

Reprezentace znalostí pomocí fuzzy množin

Mirko Navara

<http://cmp.felk.cvut.cz/~navara>

2. prosince 2009

1 Pojem fuzzy množiny

1.1 Minimum o klasických množinách

Abychom se vyhnuli problémům, omezíme se na podmnožiny nějaké **univerzální množiny** (**univerza**) X
 $\mathcal{P}(X)$ značí množinu všech podmnožin množiny X

Množinu $A \in \mathcal{P}(X)$ jednoznačně určuje její **charakteristická funkce** $\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \notin A. \end{cases}$$

$$A = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}.$$

Pomocí značení

$$\mu_A^{-1}(M) = \{x \in X : \mu_A(x) \in M\}$$

lze psát

$$A = \mu_A^{-1}(\{1\}) = \mu_A^{-1}((0, 1)).$$

Místo $\mu_A^{-1}(\{1\})$ píšeme $\mu_A^{-1}(1)$ apod.

Speciálně $\mu_\emptyset = 0$, $\mu_X = 1$.

1.2 Zavedení fuzzy množin

Fuzzy podmnožina univerza X (stručně **fuzzy množina**) je objekt A , který popisuje (zobecněná) **charakteristická funkce** (**funkce příslušnosti**) $\mu_A : X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$

Alternativní značení: $A(x)$

„Klasické“ množiny nazýváme v tomto kontextu **ostré** (angl. **crisp, sharp**).

$\mathcal{F}(X)$ značí množinu všech fuzzy podmnožin univerza X

Obor pravdivostních hodnot (angl. **range, level set**): $\text{Range}(A) = \{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : (\exists x \in X : \mu_A(x) = \alpha)\} = \mu_A(X)$

Výška: $h(A) = \sup \text{Range}(A)$

Nosič (angl. **support**): $\text{Supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} = \mu_A^{-1}((0, 1))$

Jádro (angl. **core**): $\text{core}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} = \mu_A^{-1}(1)$

Příklady fuzzy množin

$A, B \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 2 - x & \text{pro } x \in (1, 2), \\ 0 & \text{pro } x > 2, \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3, \\ 1 & \text{pro } x = 4, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x = 5, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Konečné fuzzy množiny zapisujeme stručněji např. $\mu_B = \{(3, \frac{1}{2}), (4, 1), (5, \frac{1}{4})\}$.

Alternativní značení: $\mu_B = \{\frac{1}{2}/3, 1/4, \frac{1}{4}/5\}$, $\mu_B = \frac{1}{2}/3 + 1/4 + \frac{1}{4}/5$.

1.3 Fuzzy inkluze

Klasická definice $A \subseteq B \iff \forall x \in A : x \in B$ se nehodí, neboť pro fuzzy množiny nemůžeme psát $x \in A, x \in B$

Nicméně $A \subseteq B \iff \forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \iff \mu_A \leq \mu_B$

Pro $A, B \in \mathcal{F}(X)$:

$A \subseteq B \iff \forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \iff \mu_A \leq \mu_B$

2 Operace s fuzzy množinami

2.1 Operace s ostrými množinami

množinové operace	výrokové operace	vztah
$\bar{} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$	$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$	$\bar{A} = \{x \in X : \neg(x \in A)\}$
$\cap : \mathcal{P}(X)^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$	$\wedge : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$	$A \cap B = \{x \in X : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
$\cup : \mathcal{P}(X)^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$	$\vee : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$	$A \cup B = \{x \in X : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Pomocí charakteristických funkcí:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \neg \mu_A(x)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

2.2 Zákony Booleovy algebry

$$\begin{array}{ll} \neg \neg \alpha = \alpha, & \alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha, \\ \alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha, & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \\ (\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma), & \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma), \\ \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma), & \alpha \wedge \alpha = \alpha, \\ \alpha \vee \alpha = \alpha, & \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha, \\ \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \alpha, & \alpha \wedge 0 = 0, \\ \alpha \vee 1 = 1, & \alpha \wedge 1 = \alpha, \\ \alpha \vee 0 = \alpha, & \alpha \vee \neg \alpha = 1, \\ \alpha \wedge \neg \alpha = 0, & \neg(\alpha \vee \beta) = \neg \alpha \wedge \neg \beta. \\ \neg(\alpha \wedge \beta) = \neg \alpha \vee \neg \beta, & \end{array}$$

2.3 Fuzzy negace

je unární operace $\neg : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ taková, že

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \neg \beta \leq \neg \alpha, \tag{N1}$$

$$\neg \neg \alpha = \alpha. \tag{N2}$$

Příklad: Standardní negace: $\neg_s \alpha = 1 - \alpha$.

