Reprezentace znalostí pomocí fuzzy množin 2

Mirko Navara
http://cmp.felk.cvut.cz/~navara
14. prosince 2009

0.1 Fuzzy implikace

je jakákoli operace $\dot{\to} : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, která se na $\{0,1\}^2$ shoduje s klasickou implikací. Mohli bychom si přát:

$$\alpha \dot{\to} \beta = 1 \Leftarrow \alpha \le \beta, \tag{I1a}$$

$$\alpha \dot{\to} \beta = 1 \Rightarrow \alpha \le \beta, \tag{I1b}$$

$$1 \dot{\to} \beta = \beta, \tag{I2}$$

$$\dot{\to} \text{ je nerostoucí v 1. argumentu a neklesající v 2. argumentu,} \tag{I3}$$

$$\alpha \dot{\to} \beta = \underset{S}{\neg}\beta \dot{\to} \underset{S}{\neg}\alpha, \tag{I4}$$

$$\alpha \dot{\to} (\beta \dot{\to} \gamma) = \beta \dot{\to} (\alpha \dot{\to} \gamma), \tag{I5}$$

$$\text{spojitost.} \tag{I6}$$

R-implikace (reziduovaná fuzzy implikace, reziduum)

je operace

$$\alpha \overset{R}{\dot{\to}} \beta = \sup\{\gamma : \ \alpha \dot{\wedge} \gamma \le \beta\} \tag{RI}$$

kde $\dot{\wedge}$ je fuzzy konjunkce

(je-li $\dot{\wedge}$ spojitá, lze supremum nahradit maximem)

Příklady R-implikací

- Od standardní konjunkce $\underset{S}{\wedge}$ je odvozena **Gödelova implikace**

$$\alpha \overset{R}{\underset{S}{\to}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \le \beta, \\ \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je po částech lineární a spojitá s výjimkou bodů (α, α), $\alpha < 1$.

- Od Łukasiewiczovy konjunkce $\underset{L}{\wedge}$ je odvozena **Łukasiewiczova implikace**

$$\alpha \overset{R}{\underset{L}{\to}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \le \beta, \\ 1 - \alpha + \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je po částech lineární a spojitá.

- Od součinové konjunkce $\underset{P}{\wedge}$ je odvozena **Goguenova** (též **Gainesova**) **implikace**

$$\alpha \overset{R}{\underset{P}{\to}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \le \beta, \\ \frac{\beta}{\alpha} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Má jediný bod nespojitosti, $(0,0)$.

Vlastnosti R-implikací

Věta: Nechť $\mathbin{\dot\wedge}$ je spojitá fuzzy konjunkce. Pak R-implikace $\overset{\mathrm{R}}{\dot\to}$ splňuje (I1a), (I1b), (I2), (I3).

Důkaz: $\alpha \overset{\mathrm{R}}{\dot\to} \beta = \sup \Gamma(\alpha,\beta)$, kde $\Gamma(\alpha,\beta) = \{\gamma : \ \alpha \mathbin{\dot\wedge} \gamma \leq \beta\}$ je interval obsahující nulu. (Při spojitosti $\mathbin{\dot\wedge}$ navíc uzavřený.)
(I1a) Je-li $\alpha \leq \beta$, pak $\Gamma(\alpha,\beta) = \langle 0,1\rangle$, $\sup \Gamma(\alpha,\beta) = 1$.
(I1b) Je-li $\alpha > \beta$, pak $1 \notin \Gamma(\alpha,\beta)$, $\sup \Gamma(\alpha,\beta) < 1$ (z uzavřenosti $\Gamma(\alpha,\beta)$).
(I2): $1 \overset{\mathrm{R}}{\dot\to} \beta = \sup\{\gamma : \ \gamma \leq \beta\} = \beta$.
(I3): Zvětšujeme-li α, $\Gamma(\alpha,\beta)$ se nezvětšuje.
Zvětšujeme-li β, $\Gamma(\alpha,\beta)$ se nezmenšuje.

Věta: Reziduovaná fuzzy implikace příslušná **spojité** fuzzy konjunkci $\mathbin{\dot\wedge}$ je spojitá, právě když $\mathbin{\dot\wedge}$ je nilpotentní.

Věta: Je-li $\mathbin{\dot\wedge}$ **spojitá** fuzzy konjunkce a $\overset{\mathrm{R}}{\dot\to}$ příslušná reziduovaná fuzzy implikace, pak

$$\alpha \mathbin{\dot\wedge} (\alpha \overset{\mathrm{R}}{\dot\to} \beta) = \alpha \mathbin{\underset{\mathrm{S}}{\wedge}} \beta\,.$$

S-implikace

je operace

$$\alpha \overset{\mathrm{S}}{\dot\to} \beta = \underset{\mathrm{S}}{\neg}\, \alpha \mathbin{\dot\vee} \beta \tag{SI}$$

kde $\dot\vee$ je fuzzy disjunkce

Příklad:

- Ze standardní disjunkce dostáváme **Kleeneovu–Dienesovu** implikaci

$$\alpha \overset{\mathrm{S}}{\underset{\mathrm{S}}{\to}} \beta = \max(1-\alpha,\beta).$$

- Z Łukasiewiczovy disjunkce dostáváme **Łukasiewiczovu** implikaci $\overset{\mathrm{S}}{\underset{\mathrm{L}}{\to}}$, která se shoduje s Łukasiewiczovou reziduovanou implikací $\overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{L}}{\to}}$.

