

# Reprezentace znalostí pomocí fuzzy množin

Mirko Navara

<http://cmp.felk.cvut.cz/~navara>

5. ledna 2011

## 1 Pojem fuzzy množiny

### 1.1 Minimum o klasických množinách

Abychom se vyhnuli problémům, omezíme se na podmnožiny nějaké **univerzální množiny** (**univerza**)  $X$ .  $\mathcal{P}(X)$  značí množinu všech podmnožin množiny  $X$ .

Množinu  $A \in \mathcal{P}(X)$  jednoznačně určuje její **charakteristická funkce** (**funkce příslušnosti**)  $\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \notin A. \end{cases}$$

$$A = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}.$$

Pomocí značení

$$\mu_A^{-1}(M) = \{x \in X : \mu_A(x) \in M\}$$

lze psát

$$A = \mu_A^{-1}(\{1\}) = \mu_A^{-1}((0, 1]).$$

Místo  $\mu_A^{-1}(\{1\})$  píšeme  $\mu_A^{-1}(1)$  apod.

Speciálně  $\mu_\emptyset = 0$ ,  $\mu_X = 1$ .

### 1.2 Zavedení fuzzy množin

**Fuzzy podmnožina** univerza  $X$  (stručně **fuzzy množina**) je objekt  $A$ , který popisuje (zobecněná) **charakteristická funkce** (**funkce příslušnosti**)  $\mu_A : X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$

Alternativní značení:  $A(x)$

„Klasické“ množiny nazýváme v tomto kontextu **ostré** (angl. **crisp, sharp**).

$\mathcal{F}(X)$  značí množinu všech fuzzy podmnožin univerza  $X$

**Výška**:  $h(A) = \sup \text{Range}(A)$

**Nosič** (angl. **support**):  $\text{Supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} = \mu_A^{-1}((0, 1])$

**Jádro** (angl. **core**):  $\text{core}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} = \mu_A^{-1}(1)$

### Příklady fuzzy množin

$A, B \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$ ,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 2 - x & \text{pro } x \in (1, 2), \\ 0 & \text{pro } x > 2, \end{cases}$$
$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3, \\ 1 & \text{pro } x = 4, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x = 5, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Konečné fuzzy množiny zapisujeme stručněji např.  $\mu_B = \{(3, \frac{1}{2}), (4, 1), (5, \frac{1}{4})\}$ .

Alternativní značení:  $\mu_B = \{\frac{1}{2}/3, 1/4, \frac{1}{4}/5\}$ ,  $\mu_B = \frac{1}{2}/3 + 1/4 + \frac{1}{4}/5$ .

## 2 Systém řezů fuzzy množiny

**Definice:** Nechť  $A \in \mathcal{F}(X)$ ,  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ . Pak  **$\alpha$ -hladina** (angl.  **$\alpha$ -level**) fuzzy množiny  $A$  je ostrá množina

$$\mu_A^{-1}(\alpha) = \{x \in X : \mu_A(x) = \alpha\}.$$

**Systém řezů** fuzzy množiny  $A$  je zobrazení  $\mathcal{R}_A : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , které každému  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$  přiřazuje tzv.  **$\alpha$ -řez** (angl.  **$\alpha$ -cut**)

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \mu_A^{-1}(\langle \alpha, 1 \rangle) = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Alternativní značení:  $[A]_\alpha$ ,  $[A]^\alpha$ ,  ${}^\alpha A$ ,  ${}_\alpha A$

Triviálně platí pro všechna  $A \in \mathcal{F}(X)$ :

$$\begin{aligned} h(A) &= \sup\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \mathcal{R}_A(\alpha) \neq \emptyset\}, \\ \text{core}(A) &= \mathcal{R}_A(1), \\ \mathcal{R}_A(0) &= X, \end{aligned}$$

### 2.1 Věta o systému řezů

**Věta:** Zobrazení  $M : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathcal{P}(X)$  je systém řezů nějaké fuzzy množiny  $A \in \mathcal{F}(X)$ , právě když

- (R1)  $M(0) = X$ ,
- (R2)  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\alpha) \supseteq M(\beta)$ ,
- (R3)  $0 < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\beta) = \bigcap_{\alpha: \alpha < \beta} M(\alpha)$ .

**Důkaz:** ‘ $\Rightarrow$ ’: (R1):  $M(0) = \mathcal{R}_A(0) = X$ .

(R2):  $x \in M(\beta) = \mathcal{R}_A(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta > \alpha \Rightarrow x \in \mathcal{R}_A(\alpha) = M(\alpha)$ .

(R3) ‘ $\subseteq$ ’: (R2)  $\Rightarrow \forall \alpha \in \langle 0, \beta \rangle : M(\beta) \subseteq M(\alpha) \Rightarrow M(\beta) \subseteq \bigcap_{\alpha: \alpha < \beta} M(\alpha)$ .

(R3) ‘ $\supseteq$ ’:  $x \in \bigcap_{\alpha: \alpha < \beta} M(\alpha) = \bigcap_{\alpha: \alpha < \beta} \mathcal{R}_A(\alpha) \Rightarrow \forall \alpha \in \langle 0, \beta \rangle : \mu_A(x) \geq \alpha$ ,  
 $\Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta \iff x \in \mathcal{R}_A(\beta) = M(\beta)$ .

‘ $\Leftarrow$ ’: Dokážeme, že  $M = \mathcal{R}_A$ , kde  $\mu_A(x) := \sup\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : x \in M(\alpha)\}$ .