Vlastnosti fuzzy negací

Věta: Každá fuzzy negace \neg je spojitá, klesající, bijektivní a splňuje okrajové podmínky

$$\neg 1 = 0, \quad \neg 0 = 1. \tag{N0}$$

Její graf je symetrický podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. $\neg^{-1} = \neg$

Důkaz:

- Prostá: Je-li $\neg \alpha = \neg \beta$, pak $\alpha = \neg \neg \alpha = \neg \neg \beta = \beta$.
- Surjektivní („na“): Pro každé $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ existuje $\beta \in \langle 0, 1 \rangle$ takové, že $\alpha = \neg \beta$, totiž $\beta = \neg \alpha$.
- \Rightarrow spojitost a okrajové podmínky.
- Symetrie grafu je ekvivalentní s involutivitou (N2).

Věta o reprezentaci fuzzy negací

Nutná a postačující podmínka pro to, aby funkce $\neg : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ byla fuzzy negace, je existence rostoucí bijekce $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ (**generátor fuzzy negace \neg**) takové, že

$$\neg = i \circ \neg_s \circ i^{-1}, \quad \text{tj.} \quad \neg \alpha = i^{-1}(\neg_s i(\alpha)).$$

Důkaz: (Dle [Nguyen-Walker].)

- Postačující:
(N1): Předpokládejme $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$, $\alpha \leq \beta$.
 i, i^{-1} uspořádání zachovávají, \neg_s obrací:

$$\begin{aligned} i(\alpha) &\leq i(\beta) \\ \neg_s i(\alpha) &\geq \neg_s i(\beta) \\ i^{-1}(\neg_s i(\alpha)) &\geq i^{-1}(\neg_s i(\beta)) \\ \neg \alpha &\geq \neg \beta \end{aligned}$$

(N2): $\neg \circ \neg = i \circ \neg_s \circ i^{-1} \circ i \circ \neg_s \circ i^{-1} = i \circ \neg_s \circ \neg_s \circ i^{-1} = i \circ i^{-1} = \text{id}$,
kde id je identita na $\langle 0, 1 \rangle$.

Možná konstrukce generátoru fuzzy negace

- Nutná: Dokážeme, že

$$i(\alpha) = \frac{\alpha + \neg_s \neg \alpha}{2}$$

je generátorem fuzzy negace \neg .

i je rostoucí, spojitá, $i(0) = 0$, $i(1) = 1$, tedy i je bijekce na $\langle 0, 1 \rangle$.

$$\begin{aligned} \neg_s i(\alpha) &= 1 - \frac{\alpha + \neg_s \neg \alpha}{2} = \frac{1 - \alpha + 1 - \neg_s \neg \alpha}{2} = \frac{\neg_s \alpha + \neg_s \neg_s \neg \alpha}{2} = \\ &= \frac{\neg_s \alpha + \neg \alpha}{2} = \frac{\neg_s \neg_s \neg \alpha + \neg \alpha}{2} = i(\neg \alpha). \\ i \circ \neg_s &= \neg \circ i, \quad \text{neboli } i \circ \neg_s \circ i^{-1} = \neg \end{aligned}$$

Generátor fuzzy negace není jednoznačně určen.

2.4 Fuzzy doplněk

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \neg \mu_A(x).$$

Rozlišujeme stejnými indexy, jako u fuzzy negací, například \overline{A}^S je standardní doplněk.

2.5 Fuzzy konjunkce (trojúhelníková norma, t-norma)

(angl. **triangular norm**) je binární operace $\wedge : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ splňující následující axiomy pro všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha \quad (\text{komutativita}) \quad (\text{T1})$$

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \quad (\text{asociativita}) \quad (\text{T2})$$

$$\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta \leq \alpha \wedge \gamma \quad (\text{monotonie}) \quad (\text{T3})$$

$$\alpha \wedge 1 = \alpha \quad (\text{okrajová podmínka}) \quad (\text{T4})$$

Věta: $\alpha \wedge 0 = 0$.

Důkaz: Podle (T3) a (T4) platí: $\alpha \wedge 0 \stackrel{(\text{T3})}{\leq} 1 \wedge 0 \stackrel{(\text{T4})}{=} 0$.