Všechny požadavky (I1a),(I1b),(I2)–(I6) splňují ze zde probíraných fuzzy implikací pouze reziduované implikace odvozené od nilpotentních fuzzy konjunkcí (např. Łukasiewiczova implikace).

0.2 Fuzzy biimplikace (ekvivalence)

je operace $\dot\leftrightarrow$, obvykle definovaná vztahem

$$\alpha \mathbin{\dot\leftrightarrow} \beta = (\alpha \mathbin{\dot\to} \beta) \mathbin{\dot\wedge} (\beta \mathbin{\dot\to} \alpha),$$

kde $\dot\to$ je fuzzy implikace a $\mathbin{\dot\wedge}$ je fuzzy konjunkce (biimplikaci indexujeme stejně jako odpovídající fuzzy implikaci)

Pokud $\dot\to$ splňuje (I1a) (například pro reziduovanou implikaci), je vždy aspoň jedna ze závorek na pravé straně rovna jedné, takže nezáleží na volbě fuzzy konjunkce $\mathbin{\dot\wedge}$.

Příklad: **Łukasiewiczova** biimplikace: $\alpha \overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{L}}{\leftrightarrow}} \beta = 1 - |\alpha - \beta|$.

Využití ve vícekriteriálním rozhodování (Multicriteria Decision Making)

Motivační příklad: Výběr místa pro přistání na jiné planetě.

1. Vyhodnotíme jednotlivá kritéria.
2. Převedeme na fuzzy pravdivostní hodnoty kvantifikující jednotlivé vlastnosti.
   Zde posuzujeme jen „vhodnost“, ale lze vyjádřit složitější jazykové proměnné.

3. Zkombinujeme je vhodnými fuzzy operacemi do výsledného kritéria pro rozhodování.

Specifika:
Jde hlavně o bezpečné přistání, ale i o proveditelnost dalších úkonů.
Pravděpodobnostní model by se hodil, ale nejsou pro něj k dispozici dostatečná data.
Stroj se musí rozhodnout autonomně a rychle vyhodnotit mnoho dat a možností.

Výběr operací

Výsledek **standardní** konjunkce je dán „nejslabším článkem".
Striktní a nilpotentní konjunkce vyjadřují, že „nevýhody se sčítají".
Konjunkce výhod odpovídá disjunkci nevýhod:

$$\alpha_1 \underset{\cdot}{\wedge} \cdots \underset{\cdot}{\wedge} \alpha_n = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\, \alpha_1 \mathbin{\dot\vee} \cdots \mathbin{\dot\vee} \underset{\cdot}{\neg}\, \alpha_n)\,.$$

Tuto interakci lze kvantifikovat volbou operace.
Např. pro $w > 0$ definujeme **Yagerovu třídu konjunkcí** $\underset{\mathrm{Y_w}}{\wedge}$ vzorcem

$$\alpha \underset{\mathrm{Y_w}}{\wedge} \beta = \max\left(1 - \left((\alpha-1)^w + (\beta-1)^w\right)^{\frac{1}{w}}, 0\right).$$

Význačné hodnoty Yagerovy třídy konjunkcí

	0	0,25	0,5	0,75	1
1	0	0,25	0,5	0,75	1
0,75	0	0	0,25	0,5	0,75
0,5	0	0	0	0,25	0,5
0,25	0	0	0	0	0,25
0	0	0	0	0	0

$w = 1$ (Łukasiewiczova)

	0	0,25	0,5	0,75	1
1	0	0,25	0,5	0,75	1
0,75	0	0,21	0,44	0,65	0,75
0,5	0	0,1	0,29	0,44	0,5
0,25	0	0	0,1	0,21	0,25
0	0	0	0	0	0

$w = 2$

	0	0,25	0,5	0,75	1
1	0	0,25	0,5	0,75	1
0,75	0	0,25	0,5	0,73	0,75
0,5	0	0,25	0,46	0,5	0,5
0,25	0	0,20	0,25	0,25	0,25
0	0	0	0	0	0

$w = 10$

	0	0,25	0,5	0,75	1
1	0	0,25	0,5	0,75	1
0,75	0	0,25	0,5	0,75	0,75
0,5	0	0,25	0,5	0,5	0,5
0,25	0	0,25	0,25	0,25	0,25
0	0	0	0	0	0

$w \to \infty$ (standardní)

Pokračování příkladu Přistání na planetě

Některá kritéria se navzájem ovlivňují:
Sklon, S, a nerovnosti (textura), T, společně zvyšují riziko převrácení, neměly by se vyskytovat současně, proto použijeme menší fuzzy konjunkci (např. Łukasiewiczova nebo některá z Yagerových), $S \underset{\mathrm{L}}{\wedge} T$ nebo $S \underset{\mathrm{Y_w}}{\wedge} T$.
Zde nerozlišujeme fuzzy množiny od jejich funkcí příslušnosti.