‘ $\subseteq$ ’:  $x \in M(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta \iff x \in \mathcal{R}_A(\beta)$ ,

‘ $\supseteq$ ’:  $x \in \mathcal{R}_A(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : x \in M(\alpha)\} \geq \beta$ ,

$\forall \alpha \in \langle 0, \beta \rangle : x \in M(\alpha)$ ,  
 $x \in \bigcap_{\alpha: \alpha < \beta} M(\alpha) = M(\beta)$ .

### 2.2 Reprezentace fuzzy množin

**Horizontální reprezentace:** pomocí systému řezů

**Vertikální reprezentace:** pomocí funkce příslušnosti

Převod z horizontální do vertikální reprezentace:

$$\mu_A(x) = \max\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : x \in \mathcal{R}_A(\alpha)\}.$$

**Věta:** Nechť  $A \in \mathcal{F}(X)$ . Pak

$$\mu_A = \max_{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle} \alpha \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)} = \max_{\alpha \in \text{Range}(A)} \alpha \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)},$$

kde maximum počítáme po bodech, tj.

$$\mu_A(x) = \max_{\alpha \in \text{Range}(A)} \alpha \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)}(x).$$

## 2.3 Fuzzy inkluze

Klasická definice  $A \subseteq B \iff \forall x \in A : x \in B$  se nehodí, neboť pro fuzzy množiny nemůžeme psát  $x \in A, x \in B$

Nicméně  $A \subseteq B \iff \forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \iff \mu_A \leq \mu_B$

Tuto definici používáme i pro **fuzzy množiny**  $A, B \in \mathcal{F}(X)$ :

$A \subseteq B \iff \forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \iff \mu_A \leq \mu_B$

$\iff \forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$

Důkaz poslední ekvivalence:

‘ $\Rightarrow$ ’: Necht’  $\mu_A \leq \mu_B, x \in \mathcal{R}_A(\alpha)$

$\alpha \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x), x \in \mathcal{R}_B(\alpha)$ , tj.  $\mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$

‘ $\Leftarrow$ ’: Necht’  $\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$

$\mu_A(x) = \max\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : x \in \mathcal{R}_A(\alpha)\}$

$\leq \max\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : x \in \mathcal{R}_B(\alpha)\} = \mu_B(x)$

## 2.4 Řezová konzistence

**Vlastnost**  $P$  fuzzy množin  $A_1, \dots, A_n$  je předpis, který argumentům  $A_1, \dots, A_n$  přiřazuje ostrou pravdivostní hodnotu  $P(A_1, \dots, A_n) \in \{0, 1\}$  („predikát“).

Vlastnost  $P$  fuzzy množiny se nazývá

- **řezově dědičná** (angl. **cutworthy**), jestliže

$$P(A_1, \dots, A_n) \Rightarrow (\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle : P(\mathcal{R}_{A_1}(\alpha), \dots, \mathcal{R}_{A_n}(\alpha))),$$

- **řezově konzistentní**, jestliže

$$P(A_1, \dots, A_n) \iff (\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle : P(\mathcal{R}_{A_1}(\alpha), \dots, \mathcal{R}_{A_n}(\alpha))).$$

(0-řezy záměrně neuvažujeme)

## Příklady řezové dědičnosti a konzistence

Inkluze je řezově konzistentní.

**Silná normalita**,  $\exists x \in X : \mu_A(x) = 1$ , je řezově konzistentní.

Ostrost množiny je řezově dědičná, ale není řezově konzistentní.

## 3 Operace s fuzzy množinami

### 3.1 Operace s ostrými množinami

množinové operace	výrokové operace	vztah
$\bar{\phantom{x}} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$	$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$	$\bar{A} = \{x \in X : \neg(x \in A)\}$
$\cap : \mathcal{P}(X)^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$	$\wedge : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$	$A \cap B = \{x \in X : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
$\cup : \mathcal{P}(X)^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$	$\vee : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$	$A \cup B = \{x \in X : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Pomocí funkcí příslušnosti:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \neg \mu_A(x)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

### 3.2 Fuzzy negace

je unární operace  $\neg : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  taková, že

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \neg \beta \leq \neg \alpha, \tag{N1}$$

$$\neg \neg \alpha = \alpha. \tag{N2}$$

**Příklad: Standardní negace:**  $\neg \alpha = 1 - \alpha$ .

## Vlastnosti fuzzy negací

**Věta:** Každá fuzzy negace  $\neg$  je spojitá, klesající, bijektivní a splňuje okrajové podmínky

$$\neg 1 = 0, \quad \neg 0 = 1. \quad (\text{N0})$$

Její graf je symetrický podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj.  $\neg^{-1} = \neg$

**Důkaz:**

- Prostá: Je-li  $\neg \alpha = \neg \beta$ , pak  $\alpha = \neg \neg \alpha = \neg \neg \beta = \beta$ .
- Surjektivní („na“): Pro každé  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$  existuje  $\beta \in \langle 0, 1 \rangle$  takové, že  $\alpha = \neg \beta$ , totiž  $\beta = \neg \alpha$ .
- $\Rightarrow$  spojitost a okrajové podmínky.
- Symetrie grafu je ekvivalentní s involutivitou (N2) .