Příklady fuzzy konjunkcí

- **Standardní** (min, Gödelova, Zadehova ...):

$$\alpha \wedge_{\mathbb{S}} \beta = \min(\alpha, \beta).$$

- **Součinná** (produktová, pravděpodobnostní, Goguenova, angl. algebraic product ...):

$$\alpha \wedge_{\mathbb{P}} \beta = \alpha \cdot \beta.$$

- **Łukasiewiczova** (Gilesova, angl. též bold ...):

$$\alpha \wedge_{\mathbb{L}} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta - 1 & \text{pro } \alpha + \beta - 1 > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Drastická** (slabá, angl. weak ...):

$$\alpha \wedge_{\mathbb{D}} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vlastnosti fuzzy konjunkcí

Věta:

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle : \alpha \wedge_{\mathbb{D}} \beta \leq \alpha \wedge \beta \leq \alpha \wedge_{\mathbb{S}} \beta.$$

Důkaz: Je-li $\alpha = 1$ nebo $\beta = 1$, pak podmínka (T4) dává stejný výsledek pro všechny fuzzy konjunkce. Předpokládejme (bez újmy na obecnosti) $\alpha \leq \beta < 1$. Pak

$$\alpha \wedge_{\mathbb{D}} \beta = 0 \leq \alpha \wedge \beta \leq \alpha \wedge 1 = \alpha = \alpha \wedge_{\mathbb{S}} \beta.$$

Věta: Standardní konjunkce je jediná, která je **idempotentní**, tj. $\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \alpha \wedge \alpha = \alpha$

Důkaz: Předpokládejme $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$, $\alpha \leq \beta$.

$$\alpha = \alpha \wedge \alpha \stackrel{(T3)}{\leq} \alpha \wedge \beta \stackrel{(T3)}{\leq} \alpha \wedge 1 \stackrel{(T4)}{=} \alpha,$$

tedy $\alpha \wedge \beta = \alpha = \alpha \wedge_{\mathbb{S}} \beta$.

Totéž pro $\alpha > \beta$.

Reprezentace fuzzy konjunkcí (obecně)

Věta: Nechť \wedge_1 je fuzzy konjunkce a $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ rostoucí bijekce. Pak operace $\wedge_2 : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ definovaná vzorcem

$$\alpha \wedge_2 \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\beta))$$

je fuzzy konjunkce. Je-li \wedge_1 spojitá, je \wedge_2 též spojitá.

Důkaz:

- Komutativita (asociativita se dokáže obdobně):

$$\alpha \wedge_2 \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\beta)) = i^{-1}(i(\beta) \wedge_1 i(\alpha)) = \beta \wedge_2 \alpha$$

- Monotonie: Předpokládejme $\beta \leq \gamma$.

$$\begin{aligned} i(\beta) &\leq i(\gamma), \\ i(\alpha) \wedge_1 i(\beta) &\leq i(\alpha) \wedge_1 i(\gamma), \end{aligned}$$

$$\alpha \wedge_2 \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\beta)) \leq i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(\gamma)) = \alpha \wedge_2 \gamma.$$

- Okrajová podmínka:

$$\alpha \wedge_2 1 = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 i(1)) = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_1 1) = i^{-1}(i(\alpha)) = \alpha.$$

Klasifikace fuzzy konjunkcí

Spojité fuzzy konjunkce \wedge je

- **archimédovská**, jestliže

$$\forall \alpha \in (0, 1) : \alpha \wedge \alpha < \alpha \quad (\text{TA})$$

- **striktní**, jestliže

$$\forall \alpha \in (0, 1) \forall \beta, \gamma \in (0, 1) : \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta < \alpha \wedge \gamma \quad (\text{T3+})$$

- **nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

Příklad: Součinnová konjunkce je striktní, Łukasiewiczova je nilpotentní, standardní a drastická nejsou archimédovské (standardní nespĺňuje (TA), drastická není spojitá).

Věta o reprezentaci striktních fuzzy konjunkcí

Operace $\wedge : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ je striktní fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ (**multiplikativní generátor**) taková, že

$$\alpha \wedge \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_p i(\beta)) = i^{-1}(i(\alpha) \cdot i(\beta)).$$

Že je podmínka postačující, jsme již dokázali (kromě striktnosti, což je snadné).
Důkaz nutnosti je mnohem obtížnější.

