Reprezentace znalostí pomocí fuzzy množin

Mirko Navara
http://cmp.felk.cvut.cz/~navara
6. prosince 2011

1 Pojem fuzzy množiny

1.1 Minimum o klasických množinách

Abychom se vyhnuli problémům, omezíme se na podmnožiny nějaké **univerzální množiny** (**univerza**) X
$\mathcal{P}(X)$ značí množinu všech podmnožin množiny X
Množinu $A \in \mathcal{P}(X)$ jednoznačně určuje její **charakteristická funkce** (**funkce příslušnosti**) $\mu_A : X \to \{0,1\}$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \notin A. \end{cases}$$

$$A = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}.$$

Pomocí značení

$$\mu_A^{-1}(M) = \{x \in X : \mu_A(x) \in M\}$$

lze psát

$$A = \mu_A^{-1}\big(\{1\}\big) = \mu_A^{-1}\big((0,1\rangle\big).$$

Místo $\mu_A^{-1}\big(\{1\}\big)$ píšeme $\mu_A^{-1}(1)$ apod.
Speciálně $\mu_\emptyset = 0$, $\mu_X = 1$.

1.2 Zavedení fuzzy množin

Fuzzy podmnožina univerza X (stručně **fuzzy množina**) je objekt A, který popisuje (zobecněná) **charakteristická funkce** (**funkce příslušnosti**) $\mu_A : X \to \langle 0,1\rangle$
Alternativní značení: $A(x)$
„Klasické“ množiny nazýváme v tomto kontextu **ostré** (angl. **crisp, sharp**).
$\mathcal{F}(X)$ značí množinu všech fuzzy podmnožin univerza X
Výška: $h(A) = \sup \operatorname{Range}(A)$
Nosič (angl. **support**): $\operatorname{Supp}(A) = \big\{x \in X : \mu_A(x) > 0\big\} = \mu_A^{-1}\big((0,1\rangle\big)$
Jádro (angl. **core**): $\operatorname{core}(A) = \big\{x \in X : \mu_A(x) = 1\big\} = \mu_A^{-1}(1)$

Příklady fuzzy množin

$A, B \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle, \\ 2-x & \text{pro } x \in (1,2\rangle, \\ 0 & \text{pro } x > 2, \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3, \\ 1 & \text{pro } x = 4, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x = 5, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Konečné fuzzy množiny zapisujeme stručněji např. $\mu_B = \{(3, \frac{1}{2}), (4, 1), (5, \frac{1}{4})\}$.
Alternativní značení: $\mu_B = \{\frac{1}{2}/3, 1/4, \frac{1}{4}/5\}$, $\mu_B = \frac{1}{2}/3 + 1/4 + \frac{1}{4}/5$.

2 Systém řezů fuzzy množiny

Definice: Nechť $A \in \mathcal{F}(X)$, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Pak **$\alpha$-hladina** (angl. **$\alpha$-level**) fuzzy množiny A je ostrá množina

$$\mu_A^{-1}(\alpha) = \big\{x \in X : \ \mu_A(x) = \alpha\big\}.$$

Systém řezů fuzzy množiny A je zobrazení $\mathcal{R}_A : \langle 0, 1\rangle \to \mathcal{P}(X)$, které každému $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ přiřazuje tzv. **α-řez** (angl. **α-cut**)

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \mu_A^{-1}\big(\langle \alpha, 1\rangle\big) = \big\{x \in X : \ \mu_A(x) \geq \alpha\big\}.$$

Alternativní značení: $[A]_\alpha$, $[A]^\alpha$, ${}^\alpha A$, ${}_\alpha A$
Triviálně platí pro všechna $A \in \mathcal{F}(X)$:

$$\begin{aligned} h(A) &= \sup\big\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle : \ \mathcal{R}_A(\alpha) \neq \emptyset\big\}, \\ \operatorname{core}(A) &= \mathcal{R}_A(1), \\ \mathcal{R}_A(0) &= X, \end{aligned}$$

2.1 Věta o systému řezů

Věta: Zobrazení $M : \langle 0, 1\rangle \to \mathcal{P}(X)$ je systém řezů nějaké fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(X)$, právě když
(R1) $M(0) = X$,
(R2) $0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\alpha) \supseteq M(\beta)$,
(R3) $0 < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\beta) = \bigcap\limits_{\alpha:\alpha<\beta} M(\alpha)$.

Důkaz: '$\Rightarrow$': (R1): $M(0) = \mathcal{R}_A(0) = X$.
(R2): $x \in M(\beta) = \mathcal{R}_A(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta > \alpha \Rightarrow x \in \mathcal{R}_A(\alpha) = M(\alpha)$.
(R3) '$\subseteq$': (R2) $\Rightarrow \forall \alpha \in \langle 0, \beta) : M(\beta) \subseteq M(\alpha) \Rightarrow M(\beta) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha:\alpha<\beta} M(\alpha)$.

(R3) '$\supseteq$': $x \in \bigcap\limits_{\alpha:\alpha<\beta} M(\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha:\alpha<\beta} \mathcal{R}_A(\alpha) \Rightarrow \forall \alpha \in \langle 0, \beta) : \mu_A(x) \geq \alpha$,
$\Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta \iff x \in \mathcal{R}_A(\beta) = M(\beta)$.

'$\Leftarrow$': Dokážeme, že $M = \mathcal{R}_A$, kde $\mu_A(x) := \sup\big\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle : \ x \in M(\alpha)\big\}$.
'$\subseteq$': $x \in M(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta \iff x \in \mathcal{R}_A(\beta)$,
'$\supseteq$': $x \in \mathcal{R}_A(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) = \sup\big\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle : \ x \in M(\alpha)\big\} \geq \beta$,
$\forall \alpha \in \langle 0, \beta) : x \in M(\alpha)$,
$x \in \bigcap\limits_{\alpha:\alpha<\beta} M(\alpha) = M(\beta)$.

