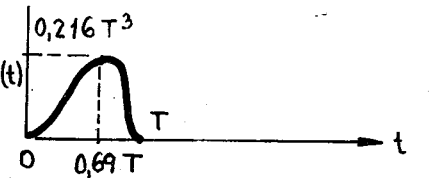
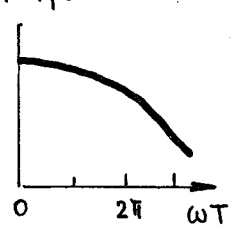
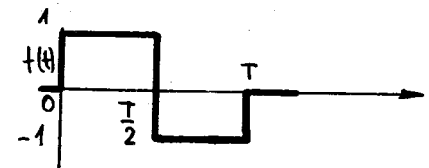
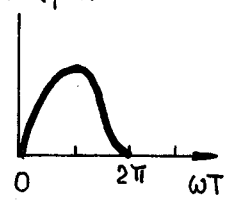
Funkce s modulem  $|F(j\omega)|$ . Všechny aperiodické signály mají spojité spektrum.

V tabulce 4.2 jsou uvedeny příklady periodických testovacích signálů, pro které platí

$$f(t) = f(t \pm T)$$

(4.3)

Tabulka 4.1 pokračování

<p>trojúhelníkový impuls</p> 	$f(t) = (2/T)t, \quad 0 \leq t < T/2$ $f(t) = 2 - (2/T)t, \quad T/2 < t \leq T$ $F(j\omega) = -T \frac{1 - \cos \frac{\omega T}{2}}{2} e^{-j \frac{\omega T}{2}} \frac{\omega T^2}{2}$	
<p>exponenciální impuls</p> 	$f(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0$ $f(t) = 0, \quad t < 0$ $F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$	
<p>posunutý kosinový impuls</p> 	$f(t) = 1 - \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad 0 \leq t \leq T$ $F(j\omega) = T \frac{1}{1 - \frac{\omega T^2}{2\pi}} \cdot \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$	
<p>posunutý vážený kosinový impuls</p> 	$f(t) = t^3 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t\right), \quad 0 \leq t \leq T$	
<p>pravouhlá vlna</p> 	$f(t) = 0, \quad T < t < 0$ $f(t) = 1, \quad 0 \leq t < T/2$ $f(t) = -1, \quad T/2 < t \leq T$ $F(j\omega) = -\frac{2}{\omega} j \left[ e^{-j\omega 2T} - 1 \right]^2$	

kde  $T$  je perioda,  $f_0 = 1/T$  je základní frekvence. Prakticky všechny periodické signály se dají rozložit do Fourierovy řady

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{j2\pi nt/T} \quad (4.4)$$

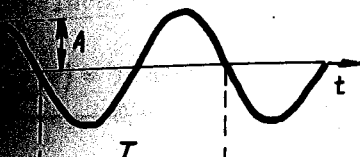
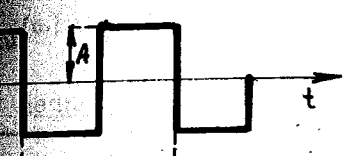
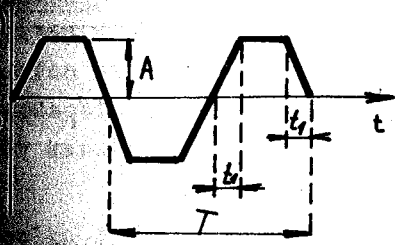
kde Fourierovy koeficienty  $a_n$  jsou definovány

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi nt/T} dt \quad (4.5)$$

Periodické signály mají vždy diskrétní spektrum.

V tabulce 4.3 jsou uvedeny autokorelační funkce a spektrální výkonové hustoty některých typů signálů. Základní charakteristiky stacionárních náhodných

Charakteristiky a matematické vyjádření periodických testovacích signálů

Průběh signálu Průběh	Funkce času Rozklad do Fourierovy řady
<p>sinusový průběh</p> 	$f(t) = A \sin \omega t$ $f(t) = A \sin \omega t$
<p>pravouhý průběh</p> 	$f(t) = (-1)^n A, \quad nT/2 \leq t \leq (n+1)T/2$ $f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)\omega t}{2\nu+1}$
<p>trapezoběžníkový průběh</p> 	$f(t) = (-1)^n A \frac{1}{t_1}, \quad nT/2 \leq t < (nT/2) + t_1$ $f(t) = (-1)^n A, \quad (nT/2) + t_1 \leq t < \frac{T}{2}(n+1) - t_1$ $f(t) = (-1)^n A - \frac{T}{2t_1} (n+1)t,$ $f(t) = \frac{2AT}{\pi^2 t_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin(2\nu+1)\omega t_1}{(2\nu+1)^2} \sin(2\nu+1)\omega t \right]$

pro přesnější procesů, střední hodnotu, rozptyl, autokorelační funkci, střední výkonovou hustotu atd. určujeme ze souboru N-realizací náhodného signálu. Náhodné stacionární ergodické signály dovolují, aby jejich charakteristiky byly určeny z jedné dostatečně dlouhé realizace náhodného signálu. Základní vzorec patří vzorec pro výpočet:

střední hodnoty

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (4.6)$$

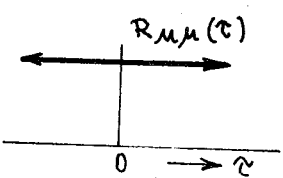
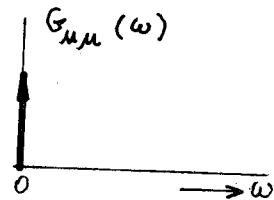
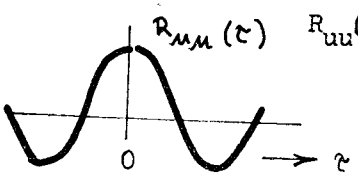
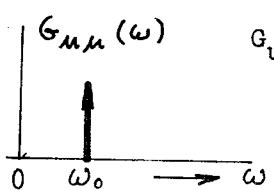
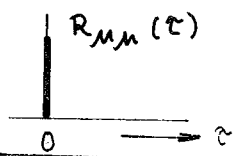
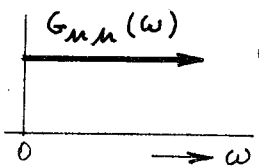
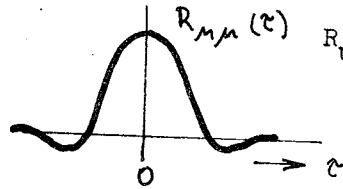
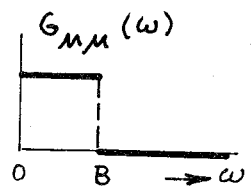
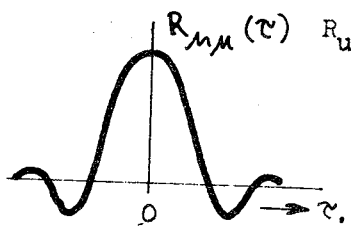
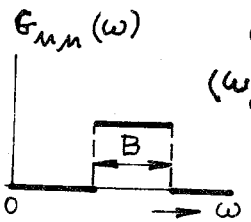
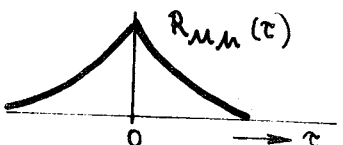
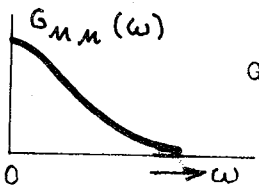
střední kvadratické hodnoty

$$\gamma_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt \quad (4.7)$$

střední kvadratické odchylky

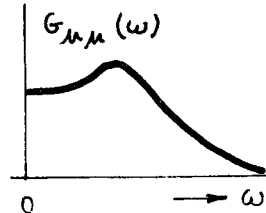
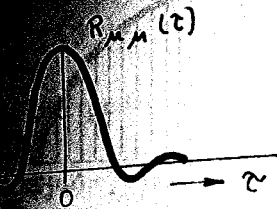
$$\sigma_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [u(t) - \bar{u}]^2 dt = \gamma_u^2 - \bar{u}^2 \quad (4.8)$$

Tabulka 4.3 Statistické charakteristiky testovacích signálů

<p>Typ signálu Autokorelační funkce</p>	<p>Spektrální výkonová hustota</p>
<p>konstantní signál</p>  <p><math>R_{uu}(\tau) = c^2</math></p>	 <p><math>G_{uu}(\omega) = c^2 \delta(\omega)</math></p>
<p>harmonický signál</p>  <p><math>R_{uu}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau</math></p>	 <p><math>G_{uu}(\omega) = \frac{A^2}{2} \delta(\omega - \omega_0)</math></p>
<p>bílý šum</p>  <p><math>R_{uu}(\tau) = a \delta(\tau)</math></p>	 <p><math>G_{uu}(\omega) = a, \omega &gt; 0</math></p>
<p>nízkofrekvenční bílý šum</p>  <p><math>R_{uu}(\tau) = aB \frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B}</math></p>	 <p><math>G_{uu}(\omega) = a, 0 \leq \omega \leq B</math></p>
<p>úzkopásmový bílý šum</p>  <p><math>R_{uu}(\tau) = aB \frac{\sin \pi B\tau}{\pi B} \cdot \cos \omega_0 \tau</math></p>	 <p><math>G_{uu}(\omega) = a</math> <math>(\omega_0 + \frac{B}{2}) \leq \omega \leq (\omega_0 - \frac{B}{2})</math></p>
<p>exponenciální</p>  <p><math>R_{uu}(\tau) = e^{-a \tau }</math></p>	 <p><math>G_{uu}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}</math></p>
<p>exponenciální kosinový</p> <p><math>R_{uu}(\tau) = e^{-a \tau } \cos \omega_0 \tau</math></p>	<p><math>G_{uu}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{2a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2}</math></p>



