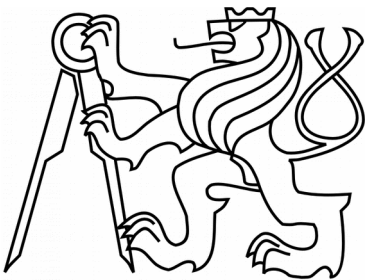




Lineární klasifikátory a kernel funkce



Geometrické modely



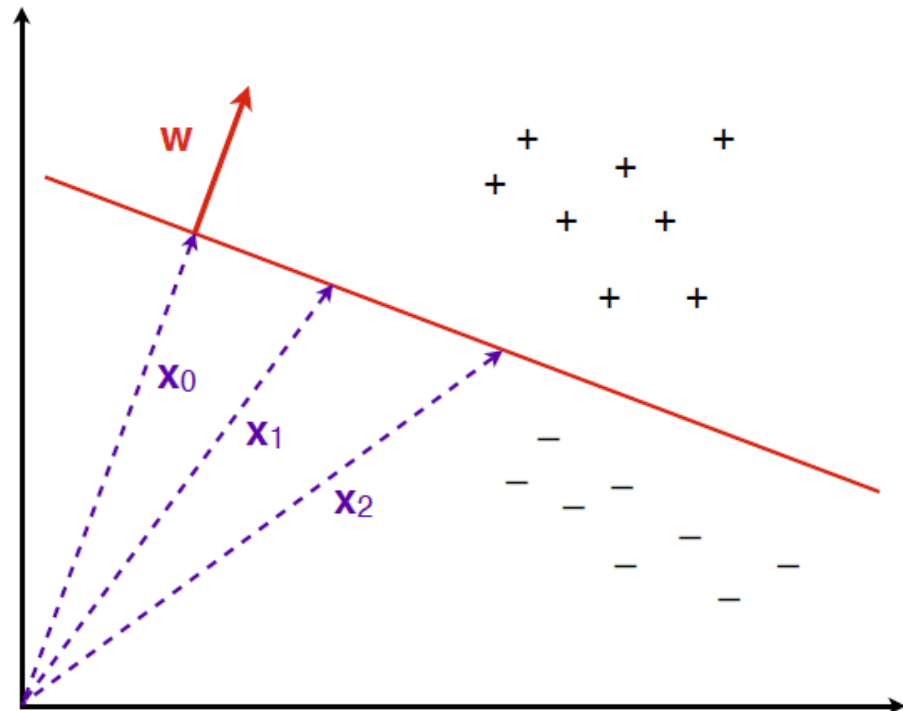
- ❖ Geometrický model hledá hranici mezi pozitivními a negativními příklady, která má **tvar geometrického útvaru** (přímka, rovina, koule, ..)
- ❖ Lineární model má obecně tvar $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = t$, kde \mathbf{x} je bod na hranici a \mathbf{w} vektor směřující kolmo na tuto hranici a operace „ \cdot “ reprezentuje

skalární součin

Poznámka. Není-li řečeno jinak, je (x, y) chápáno ve dvou významech. Může jít o

- **bod** se příslušnými souřadnicemi
- **vektor** mezi body $(0, 0)$ a (x, y) .

Proto se v dalším někdy oba pojmy používají jako synonyma.