2.2 Reprezentace fuzzy množin

Horizontální reprezentace: pomocí systému řezů
Vertikální reprezentace: pomocí funkce příslušnosti
Převod z horizontální do vertikální reprezentace:

$$\mu_A(x) = \max\bigl\{\alpha \in \langle 0,1\rangle :\ x \in \mathcal{R}_A(\alpha)\bigr\}.$$

Věta: Nechť $A \in \mathcal{F}(X)$. Pak

$$\mu_A = \max_{\alpha \in \langle 0,1\rangle} \alpha\, \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)} = \max_{\alpha \in \mathrm{Range}(A)} \alpha\, \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)},$$

kde maximum počítáme po bodech, tj.

$$\mu_A(x) = \max_{\alpha \in \mathrm{Range}(A)} \alpha\, \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)}(x).$$

2.3 Fuzzy inkluze

Klasická definice $A \subseteq B \iff \forall x \in A :\ x \in B$ se nehodí, neboť pro fuzzy množiny nemůžeme psát $x \in A, x \in B$
Nicméně $A \subseteq B \iff \forall x \in X :\ \mu_A(x) \le \mu_B(x) \iff \mu_A \le \mu_B$
Tuto definici používáme i pro **fuzzy množiny** A, $B \in \mathcal{F}(X)$:
$A \subseteq B \iff \forall x \in X :\ \mu_A(x) \le \mu_B(x) \iff \mu_A \le \mu_B$
$\iff \forall \alpha \in \langle 0,1\rangle :\ \mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$
Důkaz poslední ekvivalence:
'$\Rightarrow$': Nechť $\mu_A \le \mu_B$, $x \in \mathcal{R}_A(\alpha)$
$\alpha \le \mu_A(x) \le \mu_B(x)$, $x \in \mathcal{R}_B(\alpha)$, tj. $\mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$
'$\Leftarrow$': Nechť $\forall \alpha \in \langle 0,1\rangle :\ \mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$

$$\begin{aligned}\mu_A(x) &= \max\bigl\{\alpha \in \langle 0,1\rangle :\ x \in \mathcal{R}_A(\alpha)\bigr\}\\ &\le \max\bigl\{\alpha \in \langle 0,1\rangle :\ x \in \mathcal{R}_B(\alpha)\bigr\} = \mu_B(x)\end{aligned}$$

2.4 Řezová konzistence

Vlastnost P fuzzy množin $A_1, \ldots, A_n$ je předpis, který argumentům $A_1, \ldots, A_n$ přiřazuje ostrou pravdivostní hodnotu $P(A_1, \ldots, A_n) \in \{0,1\}$ („predikát“).
Vlastnost P fuzzy množiny se nazývá

- **řezově dědičná** (angl. **cutworthy**), jestliže

$$P(A_1, \ldots, A_n) \Rightarrow (\forall \alpha \in (0,1\rangle : P(\mathcal{R}_{A_1}(\alpha), \ldots, \mathcal{R}_{A_n}(\alpha)))\,,$$

- **řezově konzistentní**, jestliže

$$P(A_1, \ldots, A_n) \iff (\forall \alpha \in (0,1\rangle : P(\mathcal{R}_{A_1}(\alpha), \ldots, \mathcal{R}_{A_n}(\alpha)))\,.$$

(0-řezy záměrně neuvažujeme)

Příklady řezové dědičnosti a konzistence

Inkluze je řezově konzistentní.
Silná normalita, $\exists x \in X: \ \mu_A(x) = 1$, je řezově konzistentní.
Ostrost množiny je řezově dědičná, ale není řezově konzistentní.

2.5 Konvexní fuzzy množiny

Nechť L je lineární prostor.
Ostrá množina $A \subseteq L$ je **konvexní**, jestliže

$$\forall x, y \in A \ \forall \lambda \in (0,1) : \lambda x + (1-\lambda)\, y \in A$$

Pomocí funkcí příslušnosti:

$$\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \leq \mu_A\big(\lambda x + (1-\lambda)\, y\big)$$

Nechť X je ostrá konvexní podmnožina lineárního prostoru.
Fuzzy množina $A \in \mathcal{F}(X)$ se nazývá **konvexní**, jestliže

$$\forall x, y \in X \ \forall \lambda \in (0,1) : \quad \mu_A\big(\lambda x + (1-\lambda)\, y\big) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

Konvexita fuzzy množiny nemá nic společného s konvexitou její funkce příslušnosti!
Věta: Konvexita je řezově konzistentní vlastnost.
Speciálně fuzzy množina reálných čísel je konvexní, právě když všechny její neprázdné řezy jsou intervaly.

3 Operace s fuzzy množinami odvozené od operací s jejich prvky

3.1 Fuzzy čísla a fuzzy intervaly

Fuzzy interval je $A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$ taková, že:

- pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$ je $\mathcal{R}_A(\alpha)$ uzavřený interval,
- $\operatorname{Supp} A$ je omezená množina,
- $\mathcal{R}_A(1) \neq \emptyset$ (tj. $\mathcal{R}_A(1)$ je neprázdný uzavřený interval).

Je-li navíc $\mathcal{R}_A(1)$ jednobodová množina, nazývá se A **fuzzy číslo**.
Fuzzy intervaly jsou konvexní.
Značení (význam rozlišen podle počtu argumentů):
$\langle a, c, d, b\rangle$ lichoběžníkový fuzzy interval,
$\langle a, c, b\rangle = \langle a, c, c, b\rangle$ trojúhelníkové fuzzy číslo,
$\langle a, b\rangle = \langle a, a, b, b\rangle$ ostrý interval,
$a = \langle a, a\rangle = \langle a, a, a\rangle = \langle a, a, a, a\rangle$ ostré číslo.

3.2 Rozšíření zobrazení (funkcí, unárních operací) na ostré množiny

Zobrazení je $F\colon X \to Y$ je relace $F \subseteq X \times Y$ taková, že

$$\forall x \in X \; \exists! y = F(x) \in Y : (x, y) \in F\,.$$

Zobrazuje prvky z X na prvky z Y, např. čísla na čísla.
Rozšíření zobrazení $F\colon X \to Y$ je zobrazení $F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$:

$$F(A) \quad = \quad \{F(x) : \; x \in A\}\,.$$

Analogicky $F^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$:

$$F^{-1}(B) \quad = \quad \{x \in X : \; F(x) \in B\}\,,$$

speciálně

$$F^{-1}(y) = F^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : \; F(x) = y\}\,.$$

Rozšíření F a F^{-1} jsou zobrazení, nejsou však navzájem inverzní.
Zobrazují podmnožiny X na podmnožiny Y, např. množiny čísel na množiny čísel.
Pomocí funkcí příslušnosti:

$$\begin{aligned}
\mu_F(x, y) \quad &= \quad \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, y) \in F\,, \text{tj. } y = F(x)\,, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases} \\
\mu_{F(A)}(y) \quad &= \quad \max_{x \in X}\bigl(\mu_F(x, y) \wedge \mu_A(x)\bigr) = \max_{x \in X} \min\bigl(\mu_F(x, y), \mu_A(x)\bigr)\,, \\
\mu_{F^{-1}(B)}(x) \quad &= \quad \max_{y \in Y}\bigl(\mu_F(x, y) \wedge \mu_B(y)\bigr) = \max_{y \in Y} \min\bigl(\mu_F(x, y), \mu_B(y)\bigr)\,.
\end{aligned}$$