3 pokračování



Autokorelační funkce

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t+\tau)dt \quad (4.9)$$

Spektrální výkonová hustota jako Fourierova transformace autokorelační funkce

$$S_{uu}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.10)$$

Jednostranná spektrální výkonová hustota

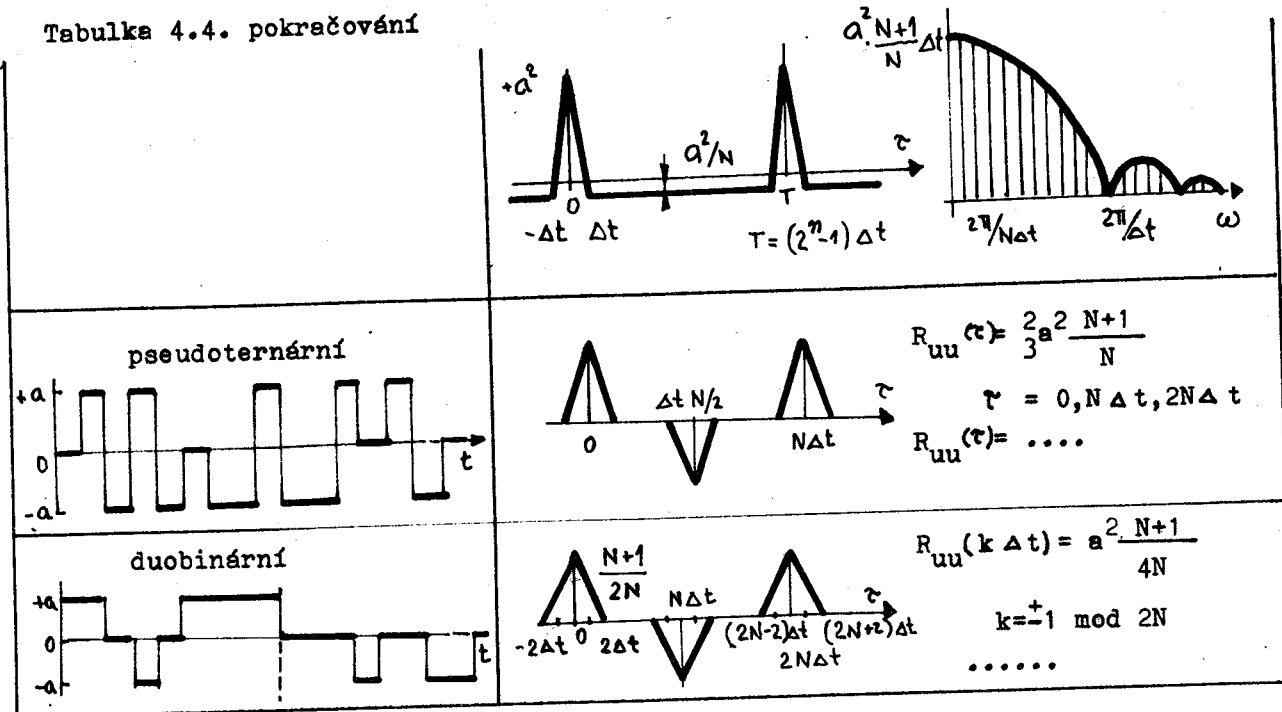
$$S_{uu}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.11)$$

Na obrázcích 4.4 jsou uvedeny časové průběhy a autokorelační funkce některých pseudonáhodných signálů. Jejich charakteristiky určujeme podobně jako u náhodných signálů podle vztahů (4.6) až (4.11). Podrobnější popis vlastností pseudonáhodných signálů je uveden v následující kapitole. Pozornost budeme rovněž věnovat způsobům jejich generování ať již přístrojovým nebo programovým způsobem. V kapitole 4 uvedeme několik poznámek k volbě testovacích signálů.

Obrázek 4.4 Charakteristiky pseudonáhodných signálů

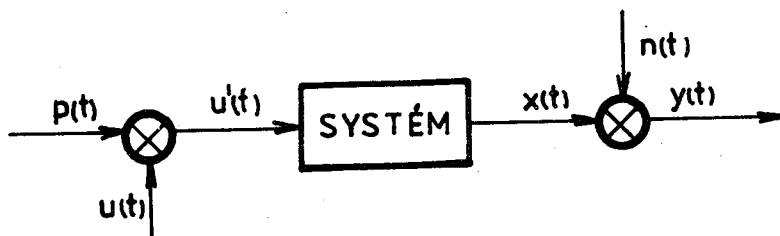
Typ signálu Časový průběh	Autokorelační funkce Spektrální výkonová hustota
<p><u>Pseudotelegrafní signál</u></p>	$R_{uu}(\tau) = a^2 \left( 1 - \frac{ \tau }{\Delta t} \right) \quad  \tau  < \Delta t$ $R_{uu}(\tau) = 0, \quad  \tau  \geq \Delta t$
<p><u>Pseudobinární</u></p>	$R_{uu}(\tau) = a^2 \left( 1 - \frac{ \tau }{\Delta t} \frac{N+1}{N} \right), \quad 0 \leq \tau < \Delta t$ $R_{uu}(\tau) = -\frac{a^2}{N}, \quad \tau \geq \Delta t$ $S_{uu}(\omega) = \frac{a^2(N+1)\Delta t}{N} \sum_{r=1}^N \left[ \frac{\sin(r\tau/N)}{r\tau/N} \right]^2$

Tabulka 4.4. pokračování



#### 4.2 Pseudonáhodné testovací signály

Vzhledem ke značné důležitosti pseudonáhodných signálů v procesu identifikace, pozastavme se nad jejich vlastnostmi. Ukázalo se totiž, že chceme-li provést identifikaci procesu na základě korelačních funkcí vypočtených z provozních signálů, musí tyto signály být stacionární po dlouhou dobu, aby byla zaručena potřebná přesnost odhadů korelačních funkcí/což je pro praxi velmi silný předpoklad. Pseudonáhodné signály tak umožňují přejít od pasivního experimentu při identifikaci k aktivnímu, kdy podle obr.4.1 se vstupní signál  $u'(t)$  skládá z provozního signálu  $p(t)$ , k němuž je přidán testovací signál  $u(t)$



Obr.4.1 Problém identifikace s externím testovacím signálem  $u(t)$

$$u'(t) = p(t) + u(t) \tag{4.12}$$

Pro výstupní signál můžeme psát složkové vyjádření

$$y(t) = x(t) + n(t) = y_p(t) + y_u(t) + n(t) \tag{4.13}$$

kde  $y_p(t)$  je složka signálu  $y(t)$  odpovídající provoznímu signálu  $p(t)$ ,  $y_u(t)$  je složka odpovídající testovacímu signálu  $u(t)$ .

Pro vzájemnou výkonovou spektrální hustotu  $S_{uy}(j\omega)$  bude platit

$$S_{uy}(j\omega) = S_{uy_p}(j\omega) + S_{uy_u}(j\omega) + S_{un}(j\omega) \tag{4.14}$$

Když nebude  $n(t)$  korelované s  $p(t)$  a ani s  $u(t)$ , tj.

$$S_{uy_p}(j\omega) = 0, S_{un}(j\omega) = 0 \text{ pro } -\infty < \omega < \infty \quad (4.15)$$

potom je možno psát pro frekvenční přenos  $K(j\omega)$  vztah

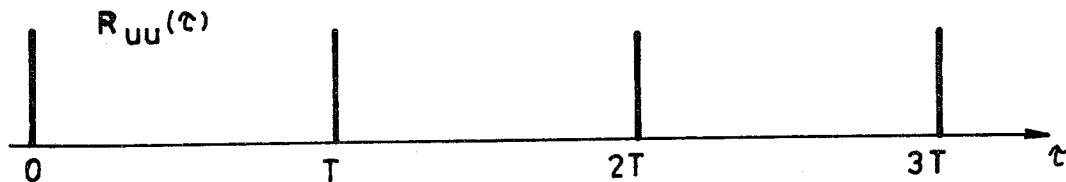
$$S_{uy}(j\omega) = S_{uy_u}(j\omega) = K(j\omega) S_{uu}(j\omega) \quad (4.16)$$

a protože máme možnost měřit jenom  $y(t)$ , můžeme frekvenční přenos  $K(j\omega)$  stanovit podle vztahu

$$K(j\omega) = \frac{S_{uy}(j\omega)}{S_{uu}(j\omega)} \text{ pro } S_{uu}(j\omega) \neq 0 \quad (4.17)$$

Jestliže testovací signál splňuje podmínky vztahu (4.15), můžeme dynamické vlastnosti procesu /jeho impulsní, frekvenční charakteristiku apod./ stanovit na základě měření nebo známých charakteristik testovacího a výstupního signálu. Uvažujme zprvu vstupní signál s vlastnostmi bílého šumu. Intenzita jeho energie je rovnoměrně rozložena po celém frekvenčním pásmu, takže nenarušuje normální provozní režim procesu, stochasticky nezávisí na jiných působeních ovlivňujících proces z venku ani na vnitřních fluktuacích. Má ale z hlediska identifikace dvě nevýhody. První z nich je potřebný dlouhý čas na dostatečně přesný odhad vzájemné korelační funkce /teoreticky nekonečný čas a současně přesné měření výstupního signálu/. Druhou nevýhodou (a to zásadní) je, že jej nedovedeme realizovat pro nedostatek zdroje, který by měl mít teoreticky schopnost dodávat nekonečnou energii.

Uvedené nevýhody nám pomáhá překonat použití pseudonáhodných testovacích signálů. Tento typ signálů má autokorelační funkci velmi podobnou autokorelační funkci bílého šumu jenom s tím rozdílem, že se opakuje s periodou  $T$ . Na obr. 4.2 je uvedena autokorelační funkce  $R_{uu}(\tau)$  pseudonáhodného testovacího signálu.



