

1. Dokažte, zda platí následující tvrzení. Tip: K důkazům použijte typový systém probíraný na přednáškách.:

a)  $\{X <: Y, Z <: X, Y <: Top\} \vdash X + ((X \times Z) \rightarrow Z) <: Y + ((Z \times Z) \rightarrow X)$

b)  $\{Z <: X, Y <: Z, X <: Top\} \vdash (X \rightarrow Z) \times (Y \rightarrow X) <: (X \rightarrow X) \times (X \rightarrow Y)$

2. Rozšířte uvedený jazyk o implicitní přetypování čísel (*Number*) na logické hodnoty (*Boolean*) tak, jako v jazyce C.

### Syntax

$$\begin{aligned}
 \textit{Expr} ::= & \textit{Num} \mid \\
 & \textit{Bool} \mid \\
 & \Delta \textit{Expr} \mid \\
 & \textit{Expr} \odot \textit{Expr} \mid \\
 & \textit{Expr} \leq \textit{Expr} \mid \\
 & \textit{Expr} \textbf{ nand } \textit{Expr} \mid \\
 & \textbf{if } \textit{Expr} \textbf{ then } \textit{Expr} \textbf{ else } \textit{Expr},
 \end{aligned} \tag{1}$$

kde *Num* představuje celá čísla a *Bool* je množina logických hodnot (*true*, *false*).

### Typový systém

$e, e', e'', \dots \in \textit{Expr}$ ,  $b, b' \in \textit{Bool}$  a  $n, n' \in \textit{Num}$ .

$$\frac{}{n : \textit{Number}} \tag{2}$$

$$\frac{}{b : \textit{Boolean}} \tag{3}$$

$$\frac{e : \textit{Number}}{\Delta e : \textit{Number}} \tag{4}$$

$$\frac{e : \textit{Number} \quad e' : \textit{Number}}{e \odot e' : \textit{Number}} \tag{5}$$

$$\frac{e : \textit{Number} \quad e' : \textit{Number}}{e \leq e' : \textit{Boolean}} \tag{6}$$

$$\frac{e : \textit{Boolean} \quad e' : \textit{Boolean}}{e \textbf{ nand } e' : \textit{Boolean}} \tag{7}$$

$$\frac{e : \textit{Boolean} \quad e' : \textit{Number} \quad e'' : \textit{Number}}{\textbf{if } e \textbf{ then } e' \textbf{ else } e'' : \textit{Number}} \tag{8}$$

$$\frac{e : \textit{Boolean} \quad e' : \textit{Boolean} \quad e'' : \textit{Boolean}}{\textbf{if } e \textbf{ then } e' \textbf{ else } e'' : \textit{Boolean}} \tag{9}$$

3. Pomocí normální a aplikativní strategie vyhodnoťte následující výrazy:  $(T I I)x$ ,  $(T I \Omega)x$ ,  $(T \Omega I)x$ ,  $(T \Omega \Omega)x$ , kde  $I$  a  $\Omega$  označují standardní kombinátory:

$$T \equiv \lambda X.\lambda Y.X$$

$$I \equiv \lambda X.X$$

$$\Omega \equiv (\lambda X.XX)(\lambda X.XX)$$

4. Definujte standardní programovou strukturu *switch* jako funkci:

$$(State \rightarrow N) \times (N \rightarrow Action) \rightarrow Action$$

kde

$$Action = State \rightarrow State$$

5. Matematicky definujte a také slovně popište vlastnost *konfluence*. Tvrzení: *konfluentní přechodová relace operační sémantiky implikuje existenci pouze jedné její finální konfigurace*. Dokažte, případně vyvráťte správnost tohoto tvrzení.