3.3 Rozšíření zobrazení (funkcí, unárních operací) na fuzzy množiny

(se zvláštním zřetelem na fuzzy čísla)
Rozšíření zobrazení $F\colon X \to Y$ je zobrazení $F : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$:

$$\mu_{F(A)}(y) = \sup_{x \in X} \min\bigl(\mu_F(x, y), \mu_A(x)\bigr) \qquad (A \in \mathcal{F}(X),\; y \in Y)$$

Analogicky $F^{-1} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$:

$$\mu_{F^{-1}(B)}(x) = \sup_{y \in Y} \min\bigl(\mu_F(x, y), \mu_B(y)\bigr) \qquad (B \in \mathcal{F}(Y),\; x \in X)$$

$$\min\bigl(\mu_F(x, y), \mu_A(x)\bigr) = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{pro } \mu_F(x, y) = 1\,, \text{tj. } y = F(x)\,, \\ 0 & \text{pro } \mu_F(x, y) = 0\,. \end{cases}$$

Pomocí rozšíření $F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, $\quad F^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ na **ostré** množiny lze rozšíření na **fuzzy** množiny psát

$$\begin{aligned}
\mu_{F(A)}(y) \quad &= \quad \sup_{x \in F^{-1}(y)} \mu_A(x) = \sup \mu_A(F^{-1}(y))\,, \\
\mu_{F^{-1}(B)}(x) \quad &= \quad \mu_B(F(x))\,.
\end{aligned}$$

Zobrazují fuzzy podmnožiny X na fuzzy podmnožiny Y, např. fuzzy čísla na fuzzy čísla (popř. jiné fuzzy množiny).

Věta: (omezená řezová konzistence)

$$F\big(\mathcal{R}_A(\alpha)\big) \subseteq \mathcal{R}_{F(A)}(\alpha)\,.$$

Je-li pro všechna $y \in Y$ množina

$$F^{-1}(y) = \{x \in X : (x, y) \in F\}$$

konečná, pak platí rovnost.
Princip rozšíření uplatněný na unární minus:
Fuzzy interval **opačný** k fuzzy intervalu A je $-A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} \mu_{-A}(x) &= \mu_A(-x) \\ \mathcal{R}_{-A}(\alpha) &= -\mathcal{R}_A(\alpha) \end{aligned}$$

Podobně pro $A^n, \sqrt{A}, |A|, \exp(A), \ln(A), \ldots$
(počítáme po řezech)
Speciálně pro **unární minus** aplikované na intervaly, trojúhelníková fuzzy čísla a lichoběžníkové fuzzy intervaly:

$$\begin{aligned} -\langle a, b\rangle &= \langle -b, -a\rangle \\ -\langle a, c, b\rangle &= \langle -b, -c, -a\rangle \\ -\langle a, c, d, b\rangle &= \langle -b, -d, -c, -a\rangle \end{aligned}$$

3.4 Binární operace s fuzzy intervaly

$\square \in \{+, -, \cdot, /\}$
$\square : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ můžeme chápat jako ostrou relaci $\square \subseteq \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$:

$$\mu_{\square}\big((y, z), x\big) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y \,\square\, z = x\,, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Tu můžeme rozšířit podle principu rozšíření pro **unární operace** na operaci $\mathcal{F}(\mathbf{R}^2) \to \mathcal{F}(\mathbf{R})$.
Abychom dostali binární operaci $\square : \mathcal{F}(\mathbf{R}) \times \mathcal{F}(\mathbf{R}) \to \mathcal{F}(\mathbf{R})$, potřebujeme ještě složení s vhodným zobrazením (**cylindrickým rozšířením**) $\mathcal{F}(\mathbf{R}) \times \mathcal{F}(\mathbf{R}) \to \mathcal{F}(\mathbf{R}^2)$:

$$\mu_{A \square B}(x) = \sup_{(y,z)\in\mathbf{R}^2,\, y \square z = x} \min\big(\mu_A(y), \mu_B(z)\big)\,.$$

Speciálně

$$\begin{aligned} \mu_{A+B}(x) &= \sup_{(y,z)\in\mathbf{R}^2,\, y+z=x} \min\big(\mu_A(y), \mu_B(z)\big) \\ &= \sup_{z\in\mathbf{R}} \min\big(\mu_A(x-z), \mu_B(z)\big)\,, \\ \mu_{A-B}(x) &= \sup_{z\in\mathbf{R}} \min\big(\mu_A(x+z), \mu_B(z)\big)\,, \\ \mu_{A\cdot B}(x) &= \sup_{z\in\mathbf{R},\, z\neq 0} \min\big(\mu_A(x/z), \mu_B(z)\big), \qquad x \neq 0\,, \\ \mu_{A/B}(x) &= \sup_{z\in\mathbf{R}} \min\big(\mu_A(x\cdot z), \mu_B(z)\big)\,. \end{aligned}$$

Jen pro hodnotu $\mu_{A\cdot B}(0)$ musíme použít původní definici kvůli problémům s dělením nulou. Speciálně pro ostré intervaly $A = \langle a, b\rangle$, $B = \langle c, d\rangle$ dostaneme **intervalovou aritmetiku**:

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle &= \langle a + c, b + d\rangle\,,\\
\langle a, b\rangle - \langle c, d\rangle &= \langle a - d, b - c\rangle\,,\\
\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle &= \big\langle \min\{a\,c, a\,d, b\,c, b\,d\}, \max\{a\,c, a\,d, b\,c, b\,d\}\big\rangle\,,\\
\langle a, b\rangle / \langle c, d\rangle &= \big\langle \min\{a/c, a/d, b/c, b/d\}, \max\{a/c, a/d, b/c, b/d\}\big\rangle\,.
\end{aligned}$$

Poslední rovnost platí pouze pro $0 \notin \langle c, d\rangle$. Pro **kladné** intervaly, tj. $a, c > 0$:

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle &= \langle a\,c, b\,d\rangle\,,\\
\langle a, b\rangle / \langle c, d\rangle &= \langle a/d, b/c\rangle\,.
\end{aligned}$$

Věta: Sčítání, odčítání, násobení a dělení fuzzy intervalů je řezově konzistentní (dělení za předpokladu, že stupeň příslušnosti nuly k děliteli je nulový).

$$\mathcal{R}_{A\,\square\,B}(\alpha) = \mathcal{R}_A(\alpha) \,\square\, \mathcal{R}_B(\alpha)\,.$$