Obr. 4.2 Autokorelační funkce  $R_{uu}(\tau)$  pseudonáhodného testovacího signálu

Porovnejte s charakteristikami uvedenými v tabulkách 4.3 a 4.4.

Autokorelační funkce má hodnotu  $R_{uu}(\tau) = \sigma^2$  pro  $\tau = 0, T, 2T, 3T, \dots$  atd. a je rovna nule pro všechna ostatní  $\tau$ .

Platí pro ni

$$R_{uu}(\tau - \sigma) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) u(t + \tau - \sigma) dt \quad (4.18)$$

Pro vzájemnou korelační funkci  $R_{uy}(\tau)$  pseudonáhodného signálu  $u(t)$  s jemu odpovídajícím výstupním signálem  $y(t)$  lineárního procesu bude potom platit

$$R_{uy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\sigma) \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T u(t + \tau - \sigma) dt \right\} d\sigma \quad (4.19)$$

z kterého záměnou pořadí integrace dostaneme

$$R_{uy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \int_{-\infty}^{\infty} k(\sigma) u(t+\tau-\sigma) d\sigma dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) y(t+\tau) dt \quad (4.20)$$

Z výrazu (4.20) vyplývá, že vzájemnou korelační funkci vstupního a výstupního signálu -vstupní signál je pseudonáhodný- dostaneme integrací v průběhu jedné periody pseudonáhodného signálu.

Pro vzájemnou korelační funkci  $R_{uy}(\tau)$  však platí vztah

$$R_{uy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\sigma) R_{uu}(\tau-\sigma) d\sigma \quad k(\sigma) \text{ - impulsní charakteristika} \quad (4.21)$$

který ze předpokladu, že  $k(t) = 0$  pro  $t \leq 0$  a že vstupní signál je periodický (jeho autokorelační funkce je periodická) s periodou  $T$ , můžeme přepsat na tvar

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^T k(\sigma) R_{uu}(\tau-\sigma) d\sigma + \int_T^{2T} k(\sigma) R_{uu}(\tau-\sigma) d\sigma + \int_{2T}^{3T} k(\sigma) R_{uu}(\tau-\sigma) d\sigma \dots \quad (4.22)$$

Má-li  $u(t)$  autokorelační funkci podle obr.4.2, potom

$$R_{uy}(\tau) = K \{ k(\tau) + k(T+\tau) + k(2T+\tau) + \dots \} \quad (4.23)$$

Je-li perioda  $T > T_M$ , kde  $T_M$  je čas, ze který impulsní odezva bude mít zanedbatelnou hodnotu  $k(T_M) \approx 0$ , potom

$$R_{uy}(\tau) = K k(\tau) \quad (4.24)$$

Nebo-li impulsní odezva bude úměrná vzájemné korelační funkci stejně jako v případě vstupního signálu s vlastnostmi bílého šumu.

Podobné úvahy můžeme provést i v případě procesu, který je schematicky znázorněn na obr.4.3. Uvažujme, že má  $m$ -vstupních a  $n$ -výstupních signálů. Vstupními signály jsou pseudonáhodné s autokorelačními funkcemi podle obr.4.2. Vzájemná korelační funkce  $i$ -tého vstupního a  $j$ -tého výstupního signálu bude

$$R_{u_i y_j}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u_i(t) y_j(t+\tau) dt \quad (4.25)$$

a protože pseudonáhodný vstupní signál je periodickým signálem, platí i vztah

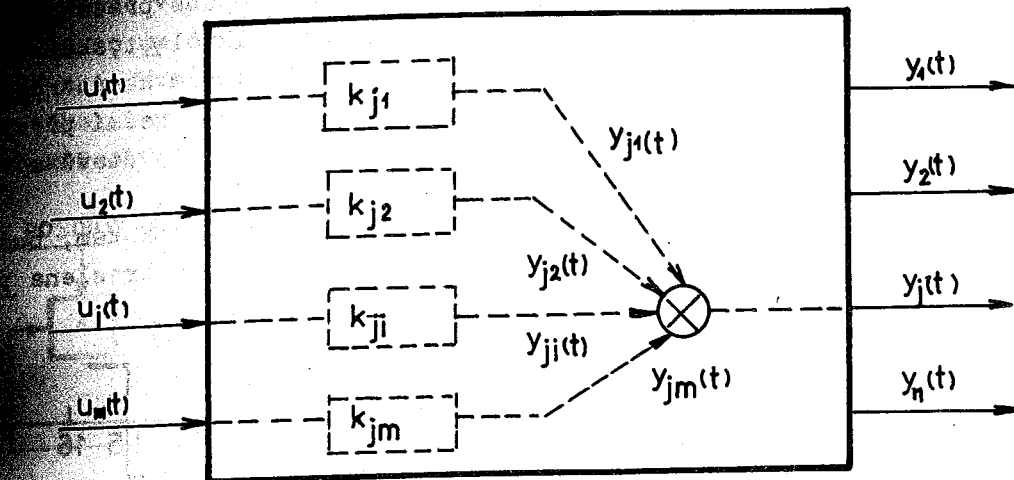
$$R_{u_i u_j}(\tau) = \int_0^T k_{ji}(\sigma) R_{u_i u_i}(\tau-\sigma) d\sigma + \sum_{l=1}^m \int_0^T k_{jl}(\sigma) R_{u_l u_l}(\tau-\sigma) d\sigma \quad (4.26)$$

kde  $i, l=1, 2, \dots, m$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  a  $k_{jl}(t)$  je impulsní odezva mezi  $l$ -tým vstupem a  $j$ -tým výstupem, o které předpokládáme, že za čas  $T$  dosáhne zanedbatelně malé hodnoty.

Za předpokladu, že vstupní signály jsou nekorelované, tj.  $R_{u_l u_l}(\tau) = 0$  pro všechna  $i \neq l$  a pro  $\tau$  menší než maximální hodnota  $T_M$  (čas trvání nejdelší impulsní odezvy procesu), potom vztah (4.26) se změnil na tvar

$$R_{u_i y_j}(\tau) = \int_0^T k_{ji}(\sigma) R_{u_i u_i}(\tau-\sigma) d\sigma \quad (4.27)$$

a s přihlédnutím k předpokladu, že autokorelační funkce mají tvar podle obr.4.2,



Obr. 4.3 Lineární stacionární proces s mnoha vstupy a mnoha výstupy

rovnice (4.27) se dále zjednoduší na tvar

$$R_{u_i y_j}(\tau) = K k_{ji}(\tau) \quad (4.28)$$

Rovnice (4.28) jasně ukazuje, že za předpokladu splnění podmínek na pseudonáhodný signál, je možné impulsní odezvu stanovit na základě určení vzájemných korelačních funkcí vstupních a výstupních signálů, tedy stejným postupem jako v případě procesu s jedním vstupem a jedním výstupem.

### 4.3 Generování a vlastnosti pseudonáhodných signálů

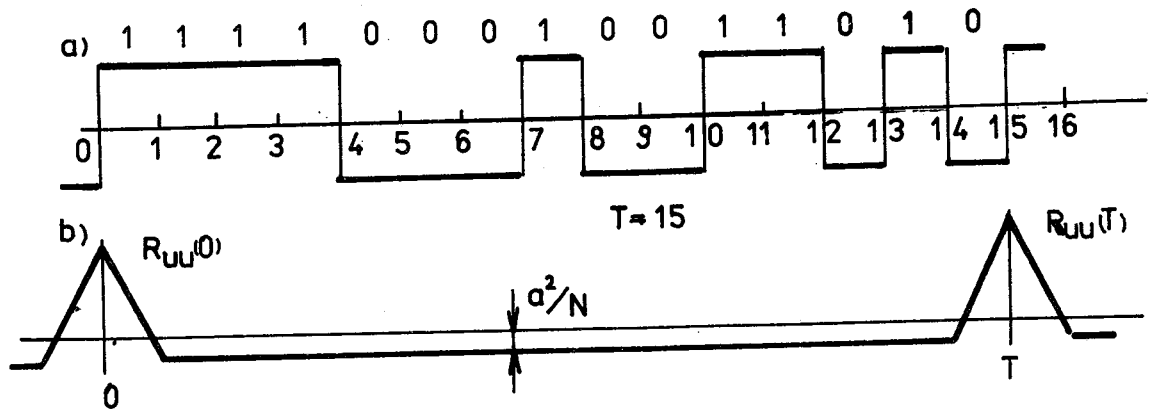
Pseudonáhodný signál můžeme získat rozličnými způsoby. Primitivní způsob je sledovat průběh náhodného signálu v délce trvání  $T$  a potom jej opakovaně snímáme. Můžeme tak náhodný signál s periodou  $T$ . Je to však prakticky málo vhodný způsob generování pseudonáhodného signálu, nehledě na realizační těžkosti při jeho aplikaci jako testovacího signálu.