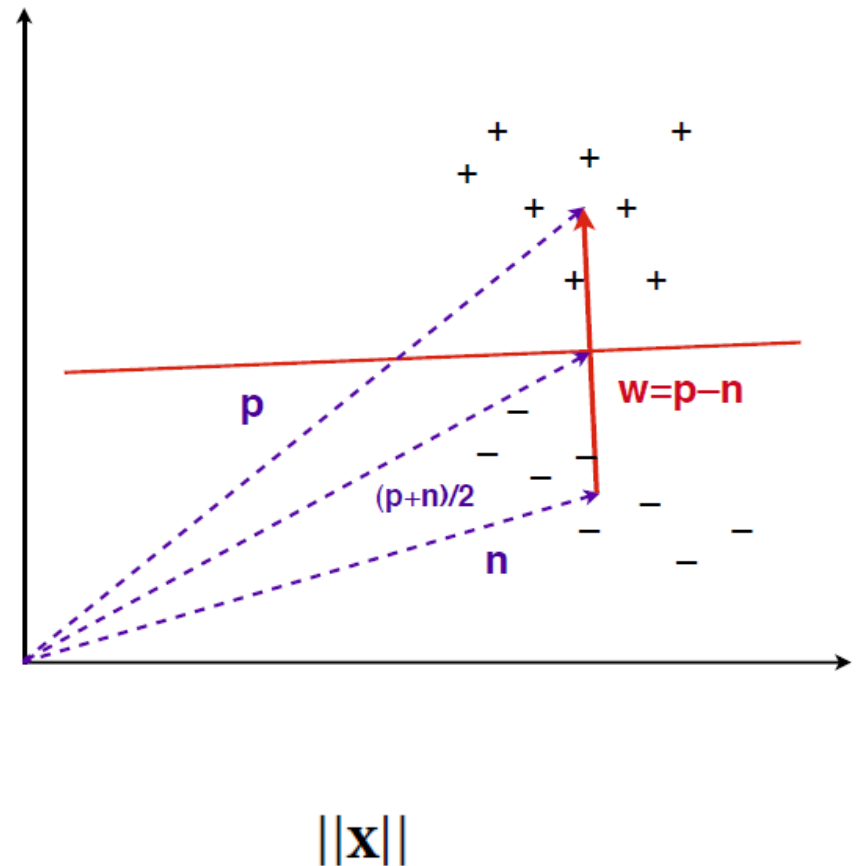




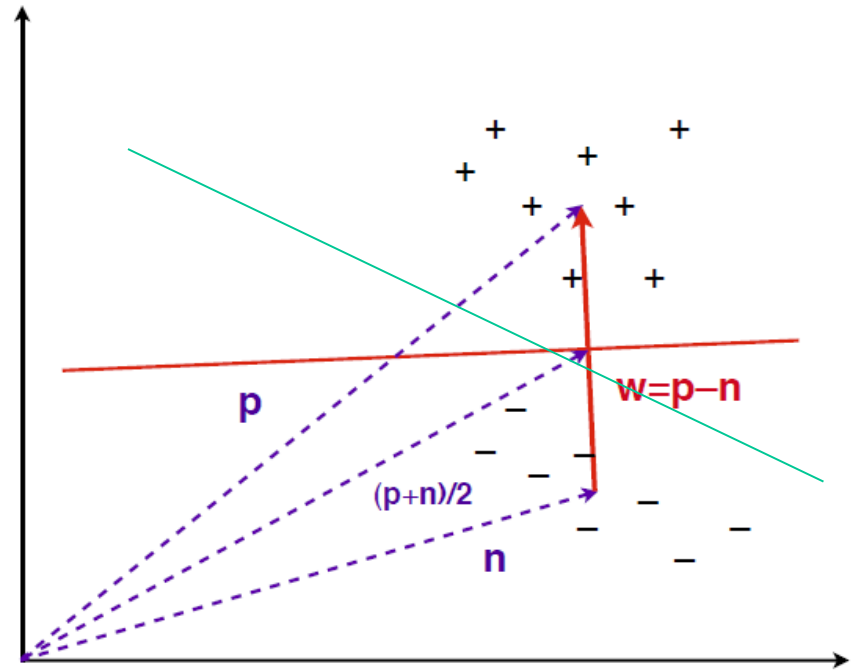
Hledáme \mathbf{w} a t tak, aby hranici tvořily body \mathbf{x} splňující rovnici
$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = t \quad (1)$$

Jednoduchý postup, jak najít vhodnou hranici, je vyjít z \mathbf{p} a \mathbf{n} , která označují „těžiště“ pro množinu pozitivních, resp. negativních příkladů.

V takovém případě musí být bod $(\mathbf{p} + \mathbf{n})/2$ na příslušné hranici, a tedy pro něj platí rovnice (1).