Naopak: Přistání je vhodné na rozhraní dne a noci, tj. při středním osvětlení, D.
Tehdy se stejné nerovnosti víc projeví na textuře a nevadí to tolik.
Hodilo by se tato 2 kritéria zkombinovat větší fuzzy konjunkcí, např. standardní, $T \underset{\mathrm{S}}{\wedge} D$.

Problém: Chceme zahrnout texturu T do dvou různých konjunkcí.
To jde díky tomu, že $T \underset{\mathrm{S}}{\wedge} D = T \underset{\cdot}{\wedge} (T \overset{\mathrm{R}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} D)$.

Můžeme obojí zkombinovat do tvaru $(S \underset{\mathrm{L}}{\wedge} T) \underset{\cdot}{\wedge} (T \overset{\mathrm{R}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} D)$.
Ten lze číst: „Je malý sklon i nerovnosti, a pokud jsou nerovnosti viditelné, je to jen na rozhraní dne a noci.“

K tomu konjunkce s dosažitelnou vzdáleností, V,
$(S \underset{\mathrm{L}}{\wedge} T) \underset{\cdot}{\wedge} (T \overset{\mathrm{R}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} D) \underset{\cdot}{\wedge} V$.

Fuzzy logika dovoluje vyjádřit i složitější formule.

Modifikátory (Linguistic Hedges)

Nechceme jen vyjádřit, že objekt **splňuje** nějakou vlastnost V, ale že ji **splňuje hodně, trochu** atd.

To lze navrhnout jako novou vlastnost, nebo (aspoň v některých případech) vyjádřit transformací stupně příslušnosti, např.
$h(V) = V^2 \approx$ splňuje vlastnost V hodně,
$m(V) = \sqrt{V} \approx$ splňuje V aspoň zčásti.

K tomu jsou i logické prostředky, např.
$h(V) = V \underset{\mathrm{P}}{\wedge} V$,
$t(V) = V \overset{\mathrm{P}}{\vee} V \approx m(V))$.

Příklad: Flash disk

Chceme koupit flash disk s následujícími vlastnostmi:
K = velká kapacita,
C = nízká cena.
To jsou protichůdné požadavky.
Je-li jeden splněn hodně, můžeme slevit, že druhý je splněn jen zčásti.
Tyto možnosti spojíme disjunkcí:

$$(K \underset{\cdot}{\wedge} C) \mathbin{\dot\vee} (h(K) \underset{\cdot}{\wedge} m(C)) \mathbin{\dot\vee} (m(K) \underset{\cdot}{\wedge} h(C)) \,.$$

Složitější vztahy se obvykle vyjadřují ve tvaru implikací, kde předpoklad určuje podmínky, za nichž je pravidlo adekvátní.
Výsledek je určen kombinací výstupů relevantních pravidel, vážených podle jejich adekvátnosti.

Literatura

[1] Navara, M., Olšák, P.: *Základy fuzzy množin.* Skriptum ČVUT, 2. (přepracované) vydání, Praha, 2007.

[2] Kolesárová, A., Kováčová, M.: *Fuzzy množiny a ich aplikácie.* STU, Bratislava, 2004.

[3] Turunen, E.: *Mathematics Behind Fuzzy Logic.* Physica-Verlag, 1999.

[4] Jura, P.: Základy fuzzy logiky pro řízení a modelování. VUT Brno, 2003.

[5] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank: *An Introduction to Fuzzy Control*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.

[6] Kruse, R., Gebhardt, J., Klawon, F.: *Foundations of Fuzzy Systems.* J. Wiley, 1994.

[7] Novák, V.: *Základy fuzzy modelování.* BEN – technická literatura, Praha, 2000.

[8] Novák, V.: *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* Mat. seminář SNTL, Praha, 1990.

[9] Vysoký, P.: *Fuzzy řízení.* Skriptum ČVUT, Praha, 1996.

[10] Klir, G.J., Yuan, B.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications.* Prentice-Hall, 1995.

[11] Nguyen, H.T., Walker, E.A.: *A First Course in Fuzzy Logic.* 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton/London/New York/Washington, 2000.

[12] Ross, T.J.: Fuzzy Logic with Engineering Applications. 2nd ed., John Wiley & Sons, 2004.

Doplňková:

[13] Hájek, P.: *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Kluwer, Dordrecht, 1998.

[14] Butnariu, D., Klement, E.P.: *Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions.* Kluwer, Dordrecht, 1993.

[15] Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E.: *Triangular Norms.* Kluwer, Dordrecht, 2000.

[16] Gottwald, S.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Teknea, SA, Toulouse, 1993.

[17] Gottwald, S.: *Einführung in Fuzzy-Methoden.* 4th ed. Akademie Verlag, Berlin, 1993.

[18] Cignoli R., D'Ottaviano I.M.L., Mundici D.: *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning.* Trends in Logic, Volume 7. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[19] Mareš, M.: *Computation over Fuzzy Quantities.* CRC Press, Boca Raton, 1994.