Prakticky velmi výhodný, jak z hlediska generování, tak i z hlediska napojení na vstup procesu je pseudobinární signál (pseudonáhodný binární signál), jehož časový průběh i charakteristiky jsou uvedeny v tabulce 4.4. Jak je z tabulky vidět, nemá autokorelační funkce pseudonáhodného signálu ideální průběh podle rovnice (4.2), ale velmi dobře jej aproximuje. Navíc je možno velmi lehkou generovat takový pseudobinární signál, který s libovolně malou nepřesností bude aproximovat požadovanou autokorelační funkci. Abychom požadovanou aproximaci pseudonáhodného signálu dosáhli, je třeba při generování pseudobinárního signálu dodržet následující pravidla:

- signál musí být periodický s periodou  $T$ ,
- jeho amplituda může nabývat pouze konstantní hodnoty  $\pm a$ , přičemž jedna hodnota v druhou se může měnit pouze v diskretních okamžicích  $k\Delta t$ , kde  $\Delta t$  je konstantní a  $k$  je celé číslo. Potom perioda  $T = N\Delta t$ , kde  $N$  je celé číslo,
- počet stavů hladin  $+a$  se musí přibližně rovnat počtu  $-a$  stavů, přesněji, rozdíl počtu stavů  $+a$  a  $-a$  nesmí převyšovat jednu,
- počet za sebou jdoucích  $+a$  stavů nebo  $-a$  musí mít takový výskyt, že kratší

posloupnost se musí vyskytovat frekventovaněji než delší-nebo přesněji, skoro polovina posloupností stejných stavů musí mít délku  $1\Delta t$ , skoro čtvrtina délku  $2\Delta t$ , skoro osmina délku  $3\Delta t$  atd. ,kde slovem skoro rozumíme, že odchylka skutečného počtu posloupností od uvedeného počtu nesmí převýšit jednu. V každé z uvedených délek posloupností musí být počet  $+a$  stavů a  $-a$  stavů stejný.

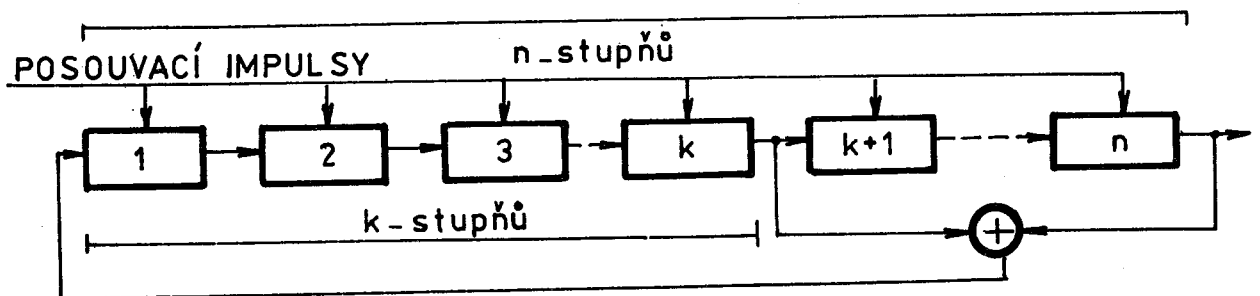
Takováto pseudonáhodná posloupnost, vyhovující uvedeným čtyřem podmínkám, bude mít potom autokorelační funkci podle tabulky 4.4. Na obr. 4.4 je nakreslena pseu-



Obr.4.4 Pseudonáhodný binární signál : a - průběh signálu s periodou  $T = 15\Delta t$ , b - autokorelační funkce  $R_{uu}$  pseudonáhodného binárního signálu

donáhodná posloupnost  $T=15\Delta t$  ( průběh a) a její autokorelační funkce ( průběh b). Aplikování tohoto signálu na vstup procesu je možné uskutečnit jednoduchým zařazením nějakého dvupolohového členu, nebo dokonce i ručně, například přivíráním a pootvíráním ventilu apod., je-li  $\Delta t$  dostatečně velké. Druhá přednost tohoto signálu tkví v tom, že operaci násobení vstupního signálu s výstupním signálem, potřebnou k určení vzájemné korelační funkce, redukuje na změnu znaménka výstupního signálu podle okamžitého stavu  $+a$  nebo  $-a$ .

Pro realizaci pseudobinárních signálů se používají číslicové filtry nebo jim logicky ekvivalentně zapojené posuvné registry. Příklad generátoru, pomocí posuvného registru generujícího pseudonáhodný binární signál , je uveden na obr.4.5

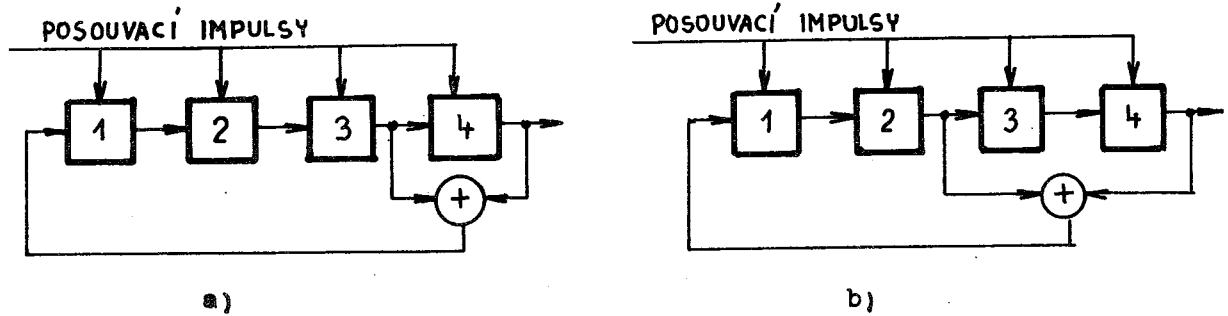


Obr.4.5 Schema generátoru pseudobinárního signálu z posuvných registrů

Generátor se skládá z  $n$ -stupňového posuvného registru se zpětnou vazbou, odvozenou sčítáním výstupů  $k$ -tého a  $n$ -tého stupně registru modulo 2 (logická funkce nejednoznačnost). Jednotlivé stupně registru se přepínají hodinovými impulsy, takže obsah registru se cyklicky posouvá o jeden stupeň. Je zřejmé, že výstup registru, vzatý z  $n$ -tého stupně (může se vzít z kteréhokoliv stupně registru), bude periodický s periodou  $N$  diskretních hodnot, odpovídajících stavům  $n$ -tého stupně registru. Je přirozené, že délka periody bude závislá na počtu stupňů registru a na uspo-

řádání zpětné vazby. Ne každé uspořádání zpětné vazby povede na maximální periodu. Ukažme si to na příkladě.

Příklad 4.1 Uvažujme čtyřstupňový registr  $n=4$ , jednou s uspořádáním zpětné vazby od třetího stupně  $k=3$  obr.4.6a, podruhé s uspořádáním zpětné vazby od druhého stupně  $k=2$  obr.4.6b.



Obr.4.6 Schema uspořádání zpětné vazby pro generování pseudobinárního signálu pomocí čtyřstupňového posuvného registru

Řešení: Stavů jednotlivých stupňů registru pro případ a) i b) jsou následující

Případ a)

stupeň registru	počáteční stav, druhý, atd.															
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
2	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
3	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
4	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1

← 15 stavů →

Případ b)

stupeň registru	počáteční stav, druhý, atd.						
1	1	0	0	1	1	1	1
2	1	1	0	0	1	1	1
3	1	1	1	0	0	1	1
4	1	1	1	1	0	0	1

← 6 stavů →

opakování

Registr obsahuje  $n$  stupňů a tedy maximálně možný počet rozdílných stavů registru je  $2^n$ . V případě, že jsou všechny tyto stavy generované, dostaneme maximální periodu  $2^n$  stavů. Nemůžeme ale připustit takový stav, při kterém by všechny stupně registru byly ve stavu logické 0. Registr by v tomto stavu zůstal natrvalo. Největší možná perioda  $n$ -stupňového registru proto bude  $N=(2^n-1)$ , což bude také perioda  $T$  pseudonáhodného binárního signálu tímto generátorem generovaná. Této podmínce ( $N=2^n-1$ ) vyhovuje uspořádání zpětné vazby v případě podle obr.4.6a. Počet stavů je  $15=2^4-1$  ( $n=4$ ). Průběh pseudonáhodného binárního signálu generovaného tímto generátorem je uveden na obr.4.4a.

V tabulce 4.5 jsou uvedeny vstupy  $k$  a  $n$  posuvného registru obr.4.5 pro logický člen modulo 2.

Tabulka 4.5 Vstupy  $k$  a  $n$  posuvného registru pro logický člen modulo 2

$n$	$k$	$2^n - 1$
2	1	3
3	1,2	7
4	1,3	15
5	2,3	31
6	1,5	63
7	1,3	127
8	4,6	255
9	4	511
10	3,7	1023
11	2,9	2047

Pro autokorelační funkci tohoto generovaného signálu s amplitudou  $\pm a$  a s periodou  $N$  se dá odvodit vztah

$$R_{uu}(\tau) = a^2 \left[ 1 - \frac{|\tau| N + 1}{N \Delta t} \right] \quad \text{pro } 0 \leq \tau < \Delta t \quad (4.29)$$

$$R_{uu}(\tau) = -\frac{a^2}{N} \quad \text{pro } \tau \geq \Delta t \quad (4.30)$$

Autokorelační funkce je uvedena na obr.4.4b.

Fourierovou transformací vztahu(4.29) dostaneme výkonovou spektrální hustotu

$$S_{uu}(\omega) = \frac{a^2 (N + 1) \Delta t}{N} \sum_{r=1}^N \left[ \frac{\sin(r\pi/N)}{r\pi/N} \right]^2 \quad (4.31)$$

Pro  $r \ll N$  je výraz v hranaté závorce velmi blízký jedné, z čehož plyne, že při nízkých frekvencích bude hodnota výkonové spektrální hustoty  $a^2(N + 1)\Delta t/N$ .

Efektivní frekvenční pásmo  $f_{ef}$  je možno stanovit výpočtem z výrazu(4.31) pro pokles  $S_{uu}(\omega)$  o 3 dB, z čehož dostaneme

$$f_{ef} = \left( \frac{1}{N \Delta t} \quad \text{až} \quad \frac{1}{3 \Delta t} \right) \quad (4.32)$$

Frekvenční pásmo je možné měnit změnou  $\Delta t$ , tj. změnou frekvence hodinových impulsů generátoru a volbou počtu stupňů registru  $n$ . Je to velká přednost takto generovaného pseudonáhodného signálu vůči ostatním způsobům, protože změnou uvedených parametrů je možné plochou část spektrální výkonové hustoty posunout do libovolné žádané oblasti frekvencí.