## Věta o reprezentaci fuzzy negací

Nutná a postačující podmínka pro to, aby funkce  $\neg : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  byla fuzzy negace, je existence rostoucí bijekce  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  (**generátor fuzzy negace  $\neg$** ) takové, že

$$\neg = i \circ \underset{s}{\neg} \circ i^{-1}, \quad \text{tj.} \quad \neg \alpha = i^{-1}(\underset{s}{\neg} i(\alpha)).$$

**Důkaz:** (Dle [Nguyen-Walker].)

- Postačující:  
(N1): Předpokládejme  $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $\alpha \leq \beta$ .  
 $i, i^{-1}$  uspořádání zachovávají,  $\underset{s}{\neg}$  obrací:

$$\begin{aligned} i(\alpha) &\leq i(\beta) \\ \underset{s}{\neg} i(\alpha) &\geq \underset{s}{\neg} i(\beta) \\ i^{-1}(\underset{s}{\neg} i(\alpha)) &\geq i^{-1}(\underset{s}{\neg} i(\beta)) \\ \neg \alpha &\geq \neg \beta \end{aligned}$$

(N2):  $\neg \circ \neg = i \circ \underset{s}{\neg} \circ i^{-1} \circ i \circ \underset{s}{\neg} \circ i^{-1} = i \circ \underset{s}{\neg} \circ \underset{s}{\neg} \circ i^{-1} = i \circ i^{-1} = \text{id}$ ,  
kde  $\text{id}$  je identita na  $\langle 0, 1 \rangle$ .

- Nutná: Dokážeme, že

$$i(\alpha) = \frac{\alpha + \underset{s}{\neg} \neg \alpha}{2}$$

je generátorem fuzzy negace  $\neg$ .

$i$  je rostoucí, spojitá,  $i(0) = 0$ ,  $i(1) = 1$ , tedy  $i$  je bijekce na  $\langle 0, 1 \rangle$ .

$$\begin{aligned} \underset{s}{\neg} i(\alpha) &= 1 - \frac{\alpha + \underset{s}{\neg} \neg \alpha}{2} = \frac{1 - \alpha + 1 - \underset{s}{\neg} \neg \alpha}{2} = \frac{\underset{s}{\neg} \alpha + \underset{s}{\neg} \underset{s}{\neg} \neg \alpha}{2} = \\ &= \frac{\underset{s}{\neg} \alpha + \neg \alpha}{2} = \frac{\underset{s}{\neg} \neg \neg \alpha + \neg \alpha}{2} = i(\neg \alpha). \\ i \circ \underset{s}{\neg} &= \neg \circ i, \text{ neboli } i \circ \underset{s}{\neg} \circ i^{-1} = \neg \end{aligned}$$

## Generátor fuzzy negace není jednoznačně určen.

Pro každou fuzzy negaci  $\neg$  existuje právě jedna **rovnovážná hodnota** (angl. **equilibrium**), tj.  $e \in \langle 0, 1 \rangle$  splňující  $\neg e = e$ .

### 3.3 Fuzzy doplněk

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \neg \mu_A(x).$$

Rozlišujeme stejnými indexy jako u fuzzy negací, například  $\overline{A}^S$  je standardní doplněk.

### 3.4 Fuzzy konjunkce (trojúhelníková norma, t-norma)

(angl. **triangular norm**) je binární operace  $\wedge : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  splňující následující axiomy pro všechna  $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle$ :

$$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha \quad (\text{komutativita}) \text{ (T1)}$$

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \quad (\text{asociativita}) \text{ (T2)}$$

$$\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta \leq \alpha \wedge \gamma \quad (\text{monotonie}) \text{ (T3)}$$

$$\alpha \wedge 1 = \alpha \quad (\text{okrajová podmínka}) \text{ (T4)}$$

**Věta:**  $\alpha \wedge 0 = 0$ .

**Důkaz:** Podle (T3) a (T4) platí:  $\alpha \wedge 0 \stackrel{(T3)}{\leq} 1 \wedge 0 \stackrel{(T4)}{=} 0$ .

#### Příklady fuzzy konjunkcí

- **Standardní (min, Gödelova, Zadehova ...):**

$$\alpha \wedge_S \beta = \min(\alpha, \beta).$$

- **Součinnová (produktová, pravděpodobnostní, Goguenova, angl. algebraic product ...):**

$$\alpha \wedge_P \beta = \alpha \cdot \beta.$$

- **Łukasiewiczova (Gilesova, angl. též bold ...):**

$$\alpha \wedge_L \beta = \begin{cases} \alpha + \beta - 1 & \text{pro } \alpha + \beta - 1 > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Drastická (slabá, angl. weak ...):**

$$\alpha \wedge_D \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

#### Vlastnosti fuzzy konjunkcí

**Věta:**

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle : \alpha \wedge_D \beta \leq \alpha \wedge \beta \leq \alpha \wedge_S \beta.$$

**Důkaz:** Je-li  $\alpha = 1$  nebo  $\beta = 1$ , pak podmínka (T4) dává stejný výsledek pro všechny fuzzy konjunkce. Předpokládejme (bez újmy na obecnosti)  $\alpha \leq \beta < 1$ . Pak

$$\alpha \wedge_D \beta = 0 \leq \alpha \wedge \beta \leq \alpha \wedge 1 = \alpha = \alpha \wedge_S \beta.$$

**Věta:** Standardní konjunkce je jediná, která je **idempotentní**, tj.  $\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \alpha \wedge \alpha = \alpha$

**Důkaz:** Předpokládejme  $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $\alpha \leq \beta$ .

$$\alpha = \alpha \wedge \alpha \stackrel{(T3)}{\leq} \alpha \wedge \beta \stackrel{(T3)}{\leq} \alpha \wedge 1 \stackrel{(T4)}{=} \alpha,$$

tedy  $\alpha \wedge \beta = \alpha = \alpha \wedge_S \beta$ .

Totéž pro  $\alpha > \beta$ .

## Reprezentace fuzzy konjunkcí (obecně)

**Věta:** Necht'  $\wedge_1$  je fuzzy konjunkce a  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  rostoucí bijekce. Pak operace  $\wedge_2 : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  definovaná vzorcem

$$\alpha \wedge_2 \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\beta))$$

je fuzzy konjunkce. Je-li  $\wedge_1$  spojitá, je  $\wedge_2$  též spojitá.

