Příklady na fuzzy množiny, RZN 2009
M. Navara

1. Na univerzu $X = \{a, b, c, d\}$ je dána fuzzy množina

$$\mu_A = \big\{(a; 0{,}3), (b; 1), (c; 0{,}5)\big\}.$$

Najděte její horizontální reprezentaci.

2. Fuzzy množina A má horizontální reprezentaci

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \begin{cases} \{a, b, c, d\} & \text{pro } \alpha \in \langle 0, 1/3\rangle, \\ \{a, d\} & \text{pro } \alpha \in (1/3, 1/2\rangle, \\ \{d\} & \text{pro } \alpha \in (1/2, 2/3\rangle, \\ \emptyset & \text{pro } \alpha \in (2/3, 1\rangle. \end{cases}$$

Najděte její vertikální reprezentaci.

3. Fuzzy množina A má horizontální reprezentaci

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \begin{cases} \{a, b, c\} & \text{pro } \alpha = 0, \\ \{a\} & \text{pro } \alpha \in (0, 1/2\rangle, \\ \{a, b\} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte její vertikální reprezentaci.

4. Fuzzy množina A má horizontální reprezentaci

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \begin{cases} \{a, b\} & \text{pro } \alpha = 0, \\ \{a\} & \text{pro } \alpha \in (0, 1/2), \\ \emptyset & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte její vertikální reprezentaci.

5. Na univerzu $X = \mathbf{R}$ je dána fuzzy množina A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ 2 - x & \text{pro } x \in (1; 1{,}5\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte její horizontální reprezentaci.

6. Je dána horizontální reprezentace fuzzy množiny A:

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{pro } \alpha = 0, \\ \langle \alpha^2, 1) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte její vertikální reprezentaci.

7. Je dána horizontální reprezentace fuzzy množiny A:

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{pro } \alpha = 0, \\ (\alpha^2, 1) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte její vertikální reprezentaci.

8. Ukažte, že standardní negace $\underset{S}{\neg}\,\alpha = 1 - \alpha$ je fuzzy negací. Ověření proveďte dosazením do definičního vztahu fuzzy negace (viz. první přednáška a rovnice (N1) a (N2) v kapitole 3.3).

9. Pro která $\omega = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ je $f(\alpha) = (1 - \alpha)^\omega$ fuzzy negace?

10. Ukažte, že všechny negace ze Sugenovy třídy jsou fuzzy negace: $\underset{S_\lambda}{\neg}\,\alpha = \frac{1-\alpha}{1+\lambda\,\alpha}$ pro $\lambda \in (-1, \infty)$.

11. Rozhodněte, zda následující operace je fuzzy konjunkce.

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ \alpha\beta & \text{pro } \alpha\beta \geq 1/10,\ \max(\alpha,\beta) < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ř: První dvě alternativy zajišťují okrajovou podmínku, komutativita a monotonie jsou triviálně splněny, stejně jako asociativita v případě, že aspoň jeden z argumentů je jednotkový. Pro $\alpha, \beta, \gamma < 1$ asociativita vyplývá z výsledku

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \left(\beta \underset{\cdot}{\wedge} \gamma\right) = \begin{cases} \alpha\beta\gamma & \text{pro } \alpha\beta\gamma \geq 1/10, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

totéž dostaneme pro $\left(\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta\right) \underset{\cdot}{\wedge} \gamma$. Je to fuzzy konjunkce (interpretovatelná jako součin, v němž ignorujeme malé hodnoty, např. abychom zúžili pozornost na výsledky "dostatečně velké").

12. Rozhodněte, zda operace

$$\alpha \diamond \beta = \begin{cases} \alpha\beta & \text{pro } \alpha\beta \geq 0{,}01 \text{ nebo } \max(\alpha,\beta) = 1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je fuzzy konjunkce. Pokud ano, oklasifikujte ji.

13. Rozhodněte, zda operace $\underset{\cdot}{\wedge}\colon \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \begin{cases} \min(\alpha,\beta) & \text{pro } \alpha + \beta \geq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je fuzzy konjunkce. Pokud ano, oklasifikujte ji.

14. Rozhodněte, zda vždy platí

$$\underset{S}{\neg}(\alpha \underset{P}{\wedge} \underset{S}{\neg}\beta) = \beta \mathbin{\dot\vee} (\underset{S}{\neg}\alpha \underset{P}{\wedge} \underset{S}{\neg}\beta)$$

pro následující fuzzy disjunkce: (a) $\overset{S}{\vee}$, (b) $\overset{P}{\vee}$, (c) $\overset{L}{\vee}$

15. Posuďte, zda pro všechna $\alpha, \beta \in \langle 0,1\rangle$ platí $(\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) \underset{L}{\wedge} (\alpha \mathbin{\dot\vee} \underset{S}{\neg}\beta) = \alpha$, kde disjunkce $\dot\vee$ je

(a) standardní, $\overset{S}{\vee}$, (b) Łukasiewiczova, $\overset{L}{\vee}$, (c) součinová, $\overset{P}{\vee}$.

16. Rozhodněte, zda operace $\underset{\cdot}{\wedge}\colon \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha\,\beta & \text{pro } \alpha + \beta \geq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je fuzzy konjunkce. Pokud ano, oklasifikujte ji.

17. Posuďte, zda vždy platí $(\alpha \wedge \alpha) \vee (\alpha \wedge \alpha) \leq \alpha$ pro operace
(a) standardní, (b) součinové, (c) Łukasiewiczovy.

18. Rozhodněte, které z následujících vztahů vždy platí:
(a) $(\alpha \underset{S}{\wedge} \alpha) \overset{L}{\vee} (\alpha \underset{S}{\wedge} \beta) = \alpha \underset{S}{\wedge} (\alpha \overset{L}{\vee} \beta)$,
(b) $(\alpha \underset{L}{\wedge} \alpha) \overset{S}{\vee} (\alpha \underset{L}{\wedge} \beta) = \alpha \underset{L}{\wedge} (\alpha \overset{S}{\vee} \beta)$,
(c) $\alpha \overset{S}{\vee} (\alpha \underset{L}{\wedge} \beta) = \alpha \underset{L}{\wedge} (\alpha \overset{S}{\vee} \beta)$.
Své závěry odůvodněte.

19. Rozhodněte, které z následujících vztahů vždy platí:
(a) $(\alpha \underset{S}{\wedge} \beta) \underset{L}{\wedge} \gamma = \alpha \underset{S}{\wedge} (\beta \underset{L}{\wedge} \gamma)$,
(b) $\underset{S}{\neg}(\alpha \overset{P}{\vee} \beta) = \underset{S}{\neg}\alpha \underset{L}{\wedge} \underset{S}{\neg}\beta$,
(c) $(\alpha \underset{L}{\wedge} \alpha) \overset{L}{\vee} \underset{S}{\neg}\alpha = (\underset{S}{\neg}\alpha \underset{L}{\wedge} \underset{S}{\neg}\alpha) \overset{L}{\vee} \alpha$.
Své závěry odůvodněte.