Další předností takto generovaného pseudonáhodného signálu je jeho stabilita, tj. nezávislost charakteristik signálu na čase, teplotě a vůbec na změnách okolí, což u jiných generátorů "bílého šumu" je možno těžko zabezpečit. Pro jednu zvolené parametry:  $n$ -počet stupňů registru,  $\Delta t$ , amplituda  $\pm a$  a uspořádání zpětné vazby, jsou charakteristiky signálu jako autokorelační funkce a spektrální výkonová hustota perfektně reprodukovatelné. Dále je možno pomocí i jednoho generátoru generovat i víc nekorelovaných signálů, což je zvlášť důležité při identifikaci procesů s mnoha vstupy a výstupy.



Jako příklad programového řešení pseudonáhodného binárního signálu jsou uvedeny následující subroutiny podle [2] GEN 5A, GEN 5C, GEN 5D.

```
C SUBROUTINE GEN5A(X,IC1)
.....
DATA J/1/
I1=J/IC1
I6=(I1+J)
I6=I6*2**31/2**31
X=I6*2-1
I6=I6*IC1
J=J/2+I6
RETURN
END
```

```
C SUBROUTINE GEN5C(IN,N,M,INIT)
.....
C N POČET DESÍTKOVÝCH RADU
C M SOUČTOVÉ DESÍTKOVÉ MÍSTO
IF(INIT)1,1,2
1 INIT=1
I=10**(N-1)
I1=MOD(I,10)
2 I1=MOD(I/10**(N-1),10)
IM=MOD(I/10**(M-1),10)
IC=I1+IM
IF(IC.EQ.1)GOTO 6
5 IN=0
I=I/10
RETURN
6 IN=1
I=IN*10**(N-1)+I/10
RETURN
END
```

```
C SUBROUTINE GEN5D(IN,N,M,INIT)
.....
C VSTUP:
C N POČET DESÍTKOVÝCH RADU
C M SOUČTOVÉ DESÍTKOVÉ MÍSTO
C INIT=0 PRO 1.PRUCHODC VYSTUP:
C IN GENEROVANÉ ČÍSLO +1,0
DIMENSION I(10)
IF(INIT)1,1,5
1 IN=1
N1=N-1
DO 2 J=2,N
2 I(J)=1
INIT=1
5 DO 7 J=1,N1
7 I(J)=I(J+1)
I(N)=IN
IN=I(M)+I(N)
IF(IN.NE.1)IN=0
RETURN
END
```

```
C SUBROUTINE GEN 5E(IN,N,M,D,R)
.....
C GENERATOR MOD 3
C VSTUP:
C N POČET DESÍTKOVÝCH RADU
C M SOUČTOVÉ DESÍTKOVÉ MÍSTO
C VYSTUP:
C IN GENEROVANÉ ČÍSLO + 1, 0, - 1
DIMENSION I(10)
INTEGER D,R
DATA INIT/0/
IF(INIT)1,1,5
1 IN=1
N1=N-1
DO 2 J=2,N
2 I(J)=1
INIT =1
5 DO 7 J=1,N1
7 I(J)=I(J+1)
I(N)=IN
IN=I(M)*R+I(1)*D
IF(IN.EQ.-2)IN=1
IF(IN.EQ.2)IN=-1
RETURN
END
```

Generování pseudonáhodného tříúrovňového signálu je provedeno subroutinou GEN 5E

#### 4.4 Volba testovacích signálů

Na volbě testovacího signálu se podílí mnoho faktorů. Než si je uvedeme, vyjmenujme si některé základní požadavky kladené na testovací signály.

##### Testovací signál:

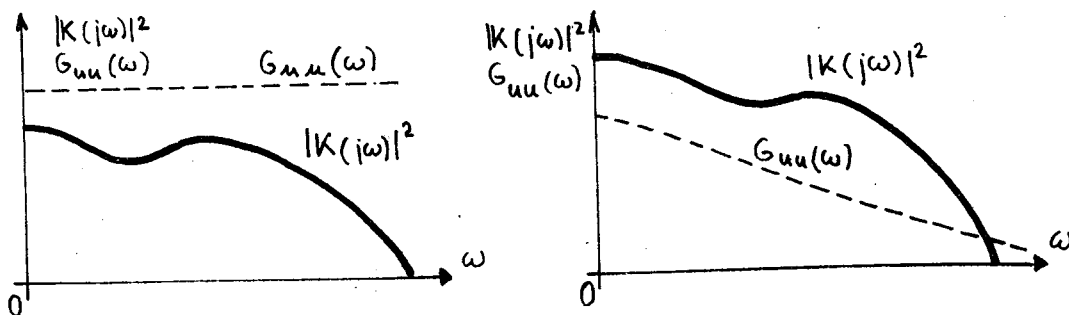
- musí se dát aplikovat na proces v průběhu jeho normálního provozu,
- nesmí narušovat jeho normální režim a řízení,
- nesmí být korelovaný s ostatními signály (působícími na proces) i se šumem,
- musí se dát lehkou realizovat,
- nesmí vyžadovat dlouhý čas na určení odhadu jeho charakteristik (korelační funkce apod.),
- musí umožňovat lehké a dostatečně přesné vyčíslení parametrů modelu (např. impulsní charakteristiky apod.).

Vzhledem k tomu, že identifikovaný proces si můžeme představit jako nějaký systém, který signály působící na jeho vstupu transformuje na výstupní signály a identifikaci jako proces nalezení transformačního vztahu mezi vstupními a výstupními signály, je zřejmé, že takovýto vztah je možno nalézt, budeme-li znát charakteristiky vstupních a výstupních signálů. Do jisté míry je možno prohlásit, že čím přesněji budeme znát tyto charakteristiky a to nejen testovacích a výstupních signálů, ale všech signálů působících na proces, poruchy, šумы atd., tím přesněji bude možné určit vztah podle kterého se transformace vykonává.

Intuitivně by se mohlo/na základě toho, co zde bylo řečeno/ zdát, že z tohoto hlediska jsou výhodnější deterministické testovací signály než signály náhodné, protože charakteristiky deterministických signálů známe přesně.

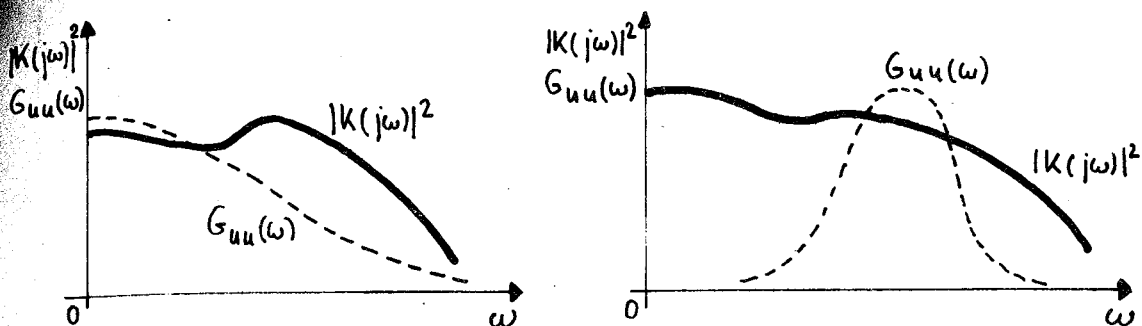
Identifikaci však nemůžeme pokládat pouze za vyhledání transformačního vztahu mezi vstupním a výstupním signálem. Cílem a tedy úlohou identifikace je určit model procesu, který popisuje vlastnosti procesu za rozličných situací, ve kterých se může proces nalézat. Z toho vyplývá řada požadavků na testovací signál, které již byly uvedeny. Souhrně řečeno musí mít takové vlastnosti, aby odezva procesu na jeho působení obsahovala maximum informace o vlastnostech procesu. Tak například při použití harmonického testovacího signálu dostaneme pouze jeden bod frekvenční charakteristiky, podle kterého ještě nemůžeme určit vlastnosti procesu. Abychom je mohli určit, je třeba aplikovat harmonický signál s takovým rozsahem frekvencí, na který je proces schopný reagovat. Kdybychom například použili jako testovací signál nějaký neperiodický signál, potom jeho spektrální vlastnosti budou rozhodujícím způsobem ovlivňovat správnost určeného modelu.

Na obr. 4.7 jsou znázorněny dva příznivé případy volby testovacích signálů, protože jejich spektrální vlastnosti překrývají celý rozsah frekvenčního spektra identifikovaného procesu. V případech podle obr. 4.8 bude mít model procesu pou-



Obr. 4.7 Příznivé charakteristiky testovacích signálů vzhledem k charakteristi-

kám identifikovaného procesu



Obr. 4.8 Nevhodné spektrální vlastnosti testovacích signálů vzhledem k frekvenčnímu spektru identifikovaného procesu

ze omezenou platnost a to pouze v rozsahu frekvencí testovacího signálu, protože spektrum signálu je vzhledem k frekvenčnímu spektru procesu nevyhovující.

Při volbě testovacího signálu jsme omezeni jednak možnostmi výběru z takové třídy signálů, které jsou pro daný proces přípustné (z důvodů technologických, bezpečnostních), jednak realizačními omezeními (přístroje a jiná zařízení, počítače). V úvahu musíme vzít i vlastnosti poruch a šumů působících na proces, jakož i ekonomii experimentu.