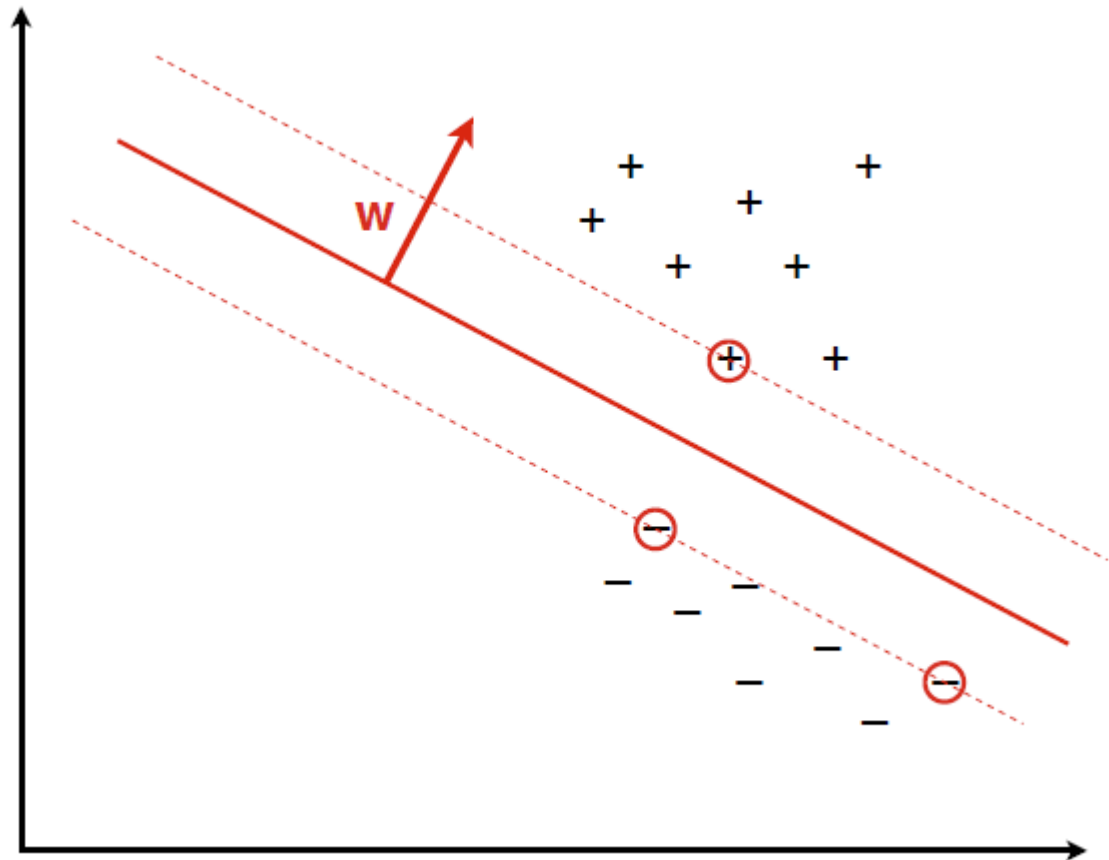


$$t = (\mathbf{p} - \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{n})/2 = (\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2)/2$$



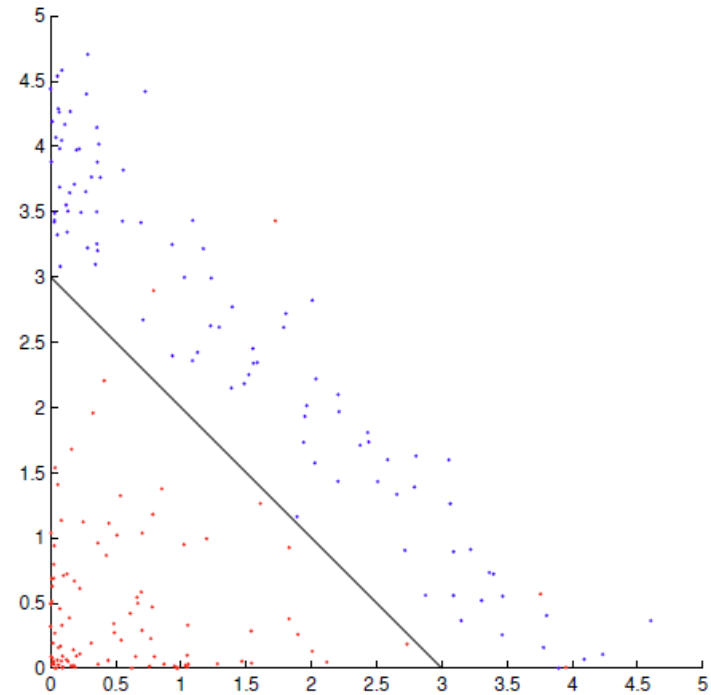
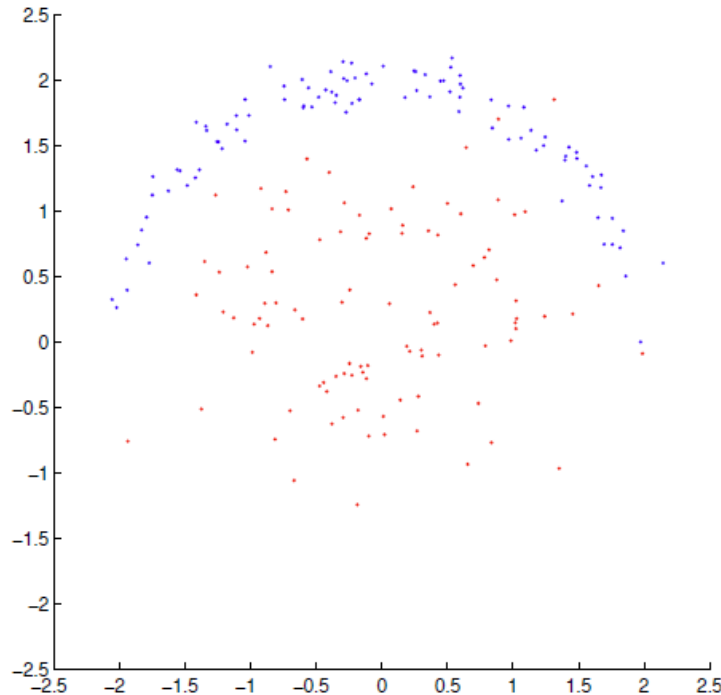


