

1. Dokažte, zda platí následující tvrzení. Tip: K důkazům použijte typový systém probíraný na přednáškách.:

a) $\{X <: Y, Y <: Top\} \vdash \mu Y.(Y \rightarrow Y) <: \mu X.(X \rightarrow Y)$

b) $\{A <: B, B <: C, D <: C, C <: Top\} \vdash A + B <: C + D$

2. Napište definici funkce *and*. Vracená akce by měla svůj výsledek vyhodnocovat líně, tzn. vyhodnocovat druhý operand pouze pokud je to nutné. Pozor: druhý operand byste neměli vyhodnocovat nad počátečním stavem.

$$\mathit{and} : (\mathit{State} \rightarrow \mathit{Bool} \times \mathit{State}) \times (\mathit{State} \rightarrow \mathit{Bool} \times \mathit{State}) \rightarrow (\mathit{State} \rightarrow \mathit{Bool} \times \mathit{State}) \quad (1)$$

3. Nadefinujte přepisovací relaci \rightarrow popisující hru Hanojské věže. Tato relace by měla přepisovat n -tice sekvencí přirozených čísel z intervalu $[1, k]$ (n je počet kolíků, k je počet desek), tzn. například $(\langle 1, 2, 3 \rangle, \epsilon, \epsilon) \rightarrow (\langle 2, 3 \rangle, \langle 1 \rangle, \epsilon)$. Jeden prvek relace \rightarrow reprezentuje přesun jednoho koutouče.

4. V lambda kalkulu napište funkci, která k zadanému n pomocí rekurze spočte a vrátí $\sum_{i=0}^n i$. Standardní (tzn. v učebnici definované) kombinátoři rozepisovat nemusíte, pokud chcete, můžete si nadefinovat i kombinátoři svoje vlastní. Použijte Churchovu reprezentaci čísel. Pro hodnotu $n = 4$ demonstруйте postup výpočtu - pro lepší čitelnost použijte symbolické označení standardních kombinatorů, operátorů a čísel.

5. Napište definici funkce $f : (A \rightarrow B) \times (B \rightarrow C) \rightarrow (A^* \rightarrow C^*)$, která ke vstupním funkcím g, h vrátí funkci, která na každou hodnotu ze svého vstupního seznamu zavolá funkci $(h \circ g) : A \rightarrow C$ a takto získané hodnoty opět vrátí jako seznam.

Tip: Definice kompozice funkcí je:

$$a : Y \rightarrow Z, b : X \rightarrow Y$$

$$(a \circ b) : X \rightarrow Z$$

$$(a \circ b)(x) = a(b(x)).$$

$$f(g, h) = \tag{2}$$