Věta: Součet, rozdíl a součin fuzzy čísel (resp. fuzzy intervalů) je fuzzy číslo (resp. fuzzy interval). (Též podíl, pokud uzávěr nosiče dělitele neobsahuje nulu.)
Věta: Součet a rozdíl trojúhelníkových fuzzy čísel (resp. lichoběžníkových fuzzy intervalů) je trojúhelníkové fuzzy číslo (resp. lichoběžníkový fuzzy interval), konkrétně

$$\begin{aligned}
\langle a_1, c_1, b_1\rangle + \langle a_2, c_2, b_2\rangle &= \langle a_1 + a_2, c_1 + c_2, b_1 + b_2\rangle\,,\\
\langle a_1, c_1, d_1, b_1\rangle + \langle a_2, c_2, d_2, b_2\rangle &= \langle a_1 + a_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2, b_1 + b_2\rangle\,,\\
\langle a_1, c_1, b_1\rangle - \langle a_2, c_2, b_2\rangle &= \langle a_1 - b_2, c_1 - c_2, b_1 - a_2\rangle\,,\\
\langle a_1, c_1, d_1, b_1\rangle - \langle a_2, c_2, d_2, b_2\rangle &= \langle a_1 - b_2, c_1 - d_2, d_1 - c_2, b_1 - a_2\rangle\,.
\end{aligned}$$

Pro součin a podíl podobná věta neplatí.
Nutno rozlišovat:
A^2 (kvadrát fuzzy čísla)
$A \cdot A$ (součin dvou fuzzy čísel se stejnými funkcemi příslušnosti; nezáleží na tom, že je to totéž fuzzy číslo)
μ_{A^2} je na záporných číslech nulová,
$\mu_{A\cdot A}$ nemusí být.
Příklady:

$$\begin{aligned}
\langle 2, 3\rangle^2 &= \langle 4, 9\rangle = \langle 2, 3\rangle \cdot \langle 2, 3\rangle\,,\\
\langle -2, 3\rangle^2 &= \langle 0, 9\rangle \neq\\
\neq \langle -2, 3\rangle \cdot \langle -2, 3\rangle &= \langle -6, 9\rangle\,.
\end{aligned}$$

Věta: Vlastnosti operací s fuzzy intervaly:

$$\begin{aligned}
0 + A &= A,\\
0 \cdot A &= 0,\\
1 \cdot A &= A,\\
A + B &= B + A,\\
A \cdot B &= B \cdot A,\\
A + (B + C) &= (A + B) + C,
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} A\cdot(B\cdot C) & = & (A\cdot B)\cdot C, \\ A+(-B) & = & A-B, \\ (-A)\cdot B & = & -(A\cdot B)=A\cdot(-B), \\ -(-A) & = & A, \\ A/B & = & A\cdot(1/B), \\ A\cdot(B+C) & \le & (A\cdot B)+(A\cdot C) \end{array}$$

Pokud je v posledním vztahu A ostré číslo ($A=x$), pak nastává rovnost.
Pro fuzzy intervaly může být:

$$\begin{array}{rcl} A-A & \neq & 0, \\ (A+B)-B & \neq & A, \\ A/A & \neq & 1, \\ (A/B)\cdot B & \neq & A, \\ A\cdot(B+C) & \neq & A\cdot B+A\cdot C. \end{array}$$

Příklady:

$$\begin{array}{rcl} \langle 2,3\rangle-\langle 2,3\rangle & = & \langle -1,1\rangle\,, \\ \langle 2,3\rangle/\langle 2,3\rangle & = & \langle 2/3,3/2\rangle\,, \\ \langle 2,3\rangle\cdot(1-1) & = & \langle 2,3\rangle\cdot 0=0\neq \\ \neq \langle 2,3\rangle\cdot 1-\langle 2,3\rangle\cdot 1 & = & \langle -1,1\rangle\,, \\ \langle 2,3\rangle\cdot(\langle 1,2\rangle+\langle -2,-1\rangle) & = & \langle 2,3\rangle\cdot\langle -1,1\rangle=\langle -3,3\rangle\neq \\ \neq \langle 2,3\rangle\cdot\langle 1,2\rangle+\langle 2,3\rangle\cdot\langle -2,-1\rangle & = & \langle 2,6\rangle+\langle -6,-2\rangle=\langle -4,4\rangle\,. \end{array}$$

Důsledek: Rovnice typu

$$\begin{array}{rcl} A+X & = & B\,, \\ A-X & = & B\,, \\ A\cdot X & = & B\,, \\ A/X & = & B\,, \end{array}$$

apod. (s neznámou X) **nelze** řešit převedením na druhou stranu.
V oboru fuzzy intervalů je lze řešit jako rovnice pro meze intervalů jednotlivých řezů.
Příklad: Řešením rovnice

$$\langle 1,2\rangle+X=\langle 4,6\rangle$$

je interval $X=\langle x_\ell,x_u\rangle$ splňující

$$1+x_\ell=4\,,\qquad 2+x_u=6\,;$$

tj. $x_\ell=3$, $x_u=4$, $X=\langle 3,4\rangle$.
Příklad: Řešením rovnice

$$\langle 1,4\rangle+X=\langle 4,6\rangle$$

má být interval $X=\langle x_\ell,x_u\rangle$ splňující

$$1+x_\ell=4\,,\qquad 4+x_u=6\,;$$

tj. $x_\ell=3$, $x_u=2\not\geq x_\ell$, takový interval (ani fuzzy interval) neexistuje.

Příklad: Soustava rovnic

$$\begin{aligned} X + Y &= \langle 4, 8 \rangle\,, \\ X - Y &= \langle 2, 6 \rangle \end{aligned}$$

vede pro $X = \langle x_\ell, x_u \rangle$, $Y = \langle y_\ell, y_u \rangle$ na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_\ell + y_\ell &= 4\,, \\ x_u + y_u &= 8\,, \\ x_\ell - y_u &= 2\,, \\ x_u - y_\ell &= 6\,, \end{aligned}$$

s řešením

$$\begin{aligned} X &= \langle x_\ell, x_u \rangle = \langle 4 - y_\ell, 6 + y_\ell \rangle\,, \\ Y &= \langle y_\ell, y_u \rangle = \langle y_\ell, 2 - y_\ell \rangle\,. \end{aligned}$$

Protože dolní meze intervalů nesmí být větší než horní, dostáváme omezení $-1 \le y_\ell \le 1$.
Příklad: Soustava rovnic

$$\begin{aligned} X + Y &= \langle 4, 8 \rangle\,, \\ X - Y &= \langle 2, 4 \rangle \end{aligned}$$

vede pro $X = \langle x_\ell, x_u \rangle$, $Y = \langle y_\ell, y_u \rangle$ na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_\ell + y_\ell &= 4\,, \\ x_u + y_u &= 8\,, \\ x_\ell - y_u &= 2\,, \\ x_u - y_\ell &= 4\,, \end{aligned}$$

která nemá řešení.