**Důkaz:**

- Komutativita (asociativita se dokáže obdobně):

$$\alpha \wedge_2 \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\beta)) = i^{-1}(i(\beta) \wedge_1 i(\alpha)) = \beta \wedge_2 \alpha$$

- Monotonie: Předpokládejme  $\beta \leq \gamma$ .

$$\begin{aligned} i(\beta) &\leq i(\gamma), \\ i(\alpha) \wedge_1 i(\beta) &\leq i(\alpha) \wedge_1 i(\gamma), \\ \alpha \wedge_2 \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\beta)) &\leq i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\gamma)) = \alpha \wedge_2 \gamma. \end{aligned}$$

- Okrajová podmínka:

$$\alpha \wedge_2 1 = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(1)) = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 1) = i^{-1}(i(\alpha)) = \alpha.$$

## Klasifikace fuzzy konjunkcí

**Spojitá** fuzzy konjunkce  $\wedge$  je

- **archimédovská**, jestliže

$$\forall \alpha \in (0, 1) : \alpha \wedge \alpha < \alpha \quad (\text{TA})$$

- **striktní**, jestliže

$$\forall \alpha \in (0, 1) \forall \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle : \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta < \alpha \wedge \gamma \quad (\text{T3+})$$

- **nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

**Příklad:** Součinnová konjunkce je striktní, Łukasiewiczova je nilpotentní, standardní a drastická nejsou archimédovské (standardní nesplňuje (TA), drastická není spojitá).

## Věta o reprezentaci striktních fuzzy konjunkcí

Operace  $\wedge : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  je striktní fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  (**multiplikativní generátor**) taková, že

$$\alpha \wedge \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_p i(\beta)) = i^{-1}(i(\alpha) \cdot i(\beta)).$$

Že je podmínka postačující, jsme již dokázali (kromě striktnosti, což je snadné).

Důkaz nutnosti je mnohem obtížnější.

**Multiplikativní generátor striktní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.**

## Věta o reprezentaci nilpotentních fuzzy konjunkcí

Operace  $\wedge : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  je **nilpotentní** fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  (**Łukasiewiczův generátor**) taková, že

$$\alpha \wedge \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_l i(\beta)).$$

**Łukasiewiczův generátor nilpotentní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.**

**Věta:** Necht'  $\wedge$  je **nilpotentní** fuzzy konjunkce. Pak

$$\forall \alpha \in (0, 1) \exists n \in \mathbf{N} : \bigwedge_{k=1}^n \alpha = 0$$

**Důkaz:** Podle reprezentační věty stačí (bez újmy na obecnosti) dokázat větu pro Łukasiewiczovu konjunkci. Pro dostatečně velké  $n$  dostáváme

$$\alpha + \sum_{i=2}^n (\alpha - 1) \leq 0, \quad \bigwedge_{k=1}^n \alpha = 0.$$

### 3.5 Fuzzy průnik

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy konjunkce:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy konjunkcí)

### 3.6 Fuzzy disjunkce (trojúhelníková konorma, t-konorma)

je binární operace  $\dot{\vee} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  splňující

$$\alpha \dot{\vee} \beta = \beta \dot{\vee} \alpha \quad (\text{komutativita (S1)})$$

$$\alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma) = (\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma \quad (\text{asociativita (S2)})$$

$$\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\vee} \beta \leq \alpha \dot{\vee} \gamma \quad (\text{monotonie (S3)})$$

$$\alpha \dot{\vee} 0 = \alpha \quad (\text{okrajová podmínka (S4)})$$

**Věta:**  $\alpha \dot{\vee} 1 = 1$ .

**Důkaz:**  $\alpha \dot{\vee} 1 \stackrel{(S3)}{\geq} 0 \dot{\vee} 1 \stackrel{(S4)}{=} 1$ .

### Příklady fuzzy disjunkcí

- **Standardní (max, Gödelova, Zadehova ...):**

$$\alpha \overset{S}{\vee} \beta = \max(\alpha, \beta).$$

- **Součinnová (produktová, pravděpodobnostní ...):**

$$\alpha \overset{P}{\vee} \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta.$$

- **Łukasiewiczova (Gilesova, angl. též bold, bounded sum ...):**

$$\alpha \overset{L}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{pro } \alpha + \beta < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Drastická (slabá, angl. weak ...):**

$$\alpha \overset{D}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 0, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Einsteinova**

$$\alpha \overset{E}{\vee} \beta = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$$

## Vlastnosti fuzzy disjunkcí

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle : \alpha \overset{S}{\vee} \beta \leq \alpha \overset{D}{\vee} \beta \leq \alpha \overset{P}{\vee} \beta.$$

Standardní disjunkce je jediná, která je idempotentní, tj.  $\alpha \overset{D}{\vee} \alpha = \alpha$  pro všechna  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ .

## Dualita

Nechť  $\neg$  je fuzzy negace.

**A.** Je-li  $\wedge$  fuzzy konjunkce, pak  $\alpha \overset{D}{\vee} \beta = \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$  je fuzzy disjunkce (**duální** k  $\wedge$  vzhledem k  $\neg$ ).

**B.** Je-li  $\overset{D}{\vee}$  fuzzy disjunkce, pak  $\alpha \wedge \beta = \neg(\neg \alpha \overset{D}{\vee} \neg \beta)$  je fuzzy konjunkce (**duální** k  $\overset{D}{\vee}$  vzhledem k  $\neg$ ).