Multiplikativní generátor striktní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.

Věta o reprezentaci nilpotentních fuzzy konjunkcí

Operace $\wedge : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ je **nilpotentní** fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ (**Łukasiewiczův generátor**) taková, že

$$\alpha \wedge \beta = i^{-1}(i(\alpha) \wedge_l i(\beta)).$$

Łukasiewiczův generátor nilpotentní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.

Věta: Nechť \wedge je **nilpotentní** fuzzy konjunkce. Pak

$$\forall \alpha \in (0, 1) \exists n \in \mathbf{N} : \bigwedge_{k=1}^n \alpha = 0$$

Důkaz: Podle reprezentační věty stačí (bez újmy na obecnosti) dokázat větu pro Łukasiewiczovu konjunkci. Pro dostatečně velké n dostáváme

$$\alpha + \sum_{i=2}^n (\alpha - 1) \leq 0, \quad \bigwedge_{k=1}^n \alpha = 0.$$

2.6 Fuzzy průnik

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy konjunkce:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy konjunkcí)

Věta: Standardní průnik je řezově konzistentní.

Důkaz: 1. Řezová dědičnost:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{A \cap B}(\alpha) &= \{x \in X : \mu_{A \cap B}(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in X : (\mu_A(x) \geq \alpha) \wedge (\mu_B(x) \geq \alpha)\} \\ &= \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in X : \mu_B(x) \geq \alpha\} \\ &= \mathcal{R}_A(\alpha) \cap \mathcal{R}_B(\alpha) \end{aligned}$$

2. Řezy $\mathcal{R}_A(\alpha) \cap \mathcal{R}_B(\alpha)$ (pro všechna $\alpha \in (0, 1)$) určují jednoznačně fuzzy množinu rovnou $A \cap B$.

2.7 Fuzzy disjunkce (trojúhelníková konorma, t-konorma)

je binární operace $\dot{\vee} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ splňující

$$\alpha \dot{\vee} \beta = \beta \dot{\vee} \alpha \quad (\text{komutativita}) \text{ (S1)}$$

$$\alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma) = (\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma \quad (\text{asociativita}) \text{ (S2)}$$

$$\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\vee} \beta \leq \alpha \dot{\vee} \gamma \quad (\text{monotonie}) \text{ (S3)}$$

$$\alpha \dot{\vee} 0 = \alpha \quad (\text{okrajová podmínka}) \text{ (S4)}$$

Věta: $\alpha \dot{\vee} 1 = 1$.

Důkaz: $\alpha \dot{\vee} 1 \stackrel{(S3)}{\geq} 0 \dot{\vee} 1 \stackrel{(S4)}{=} 1$.

Příklady fuzzy disjunkcí

- **Standardní (max, Gödelova, Zadehova ...):**

$$\alpha \overset{S}{\vee} \beta = \max(\alpha, \beta).$$

- **Součinná (produktová, pravděpodobnostní ...):**

$$\alpha \overset{P}{\vee} \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta.$$

- **Lukasiewiczova (Gilesova, angl. též bold, bounded sum ...):**

$$\alpha \overset{L}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{pro } \alpha + \beta < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Drastická (slabá, angl. weak ...):**

$$\alpha \overset{D}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 0, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Einsteinova**

$$\alpha \overset{E}{\vee} \beta = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$$

Vlastnosti fuzzy disjunkcí

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle : \alpha \overset{S}{\vee} \beta \leq \alpha \dot{\vee} \beta \leq \alpha \overset{D}{\vee} \beta.$$

Standardní disjunkce je jediná, která je idempotentní, tj. $\alpha \dot{\vee} \alpha = \alpha$ pro všechna $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$.

Dualita

Nechť \neg je fuzzy negace.

A. Je-li \wedge fuzzy konjunkce, pak $\alpha \dot{\vee} \beta = \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ je fuzzy disjunkce (**duální** k \wedge vzhledem k \neg).

B. Je-li $\dot{\vee}$ fuzzy disjunkce, pak $\alpha \wedge \beta = \neg(\neg\alpha \dot{\vee} \neg\beta)$ je fuzzy konjunkce (**duální** k $\dot{\vee}$ vzhledem k \neg).