4 Operace s fuzzy množinami

4.1 Operace s ostrými množinami

množinové operace	výrokové operace	vztah
$\overline{} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$	$\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$	$\overline{A} = \{x \in X :\ \neg(x \in A)\}$
$\cap : \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)$	$\wedge : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$	$A \cap B = \{x \in X :\ (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
$\cup : \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)$	$\vee : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$	$A \cup B = \{x \in X :\ (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Pomocí funkcí příslušnosti:
$\mu_{\overline{A}}(x) = \neg \mu_A(x)$
$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$
$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

4.2 Fuzzy negace

je unární operace $\underset{\cdot}{\neg} : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ taková, že

$$\alpha \le \beta \Rightarrow \underset{\cdot}{\neg}\beta \le \underset{\cdot}{\neg}\alpha, \tag{N1}$$

$$\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \alpha. \tag{N2}$$

Příklad: **Standardní negace**: $\underset{S}{\neg}\alpha = 1 - \alpha$.

Vlastnosti fuzzy negací

Věta: Každá fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$ je spojitá, klesající, bijektivní a splňuje okrajové podmínky

$$\underset{\cdot}{\neg}1 = 0, \qquad \underset{\cdot}{\neg}0 = 1. \tag{N0}$$

Její graf je symetrický podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. $\underset{\cdot}{\neg}^{-1} = \underset{\cdot}{\neg}$

Důkaz:

- Prostá: Je-li $\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\beta$, pak $\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\beta = \beta$.
- Surjektivní („na“): Pro každé $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ existuje $\beta \in \langle 0,1\rangle$ takové, že $\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\beta$, totiž $\beta = \underset{\cdot}{\neg}\alpha$.
- $\Rightarrow$ spojitost a okrajové podmínky.
- Symetrie grafu je ekvivalentní s involutivitou (N2) .

Věta o reprezentaci fuzzy negací

Nutná a postačující podmínka pro to, aby funkce $\underset{\cdot}{\neg} : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ byla fuzzy negace, je existence rostoucí bijekce $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ (**generátor fuzzy negace** $\underset{\cdot}{\neg}$) takové, že

$$\underset{\cdot}{\neg} = i \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1}, \quad \text{tj.} \quad \underset{\cdot}{\neg}\alpha = i^{-1}\big(\underset{S}{\neg}\, i(\alpha)\big).$$

Důkaz: (Dle [Nguyen-Walker].)

- Postačující:

(N1): Předpokládejme $\alpha, \beta \in \langle 0,1\rangle$, $\alpha \le \beta$.
i, i^{-1} uspořádání zachovávají, $\underset{S}{\neg}$ obrací:

$$\begin{array}{rcl}
i(\alpha) & \le & i(\beta) \\
\underset{S}{\neg}\, i(\alpha) & \ge & \underset{S}{\neg}\, i(\beta) \\
i^{-1}\big(\underset{S}{\neg}\, i(\alpha)\big) & \ge & i^{-1}\big(\underset{S}{\neg}\, i(\beta)\big) \\
\underset{\cdot}{\neg}\alpha & \ge & \underset{\cdot}{\neg}\beta
\end{array}$$

(N2): $\quad \underset{\cdot}{\neg} \circ \underset{\cdot}{\neg} = i \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1} \circ i \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1} = i \circ \underset{S}{\neg} \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1} = i \circ i^{-1} = \mathrm{id}$,
kde id je identita na $\langle 0,1\rangle$.

- Nutná: Dokážeme, že

$$i(\alpha) = \frac{\alpha + \underset{S}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2}$$

je generátorem fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$.

i je rostoucí, spojitá, $i(0) = 0$, $i(1) = 1$, tedy i je bijekce na $\langle 0, 1\rangle$.

$$\begin{aligned}
\underset{S}{\neg} i(\alpha) &= 1 - \frac{\alpha + \underset{S}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2} = \frac{1 - \alpha + 1 - \underset{S}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2} = \frac{\underset{S}{\neg}\alpha + \underset{S}{\neg}\underset{S}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2} = \\
&= \frac{\underset{S}{\neg}\alpha + \underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2} = \frac{\underset{S}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha + \underset{\cdot}{\neg}\alpha}{2} = i(\underset{\cdot}{\neg}\alpha). \\
i \circ \underset{S}{\neg} &= \underset{\cdot}{\neg} \circ i, \text{ neboli } i \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1} = \underset{\cdot}{\neg}
\end{aligned}$$

Generátor fuzzy negace není jednoznačně určen.

Pro každou fuzzy negaci $\underset{\cdot}{\neg}$ existuje právě jedna **rovnovážná hodnota** (angl. **equilibrium**), tj. $e \in \langle 0, 1\rangle$ splňující $\underset{\cdot}{\neg} e = e$.

4.3 Fuzzy doplněk

$$\mu_{\overline{A}^{\cdot}}(x) = \underset{\cdot}{\neg}\mu_A(x).$$

Rozlišujeme stejnými indexy jako u fuzzy negací, například $\overline{A}^S$ je standardní doplněk.

4.4 Fuzzy konjunkce (trojúhelníková norma, t-norma)

(angl. **triangular norm**) je binární operace $\underset{\cdot}{\wedge} : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle$ splňující následující axiomy pro všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1\rangle$:

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \beta \underset{\cdot}{\wedge} \alpha \qquad \text{(komutativita) (T1)}$$

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} (\beta \underset{\cdot}{\wedge} \gamma) = (\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta) \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \qquad \text{(asociativita) (T2)}$$

$$\beta \le \gamma \Rightarrow \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \le \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \qquad \text{(monotonie) (T3)}$$

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 = \alpha \qquad \text{(okrajová podmínka) (T4)}$$

Věta: $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 0 = 0$.

Důkaz: Podle (T3) a (T4) platí: $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 0 \overset{(T3)}{\le} 1 \underset{\cdot}{\wedge} 0 \overset{(T4)}{=} 0$.

Příklady fuzzy konjunkcí

- **Standardní** (**min**, **Gödelova**, **Zadehova** ...):

$$\alpha \underset{S}{\wedge} \beta = \min(\alpha, \beta).$$

- **Součinová** (**produktová**, **pravděpodobnostní**, **Goguenova**, angl. **algebraic product** ...)

$$\alpha \underset{P}{\wedge} \beta = \alpha \cdot \beta.$$

- **Łukasiewiczova** (**Gilesova**, angl. též **bold** ...):

$$\alpha \underset{\mathrm{L}}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta - 1 & \text{pro } \alpha + \beta - 1 > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Drastická** (**slabá**, angl. **weak** ...):

$$\alpha \underset{\mathrm{D}}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vlastnosti fuzzy konjunkcí

Věta:

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1\rangle : \quad \alpha \underset{\mathrm{D}}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \beta.$$

Důkaz: Je-li $\alpha = 1$ nebo $\beta = 1$, pak podmínka (T4) dává stejný výsledek pro všechny fuzzy konjunkce. Předpokládejme (bez újmy na obecnosti) $\alpha \leq \beta < 1$. Pak

$$\alpha \underset{\mathrm{D}}{\wedge} \beta = 0 \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 = \alpha = \alpha \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \beta.$$

Věta: Standardní konjunkce je jediná, která je **idempotentní**, tj. $\forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle : \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha = \alpha$

Důkaz: Předpokládejme $\alpha, \beta \in \langle 0, 1\rangle$, $\alpha \leq \beta$.

$$\alpha = \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha \overset{(T3)}{\leq} \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \overset{(T3)}{\leq} \alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 \overset{(T4)}{=} \alpha,$$

tedy $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \alpha = \alpha \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \beta$.