**Věta:**

- **Lukasiewiczovy** operace  $\overset{L}{\wedge}, \overset{L}{\vee}$  jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Součinnové** operace  $\overset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}$  jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Standardní** operace  $\overset{S}{\wedge}, \overset{S}{\vee}$  jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.
- **Drastické** operace  $\overset{D}{\wedge}, \overset{D}{\vee}$  jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.

## Klasifikace fuzzy disjunkcí

**Spojité** fuzzy disjunkce  $\overset{D}{\vee}$  je

- **archimédovská**, jestliže

$$\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \alpha \overset{D}{\vee} \alpha > \alpha \quad (\text{SA})$$

- **striktní**, jestliže

$$\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \forall \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle : \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \overset{D}{\vee} \beta < \alpha \overset{D}{\vee} \gamma \quad (\text{S3+})$$

- **nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

## Věty o reprezentaci fuzzy disjunkcí

**Věta:** Operace  $\overset{D}{\vee} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  je **striktní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  taková, že

$$\alpha \overset{D}{\vee} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \overset{P}{\vee} i(\beta)).$$

**Věta:** Operace  $\overset{D}{\vee} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  je **nilpotentní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce  $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  (**aditivní generátor**) taková, že

$$\alpha \overset{D}{\vee} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \overset{L}{\vee} i(\beta)) = \begin{cases} i^{-1}(i(\alpha) + i(\beta)) & \text{pro } i(\alpha) + i(\beta) \leq 1 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

### 3.7 Fuzzy sjednocení

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy disjunkce:

$$\mu_{A \dot{\cup} B}(x) = \mu_A(x) \overset{D}{\vee} \mu_B(x).$$

(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy disjunkcí)

### 3.8 Fuzzy výrokové algebry

černě vyznačené platí vždy

**červeně** vyznačené platí pro standardní fuzzy operace, ale ne pro některé jiné

**modře** vyznačené platí jen pro některé volby fuzzy operací (ne pro standardní)



$$\begin{aligned}
\neg\neg\alpha &= \alpha, & \alpha \wedge \beta &= \beta \wedge \alpha, \\
\alpha \dot{\vee} \beta &= \beta \dot{\vee} \alpha, & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \\
(\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma &= \alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma), & \alpha \dot{\vee} (\beta \wedge \gamma) &= (\alpha \dot{\vee} \beta) \wedge (\alpha \dot{\vee} \gamma), \\
\alpha \wedge (\beta \dot{\vee} \gamma) &= (\alpha \wedge \beta) \dot{\vee} (\alpha \wedge \gamma), & \alpha \dot{\vee} (\beta \wedge \gamma) &= (\alpha \dot{\vee} \beta) \wedge (\alpha \dot{\vee} \gamma), \\
\alpha \dot{\vee} \alpha &= \alpha, & \alpha \wedge \alpha &= \alpha, \\
\alpha \dot{\vee} (\alpha \wedge \beta) &= \alpha, & \alpha \wedge (\alpha \dot{\vee} \beta) &= \alpha, \\
\alpha \dot{\vee} 1 &= 1, & \alpha \wedge 0 &= 0, \\
\alpha \dot{\vee} 0 &= \alpha, & \alpha \wedge 1 &= \alpha, \\
\alpha \wedge \neg\alpha &= \mathbf{0}, & \alpha \dot{\vee} \neg\alpha &= \mathbf{1}, \\
\neg(\alpha \wedge \beta) &= \neg\alpha \dot{\vee} \neg\beta, & \neg(\alpha \dot{\vee} \beta) &= \neg\alpha \wedge \neg\beta.
\end{aligned}$$

## 4 Operace s fuzzy množinami odvozené od operací s jejich prvky

### 4.1 Konvexní fuzzy množiny

Nechť  $L$  je lineární prostor.

**Ostrá** množina  $A \subseteq L$  je **konvexní**, jestliže

$$\forall x, y \in A \forall \lambda \in (0, 1) : \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$$

Pomocí funkcí příslušnosti:

$$\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \leq \mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

Nechť  $X$  je ostrá konvexní podmnožina lineárního prostoru.

**Fuzzy** množina  $A \in \mathcal{F}(X)$  se nazývá **konvexní**, jestliže

$$\forall x, y \in X \forall \lambda \in (0, 1) : \mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

Konvexita fuzzy množiny nemá nic společného s konvexitou její funkce příslušnosti!

**Věta:** Konvexita je řezově konzistentní vlastnost.

Speciálně fuzzy množina reálných čísel je konvexní, právě když všechny její neprázdné řezy jsou intervaly.

### 4.2 Fuzzy čísla a fuzzy intervaly

**Fuzzy interval** je  $A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$  taková, že:

- pro všechna  $\alpha \in (0, 1)$  je  $\mathcal{R}_A(\alpha)$  uzavřený interval,
- $\text{Supp } A$  je omezená množina,
- $\mathcal{R}_A(1) \neq \emptyset$  (tj.  $\mathcal{R}_A(1)$  je neprázdný uzavřený interval).

Je-li navíc  $\mathcal{R}_A(1)$  jednobodová množina, nazývá se  $A$  **fuzzy číslo**.

Fuzzy intervaly jsou konvexní.

Značení (význam rozlišen podle počtu argumentů):

$\langle a, c, d, b \rangle$  lichoběžníkový fuzzy interval,

$\langle a, c, b \rangle = \langle a, c, c, b \rangle$  trojúhelníkové fuzzy číslo,

$\langle a, b \rangle = \langle a, a, b, b \rangle$  ostrý interval,

$a = \langle a, a \rangle = \langle a, a, a, a \rangle$  ostré číslo.