#### 4.5 Kontrolní otázky a úkoly

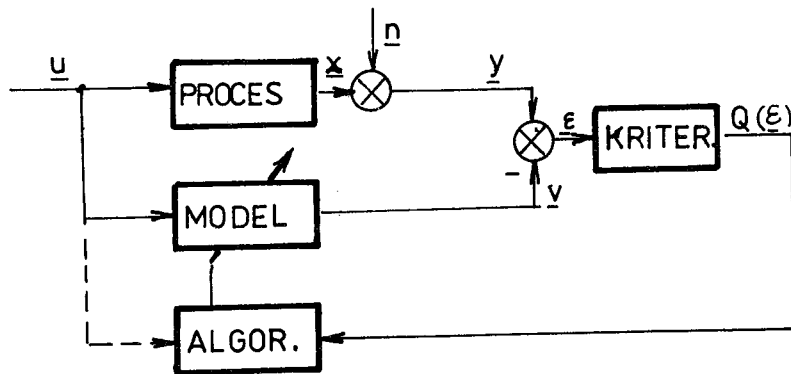
1. Podle jakých charakteristik můžeme klasifikovat testovací signály?
2. Proveďte odvození matematických vztahů uvedených v tabulkách 4.1, 4.2, 4.3.
3. Pomocí programů na číslicovém počítači konkretizujte pro navržené signály v tabulkách uvedené charakteristiky.
4. Pro pětistupňový posuvný registr diskutujte počet stavů v závislosti na uspořádání zpětných vazeb pro logický člen mod 2.
5. Vytvořte program, který by s využitím podprogramů GEN 5A, GEN 5C, GEN 5D a GEN 5E generoval pseudonáhodné signály. Vypočtete jejich autokorelační funkce a výkonové spektrální hustoty. Graficky znázorněte.
6. Jaké jsou požadavky kladené na volbu testovacích signálů?

#### Poznámky:

Těžiště této kapitoly vidí autor v analýze testovacích signálů, které je možno prakticky provést na příslušných cvičeních, kdy budou pomocí programů počítána spektra, korelační funkce, výkonové spektrální hustoty ideálních i provozních signálů. Považuji za vhodné realizovat přístrojově generování pseudonáhodného signálu a výsledky porovnat s generátory realizovanými programy na číslicovém počítači. Kapitola byla zpracována podle lit. [1] a [2].

## 5. KRITERIUM IDENTIFIKACE

Abychom si uvědomili postavení a důležitost kriteria identifikace, vyjděme ze základního schéma identifikace neznámého procesu. Budeme-li vycházet z apriorní známé anebo předpokládané struktury procesu, soustavy, která má být identifikována, můžeme si proces identifikace znázornit známým obrázkem obr. 5.1.



Obr.5.1 Základní schéma identifikace neznámého procesu.

Vstupní (testovací) signál procesu působí i na vstupu modelu s předpokládanou strukturou. Poznamenejme, že model budeme většinou chápat jako abstraktní model presentovaný matematickým vyjádřením transformace vstupu na výstup-signálů měřených na technologickém procesu. Struktura je odhadovaná na základě zkušenosti-apriorní informace a jako výsledek matematického modelování, kterému je věnována následující 6.kapitola. Odchylna ve struktuře a parametrech modelu způsobuje, že výstupní signál  $\underline{y}$  modelu se bude lišit od výstupního signálu  $\underline{x}$  zatíženého šumem  $\underline{n}$ , a tedy i od  $\underline{v}$ , pro který platí  $\underline{y} = \underline{x} + \underline{n}$ . Odchylna  $\underline{\epsilon}$  mezi signálem  $\underline{y}$  a výstupem modelu  $\underline{v}$ , definovaná  $\underline{\epsilon} = \underline{y} - \underline{v}$ , ukazuje na neshodu mezi chováním procesu a modelu. Míru neshody určuje hodnota kriteriá  $Q(\underline{\epsilon})$ , podle které shodu modelu a procesu oceňujeme. Na základě hodnoty kriteriá odchylny  $\underline{\epsilon}$  se nastavují hodnoty parametrů modelu tak, aby hodnota kriteriá  $Q(\underline{\epsilon})$  byla minimální. Nazvěme toto kriterium kriteriem identifikace. Mechanismus nastavování parametrů se děje pomocí algoritmu, kterým se minimalizuje hodnota kriteriá identifikace.

### 5.1 Klasifikace kriterií identifikace

Z obr.5.1 vyplývá, že odchylna  $\epsilon(t)$  mezi výstupním signálem modelu  $v(t)$  a výstupním signálem procesu  $y(t)$  při stejných vstupních signálech procesu a modelu by mohla být mírou shody modelu a procesu pouze v určitém deterministickém případě, kdy  $u(t)$  bude mít definovaný časový průběh a na proces nepůsobí žádné poruchy a ani šum. Z praxe však víme, že i u nejjednoduššího reálného případu působí na proces signály s náhodným charakterem (šumy, poruchy, vstupní veličiny), takže i odchylna  $\epsilon(t)$  bude nutně mít charakter náhodného signálu, a proto ji musíme charakterizovat statisticky. Navíc, odchylna se musí charakterizovat tak, aby podle její hodnoty bylo možné nastavovat parametry modelu v takovém smyslu, aby se její velikost v jistém smyslu zmenšovala. Na této odchylce  $\epsilon(t)$  vytvoříme proto kriterium  $Q(\epsilon)$  definované vhodnou funkcí nebo ve tvaru funkcionalu. Na toto kriterium jsou zpravidla kladeny následující podmínky:

- |- musí být vhodnou mírou pro charakterizování nesouladu v chování procesu

a modelu,

- musí splňovat předcházející podmínku při působení různých vstupních signálů a šumů,
- musí mít dostatečnou citlivost na poruchy a šumy, působící na proces,
- musí se dát lehko realizovat technickými prostředky i výpočtem.

Uvedeným podmínkám nejlépe vyhovuje integrální kritérium Q v různých modifikacích. Definujme toto kritérium vztahem

$$Q = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |\xi(t)|^{\nu} dt \quad (5.1)$$

kde  $\nu$  určuje stupeň funkční závislosti kritéria na odchylce  $\xi(t)$ . Pro  $\nu = 1$  budeme mluvit o kritériu ze střední hodnoty absolutní hodnoty odchylky, pro  $\nu = 2$  kritérium ze střední kvadratické odchylky, pro  $\nu = 1/2$  to bude kritérium ze střední hodnoty druhé odmocniny z absolutní odchylky. Přísně vzato, kritérium dané vztahem (5.1) je pouze matematickou abstrakcí, protože předpokládá využití celé časové osy od nuly do nekonečna pro určení hodnoty kritéria  $Q(\xi)$ . Prakticky hodnotu kritéria stanovujeme pouze z omezeného časového intervalu, po který provádíme proces identifikace. Interval označme  $(0, T)$ . Skutečný vztah podle kterého počítáme hodnotu kritéria dostaneme ze vztahu (5.1) jednoduše tak, že jej modifikujeme vhodně zvolenou váhovou funkcí  $w(t)$ , která nabývá hodnot  $w(t) = 1$  uvnitř intervalu  $(0, T)$  a  $w(t) = 0$  mimo tento interval. Píšeme

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T |\xi(t)|^{\nu} w(t) dt \quad (5.2)$$

Intuitivně je však zřejmé, že bude výhodnější přikládat větší váhu hodnotám odchylky  $\xi(t)$  v okamžitém čase  $t$  oproti předcházejícím hodnotám. Mluvíme často o exponenciálním zapominání. Toho můžeme dosáhnout zavedením vhodné váhové funkce s exponenciálním průběhem. Potom můžeme psát

$$Q = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t |\xi(\tau)|^{\nu} e^{-(t-\tau)/T_1} d\tau = \frac{1}{T_1} \int_0^{\infty} |\xi(t-\tau)|^{\nu} e^{-\tau/T_1} d\tau \quad (5.3)$$

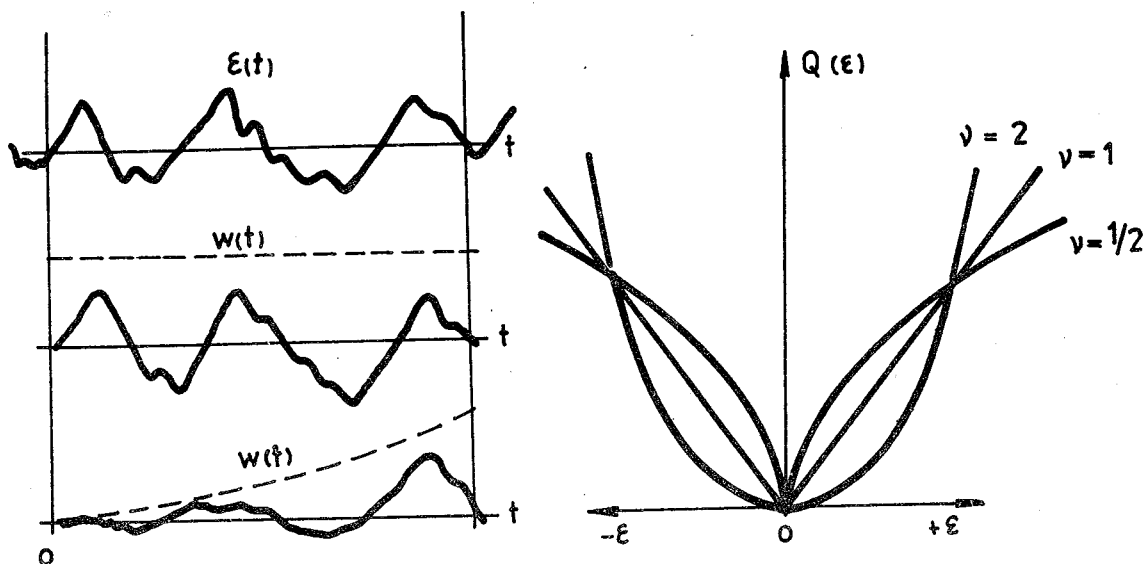
Zavedením váhových funkcí přikládáme hodnotě odchylky v každém časovém okamžiku různou váhu. Kromě toho, jak už bylo uvedeno, můžeme přikládat odchylce různou váhu také podle její velikosti a to tak, že z ní vytváříme různé funkce (podle  $\nu$ ) třeba i s přepínáním jedné kritériální funkce v druhou apod. Tak pro  $\nu = 1$  byla stejná váha přiřazena všem hodnotám odchylky  $\xi(t)$ , pro  $\nu = 2$  kritérium střední kvadratické odchylky přikládá větší váhu větším hodnotám odchylky, pro  $\nu = 1/2$  je tomu naopak.