Totéž pro $\alpha > \beta$.

Reprezentace fuzzy konjunkcí (obecně)

Věta: Nechť $\underset{1}{\wedge}$ je fuzzy konjunkce a $i : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ rostoucí bijekce. Pak operace $\underset{2}{\wedge} : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle$ definovaná vzorcem

$$\alpha \underset{2}{\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta)\big)$$

je fuzzy konjunkce. Je-li $\underset{1}{\wedge}$ spojitá, je $\underset{2}{\wedge}$ též spojitá.

Důkaz:

- Komutativita (asociativita se dokáže obdobně):

$$\alpha \underset{2}{\wedge} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta)) = i^{-1}(i(\beta) \underset{1}{\wedge} i(\alpha)) = \beta \underset{2}{\wedge} \alpha$$

- Monotonie: Předpokládejme $\beta \leq \gamma$.

$$\begin{aligned} i(\beta) &\leq i(\gamma), \\ i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta) &\leq i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\gamma), \\ \alpha \underset{2}{\wedge} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta)) &\leq i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\gamma)) = \alpha \underset{2}{\wedge} \gamma. \end{aligned}$$

- Okrajová podmínka:

$$\alpha \underset{2}{\wedge} 1 = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(1)) = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} 1) = i^{-1}(i(\alpha)) = \alpha.$$

Klasifikace fuzzy konjunkcí

Spojitá fuzzy konjunkce $\dot{\wedge}$ je

- **archimédovská**, jestliže

$$\forall \alpha \in (0,1): \quad \alpha \dot{\wedge} \alpha < \alpha \tag{TA}$$

- **striktní**, jestliže

$$\forall \alpha \in (0,1)\ \forall \beta, \gamma \in \langle 0,1 \rangle: \quad \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\wedge} \beta < \alpha \dot{\wedge} \gamma \tag{T3+}$$

- **nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

Příklad: Součinová konjunkce je striktní, Łukasiewiczova je nilpotentní, standardní a drastická nejsou archimédovské (standardní nesplňuje (TA), drastická není spojitá).

Věta o reprezentaci striktních fuzzy konjunkcí

Operace $\dot{\wedge} : \langle 0,1 \rangle^2 \to \langle 0,1 \rangle$ je striktní fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ (**multiplikativní generátor**) taková, že

$$\alpha \dot{\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \underset{\mathrm{P}}{\wedge} i(\beta)\big) = i^{-1}\big(i(\alpha) \cdot i(\beta)\big).$$

Že je podmínka postačující, jsme již dokázali (kromě striktnosti, což je snadné).
Důkaz nutnosti je mnohem obtížnější.
Multiplikativní generátor striktní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.

Věta o reprezentaci nilpotentních fuzzy konjunkcí

Operace $\dot{\wedge} : \langle 0,1 \rangle^2 \to \langle 0,1 \rangle$ je **nilpotentní** fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ (**Łukasiewiczův generátor**) taková, že

$$\alpha \dot{\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \underset{\mathrm{L}}{\wedge} i(\beta)\big).$$

Łukasiewiczův generátor nilpotentní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.
Věta: Nechť $\dot{\wedge}$ je **nilpotentní** fuzzy konjunkce. Pak

$$\forall \alpha \in (0,1)\ \exists n \in \mathbf{N} : \dot{\bigwedge}_{k=1}^{n} \alpha = 0$$

Důkaz: Podle reprezentační věty stačí (bez újmy na obecnosti) dokázat větu pro Łukasiewiczovu konjunkci. Pro dostatečně velké n dostáváme

$$\alpha + \sum_{i=2}^{n} (\alpha - 1) \leq 0, \qquad \underset{\mathrm{L}}{\bigwedge}_{k=1}^{n} \alpha = 0.$$

4.5 Fuzzy průnik

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy konjunkce:

$$\mu_{A \dot{\cap} B}(x) = \mu_A(x) \dot{\wedge} \mu_B(x)$$

(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy konjunkcí)

4.6 Fuzzy disjunkce (trojúhelníková konorma, t-konorma)

je binární operace $\dot{\vee} : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle$ splňující

$$\alpha \dot{\vee} \beta = \beta \dot{\vee} \alpha \qquad \text{(komutativita) (S1)}$$

$$\alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma) = (\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma \qquad \text{(asociativita) (S2)}$$

$$\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\vee} \beta \leq \alpha \dot{\vee} \gamma \qquad \text{(monotonie) (S3)}$$

$$\alpha \dot{\vee} 0 = \alpha \qquad \text{(okrajová podmínka) (S4)}$$

Věta: $\alpha \dot{\vee} 1 = 1.$

Důkaz: $\alpha \dot{\vee} 1 \overset{(S3)}{\geq} 0 \dot{\vee} 1 \overset{(S4)}{=} 1.$

Příklady fuzzy disjunkcí

- **Standardní** (**max**, **Gödelova**, **Zadehova** ...):

$$\alpha \overset{S}{\vee} \beta = \max(\alpha, \beta).$$

- **Součinová** (**produktová**, **pravděpodobnostní** ...):

$$\alpha \overset{P}{\vee} \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta.$$

- **Łukasiewiczova** (**Gilesova**, angl. též **bold**, **bounded sum** ...):

$$\alpha \overset{L}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{pro } \alpha + \beta < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Drastická** (**slabá**, angl. **weak** ...):

$$\alpha \overset{D}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 0, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Einsteinova**

$$\alpha \overset{E}{\vee} \beta = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$$

Vlastnosti fuzzy disjunkcí

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1\rangle : \ \alpha \overset{S}{\vee} \beta \leq \alpha \dot{\vee} \beta \leq \alpha \overset{D}{\vee} \beta.$$

Standardní disjunkce je jediná, která je idempotentní, tj. $\alpha \dot{\vee} \alpha = \alpha$ pro všechna $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$.