### 4.3 Rozšíření zobrazení (funkcí, unárních operací) na ostré množiny

**Zobrazení** je  $F: X \rightarrow Y$  je relace  $F \subseteq X \times Y$  taková, že

$$\forall x \in X \exists! y = F(x) \in Y : (x, y) \in F.$$

Zobrazuje prvky z  $X$  na prvky z  $Y$ , např. čísla na čísla.

**Rozšíření** zobrazení  $F: X \rightarrow Y$  je zobrazení  $F: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ :

$$F(A) = \{F(x) : x \in A\}.$$

Analogicky  $F^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ :

$$F^{-1}(B) = \{x \in X : F(x) \in B\},$$

speciálně

$$F^{-1}(y) = F^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : F(x) = y\}.$$

Rozšíření  $F$  a  $F^{-1}$  jsou zobrazení, nejsou však navzájem inverzní.

Zobrazují podmnožiny  $X$  na podmnožiny  $Y$ , např. množiny čísel na množiny čísel.

Pomocí funkcí příslušnosti:

$$\begin{aligned} \mu_F(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, y) \in F, \text{ tj. } y = F(x), \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases} \\ \mu_{F(A)}(y) &= \max_{x \in X} (\mu_F(x, y) \wedge \mu_A(x)), \\ \mu_{F^{-1}(B)}(x) &= \max_{y \in Y} (\mu_F(x, y) \wedge \mu_B(y)). \end{aligned}$$

#### 4.4 Rozšíření zobrazení (funkcí, unárních operací) na fuzzy množiny

(se zvláštním zřetelem na fuzzy čísla)

**Rozšíření** zobrazení  $F : X \rightarrow Y$  je zobrazení  $F : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ :

$$\mu_{F(A)}(y) = \sup_{x \in X} (\mu_F(x, y) \underset{\mathbb{S}}{\wedge} \mu_A(x)) \quad (A \in \mathcal{F}(X), y \in Y)$$

Analogicky  $F^{-1} : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ :

$$\mu_{F^{-1}(B)}(x) = \sup_{y \in Y} (\mu_F(x, y) \underset{\mathbb{S}}{\wedge} \mu_B(y)) \quad (B \in \mathcal{F}(Y), x \in X)$$

$F \subseteq X \times Y$  je ostrá relace, takže na volbě fuzzy konjunkce  $\wedge$  nezáleží:

$$\mu_F(x, y) \underset{\mathbb{S}}{\wedge} \mu_A(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{pro } \mu_F(x, y) = 1, \text{ tj. } y = F(x), \\ 0 & \text{pro } \mu_F(x, y) = 0. \end{cases}$$

Pomocí rozšíření  $F : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ,  $F^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  na **ostré** množiny lze rozšíření na **fuzzy** množiny psát

$$\begin{aligned} \mu_{F(A)}(y) &= \sup_{x \in F^{-1}(y)} \mu_A(x) = \sup \mu_A(F^{-1}(y)), \\ \mu_{F^{-1}(B)}(x) &= \mu_B(F(x)). \end{aligned}$$

Zobrazují fuzzy podmnožiny  $X$  na fuzzy podmnožiny  $Y$ , např. fuzzy čísla na fuzzy čísla (popř. jiné fuzzy množiny).

**Věta:** (omezená řezová konzistence)

$$F(\mathcal{R}_A(\alpha)) \subseteq \mathcal{R}_{F(A)}(\alpha).$$

Je-li pro všechna  $y \in Y$  množina

$$F^{-1}(y) = \{x \in X : (x, y) \in F\}$$

konečná, pak platí rovnost.

Princip rozšíření uplatněný na unární minus:

Fuzzy interval **opačný** k fuzzy intervalu  $A$  je  $-A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$ :

$$\begin{aligned} \mu_{-A}(x) &= \mu_A(-x) \\ \mathcal{R}_{-A}(\alpha) &= -\mathcal{R}_A(\alpha) \end{aligned}$$

Podobně pro  $A^n, \sqrt{A}, |A|, \exp(A), \ln(A), \dots$

(počítáme po řezech)

Speciálně pro **unární minus** aplikované na intervaly, trojúhelníková fuzzy čísla a lichoběžníkové fuzzy intervaly:

$$\begin{aligned} -\langle a, b \rangle &= \langle b, a \rangle \\ -\langle a, c, b \rangle &= \langle b, c, a \rangle \\ -\langle a, c, d, b \rangle &= \langle b, d, c, a \rangle \end{aligned}$$

## 4.5 Binární operace s fuzzy intervaly

$\square \in \{+, -, \cdot, /\}$

$\square : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  můžeme chápat jako ostrou relaci  $\square \subseteq \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ :

$$\mu_{\square}((y, z), x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y \square z = x, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Tu můžeme rozšířit podle principu rozšíření pro **unární operace** na operaci  $\mathcal{F}(\mathbf{R}^2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{R})$ . Abychom dostali binární operaci  $\square : \mathcal{F}(\mathbf{R}) \times \mathcal{F}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{R})$ , potřebujeme ještě složení s vhodným zobrazením (**cyklrickým rozšířením**)  $\mathcal{F}(\mathbf{R}) \times \mathcal{F}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{R}^2)$ :

$$\mu_{A \square B}(x) = \sup_{(y, z) \in \mathbf{R}^2, y \square z = x} (\mu_A(y) \wedge_{\mathbb{S}} \mu_B(z)).$$

