Myšlenka a schéma řešení

Nechť daný graf G má n vrcholů a m hran, $n \leq m$. Uvažujme topologické uspořádání P vrcholů grafu G. Označme symbolem $p(x)$ pořadí vrcholu x v uspořádání P. Předpokládejme, že hledaná silně souvislá komponenta $C(x, y)$ vznikne otočením hrany (x, y). Pak pro každý vrchol $w \in C(x, y)$ musí platit

$$p(x) \leq p(w) \leq p(y).$$

Toto je kritický fakt, který se zdál většině řešitelů po delší dobu unikat, pokud vůbec k němu dospěli. Malujte si obrázek, dokud vám nebude jasná tato část, nemá cenu pokračovat.

Označme $NASL(x)$ množinu všech vrcholů G, do kterých vede cesta z vrcholu x.
Označme $PRED(x)$ množinu všech vrcholů G, ze kterých vede cesta do vrcholu x.
V silné komponentě existuje cesta z každého vrcholu do každého jiného, tudíž vrcholy $C(x, y)$ jsou právě takové vrcholy $w \in V(G)$, pro které platí $w \in NASL(x) \cap PRED(y)$.

Možné řešení úlohy je proto následující:

1. Určíme množiny $NASL(x)$ a $PRED(x)$ pro každý vrchol $x \in V(G)$.
2. Pro každou hranu $(x, y) \in E(G)$:
   A. Určíme množinu $C(x, y) = NASL(x) \cap PRED(y)$.
   B. Najdeme součet $S(x, y) = \sum_{w \in C(x,\ y)} váha(w)$.
3. Ze všech součtů $S(x, y)$ vybereme maximální a vypíšeme jej společně s hranou (x, y).

Detailněji a s asymptotickou složitostí

ad 1. K určení $PRED(x)$ využijeme topologické uspořádání P. Nechť jsou známy množiny $PRED(z_1)$, $PRED(z_2)$, ..., $PRED(z_k)$,
kde (z_1, x), (z_2, x), ..., (z_k, x) jsou všechny hrany z $E(G)$, jejichž koncovým vrcholem je x. Potom

$$PRED(x) = PRED(z_1) \cup PRED(z_2) \cup \ldots \cup PRED(z_k) \cup \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}.$$

Máme tak ve vrcholu x provést výpočet sjednocení několika množin, každá z nich obsahuje $O(n)$ prvků, počet množin je $dg^+(x) + 1$. Složitost výpočtu množin $PRED(x)$ pro všechny vrcholy $x \in V(G)$ potom bude

$$\sum_{x \epsilon V(G)}[(dg^+(x) + 1) \cdot O(n)] = O(n) \cdot \sum_{x \epsilon V(G)}(dg^+(x) + 1) = O(n) \cdot (m + n) = O(n \cdot m).$$

Přepokládáme přitom, že množiny $PRED(x)$ budeme určovat v rostoucím pořadí hodnot $p(x)$.
Množiny $NASL(x)$ určíme zcela analogicky, budeme je ovšem určovat vklesajícím pořadí hodnot $p(x)$.
Složitost nalezení topologického uspořádání P je $\Theta(m)$, což neovlivní celkovou složitost bodu 1.
Sumárně všechny operace v bodu 1 mají tedy složitost $O(n \cdot m) + O(n \cdot m) + \Theta(m) = O(n \cdot m)$.

ad 2. Každá z množin $NASL(x)$ a $PRED(x)$ má nejvýše n prvků, nalezení jejich průniku má tedy složitost $O(n)$. Stejně tak určení jednoho součtu $S(x, y)$ má složitost $O(n)$. Obě akce A a B v bodě 2. provedeme m-krát, celková složitost bodu 2. bude proto

$$m \cdot \big(O(n) + O(n)\big) = m \cdot O(n) = O(n \cdot m).$$

ad 3 a závěr. Výběr maxima hodnot $S(x, y)$ je úměrný m, oba body 1. a 2. mají složitost $O(n \cdot m)$, takže celé řešení proběhne v čase

$$O(n \cdot m) + O(n \cdot m) + \Theta(m) = O(n \cdot m).$$