Dualita

Nechť $\underset{\cdot}{\neg}$ je fuzzy negace.

A. Je-li $\underset{\cdot}{\wedge}$ fuzzy konjunkce, pak $\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\,\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \underset{\cdot}{\neg}\,\beta)$ je fuzzy disjunkce (**duální** k $\underset{\cdot}{\wedge}$ vzhledem k $\underset{\cdot}{\neg}$).

B. Je-li $\dot\vee$ fuzzy disjunkce, pak $\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\,\alpha \mathbin{\dot\vee} \underset{\cdot}{\neg}\,\beta)$ je fuzzy konjunkce (**duální** k $\dot\vee$ vzhledem k $\underset{\cdot}{\neg}$).

Věta:

- **Łukasiewiczovy** operace $\underset{L}{\wedge}, \overset{L}{\vee}$ jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Součinové** operace $\underset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}$ jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Standardní** operace $\underset{S}{\wedge}, \overset{S}{\vee}$ jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.
- **Drastické** operace $\underset{D}{\wedge}, \overset{D}{\vee}$ jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.

Klasifikace fuzzy disjunkcí

Spojitá fuzzy disjunkce $\dot\vee$ je

- **archimédovská**, jestliže
$$\forall \alpha \in (0,1): \quad \alpha \mathbin{\dot\vee} \alpha > \alpha \tag{SA}$$
- **striktní**, jestliže
$$\forall \alpha \in \langle 0,1) \; \forall \beta, \gamma \in \langle 0,1\rangle: \quad \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \mathbin{\dot\vee} \beta < \alpha \mathbin{\dot\vee} \gamma \tag{S3+}$$
- **nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

Věty o reprezentaci fuzzy disjunkcí

Věta: Operace $\dot\vee : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ je **striktní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ taková, že

$$\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \overset{P}{\vee} i(\beta)\big).$$

Věta: Operace $\dot\vee : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ je **nilpotentní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ (**aditivní generátor**) taková, že

$$\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \overset{L}{\vee} i(\beta)\big) = \begin{cases} i^{-1}\big(i(\alpha) + i(\beta)\big) & \text{pro } i(\alpha) + i(\beta) \le 1 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

4.7 Fuzzy sjednocení

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy disjunkce:

$$\mu_{A \dot\cup B}(x) = \mu_A(x) \mathbin{\dot\vee} \mu_B(x).$$

(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy disjunkcí)

4.8 Fuzzy výrokové algebry

černě vyznačené platí vždy
červeně vyznačené platí pro standardní fuzzy operace, ale ne pro některé jiné
modře vyznačené platí jen pro některé volby fuzzy operací (ne pro standardní)

$$
\begin{array}{rclrcl}
\underset{\cdot}{\neg}\,\underset{\cdot}{\neg}\,\alpha & = & \alpha, & & & \\
\alpha \mathbin{\dot{\vee}} \beta & = & \beta \mathbin{\dot{\vee}} \alpha, & \alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta & = & \beta \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \alpha, \\
(\alpha \mathbin{\dot{\vee}} \beta) \mathbin{\dot{\vee}} \gamma & = & \alpha \mathbin{\dot{\vee}} (\beta \mathbin{\dot{\vee}} \gamma), & (\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta) \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \gamma & = & \alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} (\beta \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \gamma), \\
\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} (\beta \mathbin{\dot{\vee}} \gamma) & = & (\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta) \mathbin{\dot{\vee}} (\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \gamma), & \alpha \mathbin{\dot{\vee}} (\beta \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \gamma) & = & (\alpha \mathbin{\dot{\vee}} \beta) \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} (\alpha \mathbin{\dot{\vee}} \gamma), \\
\alpha \mathbin{\dot{\vee}} \alpha & = & \alpha, & \alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \alpha & = & \alpha, \\
\alpha \mathbin{\dot{\vee}} (\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta) & = & \alpha, & \alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} (\alpha \mathbin{\dot{\vee}} \beta) & = & \alpha, \\
\alpha \mathbin{\dot{\vee}} 1 & = & 1, & \alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} 0 & = & 0, \\
\alpha \mathbin{\dot{\vee}} 0 & = & \alpha, & \alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} 1 & = & \alpha, \\
\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha & = & \mathbf{0}, & \alpha \mathbin{\dot{\vee}} \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha & = & \mathbf{1}, \\
\underset{\cdot}{\neg}(\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta) & = & \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha \mathbin{\dot{\vee}} \underset{\cdot}{\neg}\,\beta, & \underset{\cdot}{\neg}(\alpha \mathbin{\dot{\vee}} \beta) & = & \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \underset{\cdot}{\neg}\,\beta.
\end{array}
$$

4.9 Fuzzy implikace

je jakákoli operace $\dot{\underset{\cdot}{\to}} : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, která se na $\{0,1\}^2$ shoduje s klasickou implikací. Mohli bychom si přát:

$$\alpha \mathbin{\dot{\underset{\cdot}{\to}}} \beta = 1 \Leftarrow \alpha \le \beta, \tag{I1a}$$

$$\alpha \mathbin{\dot{\underset{\cdot}{\to}}} \beta = 1 \Rightarrow \alpha \le \beta, \tag{I1b}$$

$$1 \mathbin{\dot{\underset{\cdot}{\to}}} \beta = \beta, \tag{I2}$$

$$\dot{\underset{\cdot}{\to}} \ \text{ je nerostoucí v 1. argumentu a neklesající v 2. argumentu,} \tag{I3}$$

$$\alpha \mathbin{\dot{\underset{\cdot}{\to}}} \beta = \underset{\mathrm{S}}{\neg}\,\beta \mathbin{\dot{\underset{\cdot}{\to}}} \underset{\mathrm{S}}{\neg}\,\alpha, \tag{I4}$$

$$\alpha \mathbin{\dot{\underset{\cdot}{\to}}} (\beta \mathbin{\dot{\underset{\cdot}{\to}}} \gamma) = \beta \mathbin{\dot{\underset{\cdot}{\to}}} (\alpha \mathbin{\dot{\underset{\cdot}{\to}}} \gamma), \tag{I5}$$

$$\text{spojitost.} \tag{I6}$$

R-implikace (reziduovaná fuzzy implikace, reziduum)

je operace

$$\alpha \mathbin{\overset{\mathrm{R}}{\underset{\cdot}{\to}}} \beta = \sup\{\gamma :\ \alpha \mathbin{\underset{\cdot}{\wedge}} \gamma \le \beta\} \tag{RI}$$

kde $\underset{\cdot}{\wedge}$ je fuzzy konjunkce

(je-li $\underset{\cdot}{\wedge}$ spojitá, lze supremum nahradit maximem)

Příklady R-implikací

- Od standardní konjunkce $\underset{\mathrm{S}}{\wedge}$ je odvozena **Gödelova implikace**

$$
\alpha \mathbin{\overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{S}}{\to}}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \le \beta, \\ \beta & \text{jinak.} \end{cases}
$$

Je po částech lineární a spojitá s výjimkou bodů (α, α), $\alpha < 1$.