Speciálně

$$\begin{aligned} \mu_{A+B}(x) &= \sup_{(y, z) \in \mathbf{R}^2, y+z=x} (\mu_A(y) \wedge_{\mathbb{S}} \mu_B(z)) \\ &= \sup_{z \in \mathbf{R}} (\mu_A(x-z) \wedge_{\mathbb{S}} \mu_B(z)), \\ \mu_{A-B}(x) &= \sup_{z \in \mathbf{R}} (\mu_A(x+z) \wedge_{\mathbb{S}} \mu_B(z)), \\ \mu_{A \cdot B}(x) &= \sup_{z \in \mathbf{R}, z \neq 0} (\mu_A(x/z) \wedge_{\mathbb{S}} \mu_B(z)), \quad x \neq 0, \\ \mu_{A/B}(x) &= \sup_{z \in \mathbf{R}} (\mu_A(x \cdot z) \wedge_{\mathbb{S}} \mu_B(z)). \end{aligned}$$

Jen pro hodnotu  $\mu_{A \cdot B}(0)$  musíme použít původní definici kvůli problémům s dělením nulou. Speciálně pro ostré intervaly  $A = \langle a, b \rangle$ ,  $B = \langle c, d \rangle$  dostaneme **intervalovou aritmetiku**:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle &= \langle a+c, b+d \rangle, \\ \langle a, b \rangle - \langle c, d \rangle &= \langle a-d, b-c \rangle, \\ \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle &= \langle \min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\} \rangle, \\ \langle a, b \rangle / \langle c, d \rangle &= \langle \min\{a/c, a/d, b/c, b/d\}, \max\{a/c, a/d, b/c, b/d\} \rangle. \end{aligned}$$

Poslední rovnost platí pouze pro  $0 \notin \langle c, d \rangle$ . Pro **kladné** intervaly, tj.  $a, c > 0$ :

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle &= \langle ac, bd \rangle, \\ \langle a, b \rangle / \langle c, d \rangle &= \langle a/d, b/c \rangle. \end{aligned}$$

**Věta:** Sčítání, odčítání, násobení a dělení fuzzy intervalů je řezově konzistentní (dělení za předpokladu, že stupeň příslušnosti nuly k děliteli je nulový).

$$\mathcal{R}_{A \square B}(\alpha) = \mathcal{R}_A(\alpha) \square \mathcal{R}_B(\alpha).$$

**Věta:** Součet, rozdíl a součin fuzzy čísel (resp. fuzzy intervalů) je fuzzy číslo (resp. fuzzy interval). (Též podíl, pokud uzávěr nosiče dělitele neobsahuje nulu.)

**Věta:** Součet a rozdíl trojúhelníkových fuzzy čísel (resp. lichoběžníkových fuzzy intervalů) je trojúhelníkové fuzzy číslo (resp. lichoběžníkový fuzzy interval), konkrétně

$$\begin{aligned} \langle a_1, c_1, b_1 \rangle + \langle a_2, c_2, b_2 \rangle &= \langle a_1 + a_2, c_1 + c_2, b_1 + b_2 \rangle, \\ \langle a_1, c_1, d_1, b_1 \rangle + \langle a_2, c_2, d_2, b_2 \rangle &= \langle a_1 + a_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2, b_1 + b_2 \rangle, \\ \langle a_1, c_1, b_1 \rangle - \langle a_2, c_2, b_2 \rangle &= \langle a_1 - b_2, c_1 - c_2, b_1 - a_2 \rangle, \\ \langle a_1, c_1, d_1, b_1 \rangle - \langle a_2, c_2, d_2, b_2 \rangle &= \langle a_1 - b_2, c_1 - d_2, d_1 - c_2, b_1 - a_2 \rangle. \end{aligned}$$

Pro součin a podíl podobná věta neplatí.

Nutno rozlišovat:

$A^2$  (kvadrát fuzzy čísla)

$A \cdot A$  (součin dvou fuzzy čísel se stejnými funkcemi příslušnosti; nezáleží na tom, že je to totéž fuzzy číslo)

$\mu_{A^2}$  je na záporných číslech nulová,

$\mu_{A \cdot A}$  nemusí být.

**Příklady:**

$$\begin{aligned}\langle 2, 3 \rangle^2 &= \langle 4, 9 \rangle = \langle 2, 3 \rangle \cdot \langle 2, 3 \rangle, \\ \langle -2, 3 \rangle^2 &= \langle 0, 9 \rangle \neq \\ &\neq \langle -2, 3 \rangle \cdot \langle -2, 3 \rangle = \langle -6, 9 \rangle.\end{aligned}$$

**Věta:** Vlastnosti operací s fuzzy intervaly:

$$\begin{aligned}0 + A &= A, \\ 0 \cdot A &= 0, \\ 1 \cdot A &= A, \\ A + B &= B + A, \\ A \cdot B &= B \cdot A, \\ A + (B + C) &= (A + B) + C, \\ A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C, \\ A + (-B) &= A - B, \\ (-A) \cdot B &= -(A \cdot B) = A \cdot (-B), \\ -(-A) &= A, \\ A/B &= A \cdot (1/B), \\ A \cdot (B + C) &\leq (A \cdot B) + (A \cdot C)\end{aligned}$$

Pokud je v posledním vztahu  $A$  ostré číslo ( $A = x$ ), pak nastává rovnost.