Věta:

- **Lukasiewiczovy** operace $\overset{L}{\wedge}, \overset{L}{\vee}$ jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Součinné** operace $\overset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}$ jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Standardní** operace $\overset{S}{\wedge}, \overset{S}{\vee}$ jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.
- **Drastické** operace $\overset{D}{\wedge}, \overset{D}{\vee}$ jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.

Klasifikace fuzzy disjunkcí

Spojité fuzzy disjunkce $\dot{\vee}$ je

- **archimédovská**, jestliže

$$\forall \alpha \in (0, 1) : \alpha \dot{\vee} \alpha > \alpha \quad (\text{SA})$$

- **striktní**, jestliže

$$\forall \alpha \in (0, 1) \forall \beta, \gamma \in (0, 1) : \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\vee} \beta < \alpha \dot{\vee} \gamma \quad (\text{S3+})$$

- **nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

Věty o reprezentaci fuzzy disjunkcí

Věta: Operace $\dot{\vee} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ je **striktní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ taková, že

$$\alpha \dot{\vee} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \overset{\text{P}}{\vee} i(\beta)).$$

Věta: Operace $\dot{\vee} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ je **nilpotentní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ (**aditivní generátor**) taková, že

$$\alpha \dot{\vee} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \overset{\text{L}}{\vee} i(\beta)) = \begin{cases} i^{-1}(i(\alpha) + i(\beta)) & \text{pro } i(\alpha) + i(\beta) \leq 1 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

2.8 Fuzzy sjednocení

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy disjunkce:

$$\mu_{A \dot{\cup} B}(x) = \mu_A(x) \dot{\vee} \mu_B(x).$$

(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy disjunkcí)

Věta: **Standardní** sjednocení je řezově konzistentní.

2.9 Fuzzy výrokové algebry

černě vyznačené platí vždy

červeně vyznačené platí pro standardní fuzzy operace, ale ne pro některé jiné

modře vyznačené platí jen pro některé volby fuzzy operací (ne pro standardní)

$$\begin{array}{ll} \neg \neg \alpha = \alpha, & \alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha, \\ \alpha \dot{\vee} \beta = \beta \dot{\vee} \alpha, & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \\ (\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma = \alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma), & \alpha \dot{\vee} (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \dot{\vee} \beta) \wedge (\alpha \dot{\vee} \gamma), \\ \alpha \wedge (\beta \dot{\vee} \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \dot{\vee} (\alpha \wedge \gamma), & \alpha \dot{\vee} \alpha = \alpha, \\ \alpha \dot{\vee} \alpha = \alpha, & \alpha \wedge \alpha = \alpha, \\ \alpha \dot{\vee} (\alpha \wedge \beta) = \alpha, & \alpha \wedge (\alpha \dot{\vee} \beta) = \alpha, \\ \alpha \dot{\vee} 1 = 1, & \alpha \wedge 0 = 0, \\ \alpha \dot{\vee} 0 = \alpha, & \alpha \wedge 1 = \alpha, \\ \alpha \wedge \neg \alpha = \mathbf{0}, & \alpha \dot{\vee} \neg \alpha = \mathbf{1}, \\ \neg(\alpha \wedge \beta) = \neg \alpha \dot{\vee} \neg \beta, & \neg(\alpha \dot{\vee} \beta) = \neg \alpha \wedge \neg \beta. \end{array}$$

2.10 Fuzzy implikace

je jakákoli operace $\dot{\rightarrow} : \langle 0, 1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, která se na $\{0, 1\}^2$ shoduje s klasickou implikací. Mohli bychom si přát:

$$\alpha \dot{\rightarrow} \beta = 1 \Leftarrow \alpha \leq \beta, \quad (\text{IIa})$$

$$\alpha \dot{\rightarrow} \beta = 1 \Rightarrow \alpha \leq \beta, \quad (\text{IIb})$$

$$1 \dot{\rightarrow} \beta = \beta, \quad (\text{I2})$$

$\dot{\rightarrow}$ je nerostoucí v 1. argumentu a neklesající v 2. argumentu, (I3)

$$\alpha \dot{\rightarrow} \beta = \overline{s} \beta \dot{\rightarrow} \overline{s} \alpha, \quad (I4)$$

$$\alpha \dot{\rightarrow} (\beta \dot{\rightarrow} \gamma) = \beta \dot{\rightarrow} (\alpha \dot{\rightarrow} \gamma), \quad (I5)$$

spojitost. (I6)

R-implikace (reziduovaná fuzzy implikace, reziduum)

je operace

$$\alpha \xrightarrow{R} \beta = \sup\{\gamma : \alpha \wedge \gamma \leq \beta\} \quad (RI)$$

kde \wedge je fuzzy konjunkce

(je-li \wedge spojitá, lze supremum nahradit maximem)

Příklady R-implikací

- Od standardní konjunkce \wedge_s je odvozena **Gödelova implikace**

$$\alpha \xrightarrow{R} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je po částech lineární a spojitá s výjimkou bodů (α, α) , $\alpha < 1$.