- Od Łukasiewiczovy konjunkce $\underset{\mathrm{L}}{\wedge}$ je odvozena **Łukasiewiczova implikace**

$$\alpha \overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{L}}{\rightarrow}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ 1 - \alpha + \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je po částech lineární a spojitá.

- Od součinové konjunkce $\underset{\mathrm{P}}{\wedge}$ je odvozena **Goguenova** (též **Gainesova**) **implikace**

$$\alpha \overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{P}}{\rightarrow}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ \frac{\beta}{\alpha} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Má jediný bod nespojitosti, $(0, 0)$.

Vlastnosti R-implikací

Věta: Nechť $\underset{\cdot}{\wedge}$ je spojitá fuzzy konjunkce. Pak R-implikace $\overset{\mathrm{R}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}$ splňuje (I1a), (I1b), (I2), (I3).

Důkaz: $\alpha \overset{\mathrm{R}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \beta = \sup \Gamma(\alpha, \beta)$, kde $\Gamma(\alpha, \beta) = \{\gamma : \ \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \leq \beta\}$ je interval obsahující nulu. (Při spojitosti $\underset{\cdot}{\wedge}$ navíc uzavřený.)

(I1a) Je-li $\alpha \leq \beta$, pak $\Gamma(\alpha, \beta) = \langle 0, 1 \rangle$, $\sup \Gamma(\alpha, \beta) = 1$.
(I1b) Je-li $\alpha > \beta$, pak $1 \notin \Gamma(\alpha, \beta)$, $\sup \Gamma(\alpha, \beta) < 1$ (z uzavřenosti $\Gamma(\alpha, \beta)$).
(I2): $1 \overset{\mathrm{R}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \beta = \sup\{\gamma : \ \gamma \leq \beta\} = \beta$.
(I3): Zvětšujeme-li α, $\Gamma(\alpha, \beta)$ se nezvětšuje.
Zvětšujeme-li β, $\Gamma(\alpha, \beta)$ se nezmenšuje.

Věta: Reziduovaná fuzzy implikace příslušná **spojité** fuzzy konjunkci $\underset{\cdot}{\wedge}$ je spojitá, právě když $\underset{\cdot}{\wedge}$ je nilpotentní.

S-implikace

je operace

$$\alpha \overset{\mathrm{S}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \beta = \underset{\mathrm{S}}{\neg} \alpha \mathbin{\dot{\vee}} \beta \tag{SI}$$

kde $\dot{\vee}$ je fuzzy disjunkce
Příklad:

- Ze standardní disjunkce dostáváme **Kleeneovu–Dienesovu** implikaci

$$\alpha \overset{\mathrm{S}}{\underset{\mathrm{S}}{\rightarrow}} \beta = \max(1 - \alpha, \beta).$$

- Z Łukasiewiczovy disjunkce dostáváme **Łukasiewiczovu** implikaci $\overset{\mathrm{S}}{\underset{\mathrm{L}}{\rightarrow}}$, která se shoduje s Łukasiewiczovou reziduovanou implikací $\overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{L}}{\rightarrow}}$.

Všechny požadavky (I1a),(I1b),(I2)–(I6) splňují ze zde probíraných fuzzy implikací pouze reziduované implikace odvozené od nilpotentních fuzzy konjunkcí (např. Łukasiewiczova implikace).

4.10 Fuzzy biimplikace (ekvivalence)

je operace $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftrightarrow}}$, obvykle definovaná vztahem

$$\alpha \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftrightarrow}} \beta = (\alpha \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}} \beta) \underset{\cdot}{\wedge} (\beta \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}} \alpha),$$

kde $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}$ je fuzzy implikace a $\underset{\cdot}{\wedge}$ je fuzzy konjunkce (biimplikaci indexujeme stejně jako odpovídající fuzzy implikaci)
Pokud $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}$ splňuje (I1a) (například pro reziduovanou implikaci), je vždy aspoň jedna ze závorek na pravé straně rovna jedné, takže nezáleží na volbě fuzzy konjunkce $\underset{\cdot}{\wedge}$.

Příklad: **Łukasiewiczova** biimplikace: $\alpha \overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{L}}{\leftrightarrow}} \beta = 1 - |\alpha - \beta|.$

Literatura

[1] Navara, M., Olšák, P.: *Základy fuzzy množin.* Skriptum ČVUT, 2. (přepracované) vydání, Praha, 2007.

[2] Kolesárová, A., Kováčová, M.: *Fuzzy množiny a ich aplikácie.* STU, Bratislava, 2004.

[3] Turunen, E.: *Mathematics Behind Fuzzy Logic.* Physica-Verlag, 1999.

[4] Jura, P.: Základy fuzzy logiky pro řízení a modelování. VUT Brno, 2003.

[5] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank: *An Introduction to Fuzzy Control*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.

[6] Kruse, R., Gebhardt, J., Klawon, F.: *Foundations of Fuzzy Systems.* J. Wiley, 1994.

[7] Novák, V.: *Základy fuzzy modelování.* BEN – technická literatura, Praha, 2000.

[8] Novák, V.: *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* Mat. seminář SNTL, Praha, 1990.

[9] Vysoký, P.: *Fuzzy řízení.* Skriptum ČVUT, Praha, 1996.

[10] Klir, G.J., Yuan, B.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications.* Prentice-Hall, 1995.

[11] Nguyen, H.T., Walker, E.A.: *A First Course in Fuzzy Logic.* 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton/London/New York/Washington, 2000.

[12] Ross, T.J.: Fuzzy Logic with Engineering Applications. 2nd ed., John Wiley & Sons, 2004.

Doplňková:

[13] Hájek, P.: *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Kluwer, Dordrecht, 1998.

[14] Butnariu, D., Klement, E.P.: *Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions.* Kluwer, Dordrecht, 1993.

[15] Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E.: *Triangular Norms.* Kluwer, Dordrecht, 2000.

[16] Gottwald, S.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Teknea, SA, Toulouse, 1993.

[17] Gottwald, S.: *Einführung in Fuzzy-Methoden.* 4th ed. Akademie Verlag, Berlin, 1993.

[18] Cignoli R., D'Ottaviano I.M.L., Mundici D.: *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning.* Trends in Logic, Volume 7. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[19] Mareš, M.: *Computation over Fuzzy Quantities.* CRC Press, Boca Raton, 1994.