Situace s vážením odchylky podle času i podle intenzity odchylky při vytváření kritéria  $Q$  znázorňuje obr. 5.2

Z charakteristiky uvedeného (a pro identifikaci vybraného konkrétního kritéria) je jasně vidět, že čím bude jeho hodnota menší, tím lépe bude model s danou strukturou a hodnotami parametrů aproximovat proces. Při neproměnné struktuře modelu a neměnných parametrech procesu bude hodnota  $Q$  záviset pouze na době integrace  $T$ , na nastavených parametrech modelu  $\alpha$ , resp. na charakteristikách šumu.

Odchylka nemusí být definována jen jako rozdíl výstupů modelu a procesu. Může být definována rozdílem stavových proměnných modelu a procesu.

Předpokládejme, že máme identifikovat lineární proces podle obr. 5.1, který



Obr.5.2 Vážení odchylky  $\xi$  váhovou funkcí  $w(t)$  a funkcí závislou na její hodnotě pro různé hodnoty exponentů  $\nu$

můžeme popsat ve stavovém prostoru

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}_p(\underline{x}, \underline{a}, \underline{u}) \quad , \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (5.4)$$

kde  $\underline{x}$  je  $n$  rozměrný vektor stavových veličin,

$\underline{u}$  -  $r$  rozměrný vektor vstupů

$\underline{a}$  -  $m$  rozměrný vektor neznámých parametrů

Vektor pozorovaných veličin  $\underline{y}$  nechť je

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{x} + \underline{D} \underline{u} \quad (5.5)$$

o rozměru  $q \leq n$  což znamená, že ne všechny stavové proměnné můžeme pozorovat. Z toho vyplývá, že rozměry matic budou pro  $\underline{C}$  ( $q \times n$ ) a pro  $\underline{D}$  ( $q \times r$ ). Zvolme strukturu modelu

$$\dot{\underline{v}} = \underline{f}_m(\underline{v}, \underline{a}, \underline{u}) \quad , \quad \underline{v}(0) = \underline{v}_0 \quad (5.6)$$

přičemž rozměr vektoru stavu  $\underline{v}$  je  $p \leq q$ . Protože pro jakýkoliv vstup  $\underline{v}$  bude  $\underline{x}$  funkcí  $\underline{a}$ , a rovněž  $\underline{v}$  funkcí  $\underline{a}$ , můžeme kritérium  $Q$  vytvořit na základě porovnání jedné nebo více složek vektorů  $\underline{x}$  a  $\underline{v}$ . Za předpokladu, že  $\underline{x}$  a  $\underline{v}$  budou mít stejný rozměr, bude kritérium minima střední kvadratické odchylky vektorů  $\underline{x}$  a  $\underline{v}$

$$Q = \int_0^T \underline{\xi}^T \underline{\xi} dt = \int_0^T (\underline{x} - \underline{v})^T (\underline{x} - \underline{v}) dt \quad (5.7)$$

nebo s použitím váhové funkce  $w$

$$Q = \int_0^T \underline{\xi}^T w \underline{\xi} dt = \int_0^T (\underline{x} - \underline{v})^T w (\underline{x} - \underline{v}) dt \quad (5.8)$$

Předpokládáme-li lineární proces, jehož parametry jsou neproměnné, bude kritérium  $Q$  funkcí doby integrace  $T$  a parametrů  $\underline{\alpha}$ , zkráceně zapsáno  $Q = Q(\underline{\alpha}, T)$ .

Vycházíme-li při identifikaci z předpokladu známé struktury modelu, zadané v parametrickém tvaru, potom úloha identifikace zjednodušíme na úlohu optimálního odhadu parametrů. To dále znamená, že můžeme využít všech kritérií pro optimální odhad parametrů používaných ve statistice. Jedná se zvláště o kritérium minimálních čtverců odchylek (prakticky nejpoužívanější kritérium), kritérium maximální věrohodnosti a kritérium maximální pravděpodobnosti ve smyslu Bayesa.

## 5.2 Algoritmy pro minimalizaci kritériální funkce

Každý vektor parametrů modelu  $\underline{\alpha}$  při zvolené době integrace  $T$ , resp. i pro danou váhovou funkci  $w$  určuje hodnotu kritéria  $Q$ . Identifikace tkví v nalezení takového vektoru parametrů  $\underline{\alpha}^*$ , který bude minimalizovat zvolené kritérium  $Q$ . Píšeme

$$Q(t, \underline{\alpha}^*) = \min_{\underline{\alpha}} Q(T, \underline{\alpha}) \quad (5.9)$$

Optimální hodnoty parametrů modelu můžeme stanovit rozličným způsobem. Jsou takové případy, kdy je možno

- analytickým způsobem stanovit  $\underline{\alpha}^*$  - například v případě kritéria minima střední kvadratické odchylky,
- pokusným způsobem stanovit  $\underline{\alpha}^*$  - vhodné jenom tehdy, když počet parametrů modelu není velký
- gradientním způsobem, při kterém se vektor  $\underline{\alpha}^*$  určuje z podmínky nulového vektoru gradientu  $\nabla_{\underline{\alpha}} Q = 0$ .

Poznamenejme, že pro realizaci všech tří uvedených způsobů je třeba použít buď číslicový nebo analogový počítač, nebo nějaké speciální zařízení nazývané optimalizátor, neboť objem vyčíslení nebo experimentálních kroků iterací je značný.

Analytickému způsobu stanovení  $\underline{\alpha}^*$  je věnována následující podkapitola (5.3). Při druhém a to pokusném způsobu se postupně hodnoty  $\underline{\alpha}, \underline{\alpha}^{(0)}, \underline{\alpha}^{(1)}, \underline{\alpha}^{(2)}, \underline{\alpha}^{(3)} \dots$  atd. vybírají buď náhodně nebo podle určitého vzorového postupu pro prostor parametrů a parametrům odpovídající hodnoty kritérií  $Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}, \dots$  atd. Někakým jednoduchým testem se potom určuje, která hodnota  $Q$  je minimální a jí odpovídající hodnoty parametrů  $\underline{\alpha}$  se potom považují za  $\underline{\alpha}^*$ . Je jasné, že pokusný způsob (heuristický) určení hodnot  $\underline{\alpha}^*$  vyžaduje celou řadu iterací, a proto z hlediska identifikace si tento způsob realizace vyžaduje použití velmi rychlého počítače.

Třetí způsob (gradientní) využívá ke stanovení optimální hodnoty  $\underline{\alpha}^*$  té skutečnosti, že pro  $Q_{\min}$  je podmínkou, aby se vektor gradientu  $\nabla_{\underline{\alpha}} Q$  rovnal nule.

$$\nabla_{\underline{\alpha}} Q = \left[ \frac{\partial Q}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_2}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_n} \right]^T = 0 \quad (5.10)$$

Tato podmínka je však pouze nutnou podmínkou pro lokální minimum kritéria  $Q$ . Má-li funkce  $Q$  více lokálních minim, potom pouze opakovaným použitím gradientového způsobu z různých počátečních podmínek  $\underline{\alpha}^{(0)}$  můžeme najít globální minimum.

Existuje celá řada variant gradientních způsobů pro stanovení optimálních hodnot parametrů. Společným znakem všech je, že nastavují parametry ve směru paralelním s vektorem gradientu, přičemž se hodnoty parametrů, resp. jejich odhady pro nejbližší krok  $(i + 1)$  určují podle hodnoty parametru v  $i$ -tém kroku a

gradientu kriteria v bodě  $Q[\underline{\alpha}^{(i)}]$ , což vyjádříme vztahem

$$\underline{\alpha}^{(i+1)} = \underline{\alpha}^{(i)} - K \nabla_{\underline{\alpha}} Q[\underline{\alpha}^{(i)}] \quad (5.11)$$

kde  $K = k I$  je matice konstant  $k$ , zvolených jistým způsobem za účelem přiřazení určitých a přitom různých vah jednotlivým složkám vektoru gradientu. A právě způsob volby matice  $K$  je charakteristický a určující pro různé modifikované varianty gradientních metod. Tak například pro gradientní metodu nejrychlejšího kroku

$$K = k I \quad (5.12)$$

metodu Newtonovu-Raphsonovu

$$K = \frac{Q(\alpha)}{\|\nabla Q(\alpha)\|^2} \quad (5.13)$$

metodu Newtonovu

$$K = \left[ \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \right]^{-1} \quad (5.14)$$

atd.

Vektor gradientu v  $i$ -tém kroku iterace můžeme zásadně stanovit dvěma způsoby, a to buď metodou konečných diferencí nebo metodou citlivostních funkcí. V prvém případě složku gradientu určujeme podle vztahu

$$\frac{\partial Q[\alpha^{(i)}]}{\partial \alpha} = \frac{Q[\alpha^{(i)} + \Delta \alpha] - Q[\alpha^{(i)}]}{\Delta \alpha} \quad (5.15)$$

kde  $\Delta \alpha$  je malý přírůstek parametru  $\alpha$ .