- ❖ Vhodných hranic je velmi mnoho : jak vybrat tu správnou?
- ❖ Přirozené kritérium volí hranice, v jejichž blízkém okolí nejsou žádné body trénovací množiny (**large margin classifiers** - LMC).
- ❖ Hledání LMC realizuje **support vector machine**





Co s daty, která nejsou lineárně separabilní?



Transformace původního bodu (x,y) v obr. a) do jiných souřadnic, v tomto případě na bod $(x',y') = (x^2,y^2)$, viz obr. b), situaci zásadně změní:

Body se stanou separabilní a vhodná hranice je např. $x'+y' = 3$



- ❖ Není nutné se omezovat jen na transformace do prostoru stejné dimenze jako byl ten původní. Použijme transformaci

$$(x, y) \mapsto (x^2, y^2, \sqrt{2}xy)$$

Uvažujme body $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ a $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ transformované na body $\mathbf{x}'_1 = (x_1^2, y_1^2, \sqrt{2}x_1y_1)$ a $\mathbf{x}'_2 = (x_2^2, y_2^2, \sqrt{2}x_2y_2)$. Abychom mohli hledat lineární hranici v novém prostoru, budeme potřebovat počítat **skalární součin** $\mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}'_2$:

$$\mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}'_2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1y_1x_2y_2 = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 = (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2$$

- ❖ Funkce, která dokáže vypočítat hodnotu skalárního součinu pro vektory (body) \mathbf{x}'_1 a \mathbf{x}'_2 z nového prostoru pouze z původních hodnot $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ a $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ se nazývá **kernel funkce**. Zde je kernel $\kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2$

Kernel trik: kernel funkce a hledání hranice



❖ Kernel nám pomůže určit mez v původním prostoru, pokud obrazy \mathbf{p}' a \mathbf{n}' původních těžišť $\mathbf{p}=(0,1)$ a $\mathbf{n}=(0,0)$ budou těžišti i v novém prostoru. Předpokládejme, že to platí pro malé množiny dat.

❖ Pro jednoduchost necht' \mathbf{p} je získáno jako těžiště dvou bodů, např. $\mathbf{p}_1=(-1,1)$ a $\mathbf{p}_2=(1,1)$, tedy $\mathbf{p}=\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$. Rovnice hranice v novém prostoru je pak

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{n}') \cdot \mathbf{x}' = t, \quad \text{čili}$$

$$(\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2') - \mathbf{n}') \cdot \mathbf{x}' = t \text{ a po úpravě}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{p}_1' \cdot \mathbf{x}' + \frac{1}{2}\mathbf{p}_2' \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{n}' \cdot \mathbf{x}' = t \quad (1)$$

❖ Zajímá nás **geometrické místo** těch bodů $\mathbf{x} = (x,y)$ v původním prostoru, jejichž obraz \mathbf{x}' leží na právě určené lineární hranici. Vyjdeme z rovnice (1) a využijeme výhody „kernel triku“ pro výpočet skalárního součinu (zde $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{x}' = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2$). Tedy upravíme (1) na $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x})^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x})^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2 = t$ **(1a)** po dosazení hodnoty souřadnic bodů \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 a \mathbf{n} do (1a) :

$$\frac{1}{2}(-x+y)^2 + \frac{1}{2}(x+y)^2 - (0 \cdot x + 0 \cdot y)^2 = t \quad \text{čili} \quad x^2 + y^2 = t, \text{ což je rovnice}$$

hranice pro původní prostor !