Pro fuzzy intervaly může být:

$$\begin{aligned}A - A &\neq 0, \\ (A + B) - B &\neq A, \\ A/A &\neq 1, \\ (A/B) \cdot B &\neq A, \\ A \cdot (B + C) &\neq A \cdot B + A \cdot C.\end{aligned}$$

**Příklady:**

$$\begin{aligned}\langle 2, 3 \rangle - \langle 2, 3 \rangle &= \langle -1, 1 \rangle, \\ \langle 2, 3 \rangle / \langle 2, 3 \rangle &= \langle 2/3, 3/2 \rangle, \\ \langle 2, 3 \rangle \cdot (1 - 1) &= \langle 2, 3 \rangle \cdot 0 = 0 \neq \\ &\neq \langle 2, 3 \rangle \cdot 1 - \langle 2, 3 \rangle \cdot 1 = \langle -1, 1 \rangle, \\ \langle 2, 3 \rangle \cdot (\langle 1, 2 \rangle + \langle -2, -1 \rangle) &= \langle 2, 3 \rangle \cdot \langle -1, 1 \rangle = \langle -3, 3 \rangle \neq \\ &\neq \langle 2, 3 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle + \langle 2, 3 \rangle \cdot \langle -2, -1 \rangle = \langle 2, 6 \rangle + \langle -6, -2 \rangle = \langle -4, 4 \rangle.\end{aligned}$$

**Důsledek:** Rovnice typu

$$\begin{aligned}A + X &= B, \\ A - X &= B, \\ A \cdot X &= B, \\ A/X &= B,\end{aligned}$$

apod. (s neznámou  $X$ ) **nelze** řešit převedením na druhou stranu.

V oboru fuzzy intervalů je lze řešit jako rovnice pro meze intervalů jednotlivých řezů.

**Příklad:** Řešením rovnice

$$\langle 1, 2 \rangle + X = \langle 4, 6 \rangle$$

je interval  $X = \langle x_\ell, x_u \rangle$  splňující

$$1 + x_\ell = 4, \quad 2 + x_u = 6;$$

tj.  $x_\ell = 3, x_u = 4, X = \langle 3, 4 \rangle$ .

**Příklad:** Řešením rovnice

$$\langle 1, 4 \rangle + X = \langle 4, 6 \rangle$$

má být interval  $X = \langle x_\ell, x_u \rangle$  splňující

$$1 + x_\ell = 4, \quad 4 + x_u = 6;$$

tj.  $x_\ell = 3$ ,  $x_u = 2 \not\geq x_\ell$ , takový interval (ani fuzzy interval) neexistuje.

**Příklad:** Soustava rovnic

$$\begin{aligned} X + Y &= \langle 4, 8 \rangle, \\ X - Y &= \langle 2, 6 \rangle \end{aligned}$$

vede pro  $X = \langle x_\ell, x_u \rangle$ ,  $Y = \langle y_\ell, y_u \rangle$  na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_\ell + y_\ell &= 4, \\ x_u + y_u &= 8, \\ x_\ell - y_u &= 2, \\ x_u - y_\ell &= 6, \end{aligned}$$

s řešením

$$\begin{aligned} X &= \langle x_\ell, x_u \rangle = \langle 4 - y_\ell, 6 + y_\ell \rangle, \\ Y &= \langle y_\ell, y_u \rangle = \langle y_\ell, 2 - y_\ell \rangle. \end{aligned}$$

Protože dolní meze intervalů nesmí být větší než horní, dostáváme omezení  $-1 \leq y_\ell \leq 1$ .

**Příklad:** Soustava rovnic

$$\begin{aligned} X + Y &= \langle 4, 8 \rangle, \\ X - Y &= \langle 2, 4 \rangle \end{aligned}$$

vede pro  $X = \langle x_\ell, x_u \rangle$ ,  $Y = \langle y_\ell, y_u \rangle$  na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_\ell + y_\ell &= 4, \\ x_u + y_u &= 8, \\ x_\ell - y_u &= 2, \\ x_u - y_\ell &= 4, \end{aligned}$$

která nemá řešení.

## Literatura

- [1] Navara, M., Olšák, P.: *Základy fuzzy množin*. Skriptum ČVUT, 2. (přepřacované) vydání, Praha, 2007.
- [2] Kolesárová, A., Kováčová, M.: *Fuzzy množiny a ich aplikácie*. STU, Bratislava, 2004.
- [3] Turunen, E.: *Mathematics Behind Fuzzy Logic*. Physica-Verlag, 1999.
- [4] Jura, P.: *Základy fuzzy logiky pro řízení a modelování*. VUT Brno, 2003.
- [5] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank: *An Introduction to Fuzzy Control*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [6] Kruse, R., Gebhardt, J., Klawon, F.: *Foundations of Fuzzy Systems*. J. Wiley, 1994.

- [7] Novák, V.: *Základy fuzzy modelování*. BEN – technická literatura, Praha, 2000.
- [8] Novák, V.: *Fuzzy množiny a jejich aplikace*. Mat. seminář SNTL, Praha, 1990.
- [9] Vysoký, P.: *Fuzzy řízení*. Skriptum ČVUT, Praha, 1996.
- [10] Klir, G.J., Yuan, B.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*. Prentice-Hall, 1995.
- [11] Nguyen, H.T., Walker, E.A.: *A First Course in Fuzzy Logic*. 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton/London/New York/Washington, 2000.
- [12] Ross, T.J.: *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. 2nd ed., John Wiley & Sons, 2004.

**Doplňková:**

- [13] Hájek, P.: *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer, Dordrecht, 1998.
- [14] Butnariu, D., Klement, E.P.: *Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions*. Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [15] Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E.: *Triangular Norms*. Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [16] Gottwald, S.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Teknea, SA, Toulouse, 1993.
- [17] Gottwald, S.: *Einführung in Fuzzy-Methoden*. 4th ed. Akademie Verlag, Berlin, 1993.
- [18] Cignoli R., D'Ottaviano I.M.L., Mundici D.: *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*. Trends in Logic, Volume 7. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [19] Mareš, M.: *Computation over Fuzzy Quantities*. CRC Press, Boca Raton, 1994.