Stanovení gradientu druhým způsobem si ukážeme na příkladu modelu s jedním parametrem  $\alpha$  (model bude mít strukturu)

$$\dot{v} = f_m(v, \alpha) \quad (5.16)$$

označení je v souladu s obr. 5.1.

Zvolíme-li kriterium minima střední kvadratické odchytky, potom

$$Q[\alpha^{(i)}] = \int_0^t \varepsilon^2(t) dt = \int_0^t \{(y - v)[\alpha^{(i)}]\}^2 dt \quad (5.17)$$

kde  $\alpha^{(i)}$  je hodnota parametru při  $i$ -té iteraci. Pro gradient potom dostaneme

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = -2 \int_0^t \varepsilon(t) \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) dt \quad (5.18)$$

Derivováním vztahu(5.16) podle  $\alpha$  dostaneme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial t} = \frac{\partial f_m}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_m}{\partial \alpha} \quad (5.19)$$



a za předpokladu, že řešení  $v(t, \alpha)$  je spojitě jak v  $t$ , tak i v  $\alpha$ , dostaneme novou diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial f_m}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial f_m}{\partial \alpha} \quad (5.20)$$

jejíž řešením dostaneme  $\partial v / \partial \alpha$ . Dosazením řešení pro  $\partial v / \partial \alpha$  do rovnice (5.18), dostaneme hledaný gradient. Praktická aplikace gradientního přístupu k identifikaci je uvedena v kapitole 10.

### 5.3 Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců patří mezi nejstarší a dnes již klasické statistické metody řešení. Od doby, kdy ji K.F. Gauss v roce 1795 navrhl a poprvé použil k výpočtu drah "těles nebeských", nalezla tato metoda uplatnění v nejrůznějších oblastech a umožnila tak posuzovat mnohé úlohy z jednotného teoretického hlediska. V našem případě použijeme metodu nejmenších čtverců k řešení různých modifikací úloh odhadu parametrů regulovaných soustav, jak o tom pojednává 9. kapitola.

#### 5.3.1 Formulace úlohy

Předpokládejme, že matematický model dynamické  $k$ -invariantní soustavy s jedním vstupem a s jedním výstupem je tvaru lineárního zobecněného regresního modelu

$$y(k) = \sum_{i=1}^{\partial a} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{\partial b} b_i u(k-i) + n(k) \quad (5.21)$$

kde  $u$  je vstupní veličina,  $y$  je výstupní veličina a  $n$  představuje šum, který se vyskytuje v každém okamžiku pozorování  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ . Úlohou je provést odhad parametrů soustavy.

V případě otevřené smyčky mohou být hodnoty  $u(k-i)$  považovány za konstanty. Naproti tomu v uzavřeném regulačním obvodu jsou hodnoty  $u(k)$  počítány pomocí měřených minulých výstupů. Přitom hodnoty  $y(k)$  jsou v důsledku působení šumu  $n$  pozorovanými hodnotami náhodné veličiny  $y$ . Zdůrazníme-li tuto skutečnost, lze říci, že všechny veličiny uzavřeného regulačního obvodu, který je popsán zobecněným regresním modelem (5.21), jsou náhodné veličiny.

Šum může být plně popsán prvním a druhým statistickým momentem, tj. jeho střední hodnotou a kovarianční maticí za předpokladu, že šum je Gaussův. V takovém případě, omezíme-li se na  $\hat{\xi}[n]$  a  $\text{cov}[n]$ , se neztrácí žádná informace o šumu, neboť hustota pravděpodobnosti Gaussova šumu je plně charakterizována jeho prvním a druhým momentem

$$\hat{\xi}[n]^T = \hat{\xi}[n(1), n(2), \dots, n(K)], \quad (5.22)$$

$$R_n = \hat{\xi}[n n^T] = \begin{bmatrix} \hat{\xi}[n(1) n(1)] & \dots & \hat{\xi}[n(1) n(K)] \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{\xi}[n(K) n(1)] & \dots & \hat{\xi}[n(K) n(K)] \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Předpokládejme, že veličiny  $u$  a  $y$  jsou měřitelné, zatímco šum  $n$  je neměřitelný. Neznámé parametry  $a_i, i=1, 2, \dots, \partial a$  a  $b_i, i=0, 1, 2, \dots, \partial b$  lze považovat za vá-

nové koeficienty regresního modelu (5.21). Úkolem je, jak již bylo řečeno, odhadnout tyto parametry s využitím změřených hodnot veličin  $u$  a  $y$  v časových okamžicích  $k$  tak, aby součet čtverců chyb rovnic (5.21), příslušných jednotlivým měřením, byl s odhady parametrů minimální.

Předpokládejme, že horní meze  $\sigma_a$  a  $\sigma_b$  v (5.21) jsou známé. Obecně  $\sigma_a \leq \sigma_b$ . Aniž bychom redukovali obecnost dalších úvah, je možné dosadit  $\sigma_a = \sigma_b = N$ . Toto zjednodušení může být výhodné, jestliže  $\sigma_a$  a  $\sigma_b$  jsou neznámé a nejlepší hodnoty těchto parametrů se odhadují vyhodnocováním změřených dat pro  $\sigma_a = \sigma_b = N$ ,  $N = 0, 1, 2, \dots$ .

Dále se předpokládá, že hodnoty šumu, který je v rov. (5.21) vyjádřen složkou  $n(k)$ , jsou vzájemně nezávislé, že jsou všechny stejně distribuované a že hustota pravděpodobnosti  $f(n_k)$ ,  $n_k = n(k)$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ , je normální hustota pravděpodobnosti. Kromě toho se předpokládá, že hodnoty šumu  $n(k)$  nejsou korelovány se vstupy  $u(k)$  a s užitečným t.j. neměřitelným a šumem neovlivněným virtuálním výstupem  $y_v(k)$ . Aby odhady parametrů byly neposunuté, předpokládá se takřka vždy, že

$$E[n_k] = 0 \quad (5.24)$$

Většinou víme ale málo o skutečných vlastnostech šumu. Proto je kovarianční matice, která je za těchto předpokladů tvaru

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_K^2 \end{bmatrix} \quad \sigma_k^2 \text{ je rozptyl} \quad (5.25)$$

pro praktické výpočty stále ještě nevýhodná, protože má různé hodnoty rozptylů na hlavní diagonále. Předpokládejme proto stejné hodnoty rozptylů ve všech okamžicích měření. Dostaneme tak nejjednodušší možný tvar kovarianční matice (5.25), který odpovídá tvaru přijatému pro obyčejné nejmenší čtverce. Potom

$$R = \sigma^2 I \quad I - \text{jednotková matice} \quad (5.26)$$

Kovarianční matice tvaru (5.26) udává, že měření uskutečněná v jednotlivých časových okamžicích  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , jsou zkreslena šumem, který má ve všech okamžicích  $k$  stejné statistické vlastnosti nebo, což je totéž, všechna měření jsou uskutečněna se stejnou přesností. Tato okolnost je ve skutečnosti v dobrém souladu s většinou praktických situací.

Naproti tomu, nemáme-li stejnou důvěru ke všem měřením avšak umíme vážit tento druh nejistoty, můžeme uplatňovat váhovou matici  $W$  místo matice  $\sigma^2 I$  v (5.26). Předpokládá se, že matice  $W$  je maticí diagonální. Jsou-li chyby pozorování obecně vzájemně závislé, je pak váhová matice  $W$  čtvercovou maticí nediagonální.

Vraťme se nyní opět k zobecněnému regresnímu modelu (5.21). Tento model můžeme formálně přepsat na tvar (poznámka: vektory nepodtrhány, matice velká) písmena

$$y(k) = z^T(k) \hat{v} + n(k) \quad (5.27)$$

slovně: Pozorování = užitečný signál + šum

Ve vztahu (5.27)

$$z^T(k) = [u(k-N), y(k-N), \dots, u(k-1), y(k-1), u(k)]$$

$$\mathcal{S}^T = [b_N, a_N, \dots, b_1, a_1, b_0] \quad (5.28)$$

Pro  $k = 1, 2, \dots, K$  představuje vztah (5.27) soustavu lineárních algebraických rovnic, kterou lze napsat ve vektorově maticovém tvaru

$$y = Z \hat{v} + n \quad (5.29)$$

kde

$$y^T = [y(1), y(2), \dots, y(K)]$$

$$n^T = [n(1), n(2), \dots, n(K)]$$

a

$$Z = \begin{bmatrix} u(1-N), y(1-N), \dots, u(0), & y(0), & u(1) \\ \dots & & \cdot \\ \dots & & \cdot \\ u(K-N), y(K-N), \dots, u(K-1), y(K-1), & u(K) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Existují i jiná uspořádání parametrů a změřených hodnot ve vektorech a maticích vztahů (5.27) a (5.29) jak ukazují příklady v kapitole 9.

Pro statistické a pravděpodobnostní řešení je třeba, aby počet pozorování  $K$  byl mnohem větší než je počet  $2N + 1$  odhadovaných parametrů v rov. (5.21) nebo (5.29). Tudiž

$$K \gg 2N + 1 \quad (5.31)$$

Označme odhad  $\hat{v}$  vypočtený pomocí změřených dat jako  $\hat{v}(k)$  a zaveďme chybu, která přísluší  $k$ -tému měření:

$$e(k) = y(k) - z^T(k) \hat{v}(k), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5.32)$$

Tato chyba se často nazývá jako chyba měření, chyba rovnice nebo jako residuum. Příslušný vektoro maticový tvar rov. (5.32), vyplývající z rov. (5.29), je

$$e = y - Z \hat{v} \quad (5.33)$$

kde

$$e^T = [e(1), e(2), \dots, e(K)] \quad (5.34)$$

Vektory  $y$  a  $\hat{v}$  a matice  $Z$  jsou definovány v (5.28) a (5.30).