- Od Łukasiewiczovy konjunkce \wedge_L je odvozena **Łukasiewiczova implikace**

$$\alpha \xrightarrow{R} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ 1 - \alpha + \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je po částech lineární a spojitá.

- Od součinné konjunkce \wedge_P je odvozena **Goguenova (též Gainesova) implikace**

$$\alpha \xrightarrow{R} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \leq \beta, \\ \frac{\beta}{\alpha} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Má jediný bod nespojitosti, $(0, 0)$.

Vlastnosti R-implikací

Věta: Nechť \wedge je spojitá fuzzy konjunkce. Pak R-implikace \xrightarrow{R} splňuje (I1a), (I1b), (I2), (I3).

Důkaz: $\alpha \xrightarrow{R} \beta = \sup \Gamma(\alpha, \beta)$, kde $\Gamma(\alpha, \beta) = \{\gamma : \alpha \wedge \gamma \leq \beta\}$ je interval obsahující nulu. (Při spojitosti \wedge navíc uzavřený.)

(I1a) Je-li $\alpha \leq \beta$, pak $\Gamma(\alpha, \beta) = \langle 0, 1 \rangle$, $\sup \Gamma(\alpha, \beta) = 1$.

(I1b) Je-li $\alpha > \beta$, pak $1 \notin \Gamma(\alpha, \beta)$, $\sup \Gamma(\alpha, \beta) < 1$ (z uzavřenosti $\Gamma(\alpha, \beta)$).

(I2): $1 \xrightarrow{R} \beta = \sup\{\gamma : \gamma \leq \beta\} = \beta$.

(I3): Zvětšujeme-li α , $\Gamma(\alpha, \beta)$ se nezvětšuje.

Zvětšujeme-li β , $\Gamma(\alpha, \beta)$ se nezmenšuje.

Věta: Reziduovaná fuzzy implikace příslušná **spojité** fuzzy konjunkci \wedge je spojitá, právě když \wedge je nilpotentní.

S-implikace

je operace

$$\alpha \overset{s}{\dot{\rightarrow}} \beta = \neg_s \alpha \dot{\vee} \beta \quad (\text{SI})$$

kde $\dot{\vee}$ je fuzzy disjunkce

Příklad:

- Ze standardní disjunkce dostáváme **Kleeneovu–Dienesovu** implikaci

$$\alpha \overset{s}{\dot{\rightarrow}} \beta = \max(1 - \alpha, \beta).$$

- Z Łukasiewiczovy disjunkce dostáváme **Łukasiewiczovu** implikaci $\overset{s}{\dot{\rightarrow}}$, která se shoduje s Łukasiewiczovou reziduovanou implikací $\overset{R}{\dot{\rightarrow}}$.

Všechny požadavky (I1a),(I1b),(I2)–(I6) splňují ze zde probíraných fuzzy implikací pouze reziduované implikace odvozené od nilpotentních fuzzy konjunkcí (např. Łukasiewiczova implikace).

2.11 Fuzzy biimplikace (ekvivalence)

je operace $\dot{\leftrightarrow}$, obvykle definovaná vztahem

$$\alpha \dot{\leftrightarrow} \beta = (\alpha \dot{\rightarrow} \beta) \dot{\wedge} (\beta \dot{\rightarrow} \alpha),$$

kde $\dot{\rightarrow}$ je fuzzy implikace a $\dot{\wedge}$ je fuzzy konjunkce (biimplikaci indexujeme stejně jako odpovídající fuzzy implikaci)

Pokud $\dot{\rightarrow}$ splňuje (I1a) (například pro reziduovanou implikaci), je vždy aspoň jedna ze závorek na pravé straně rovna jedné, takže nezáleží na volbě fuzzy konjunkce $\dot{\wedge}$.

Příklad: Łukasiewiczova biimplikace: $\alpha \overset{R}{\dot{\leftrightarrow}} \beta = 1 - |\alpha - \beta|.$