

Myšlenka a schéma řešení

Nechť daný graf G má n vrcholů a m hran, $n \leq m$. Uvažujme topologické uspořádání P vrcholů grafu G . Označme symbolem $p(x)$ pořadí vrcholu x v uspořádání P . Předpokládejme, že hledaná silně souvislá komponenta $C(x, y)$ vznikne otočením hrany (x, y) . Pak pro každý vrchol $w \in C(x, y)$ musí platit

$$p(x) \leq p(w) \leq p(y).$$

Toto je kritický fakt, který se zdál většině řešitelů po delší dobu unikat, pokud vůbec k němu dospěli. Malujte si obrázek, dokud vám nebude jasná tato část, nemá cenu pokračovat.

Označme $NASL(x)$ množinu všech vrcholů G , do kterých vede cesta z vrcholu x .

Označme $PRED(x)$ množinu všech vrcholů G , ze kterých vede cesta do vrcholu x .

V silné komponentě existuje cesta z každého vrcholu do každého jiného, tudíž vrcholy $C(x, y)$ jsou právě takové vrcholy $w \in V(G)$, pro které platí $w \in NASL(x) \cap PRED(y)$.

Možné řešení úlohy je proto následující:

1. Určíme množiny $NASL(x)$ a $PRED(x)$ pro každý vrchol $x \in V(G)$.
2. Pro každou hranu $(x, y) \in E(G)$:
 - A. Určíme množinu $C(x, y) = NASL(x) \cap PRED(y)$.
 - B. Najdeme součet $S(x, y) = \sum_{w \in C(x, y)} váha(w)$.
3. Ze všech součtů $S(x, y)$ vybereme maximální a vypíšeme jej společně s hranou (x, y) .

Detailněji a s asymptotickou složitostí

ad 1. K určení $PRED(x)$ využijeme topologické uspořádání P . Nechť jsou známy množiny $PRED(z_1), PRED(z_2), \dots, PRED(z_k)$,

kde $(z_1, x), (z_2, x), \dots, (z_k, x)$ jsou všechny hrany z $E(G)$, jejichž koncovým vrcholem je x . Potom

$$PRED(x) = PRED(z_1) \cup PRED(z_2) \cup \dots \cup PRED(z_k) \cup \{z_1, z_2, \dots, z_k\}.$$

Máme tak pro vrchol x výpočet sjednocení několika množin, každá z nich obsahuje $O(n)$ prvků, počet množin je $dg^+(x) + 1$. Složitost výpočtu množin $PRED(x)$ pro všechny vrcholy $x \in V(G)$ tak bude

$$\sum_{x \in V(G)} [(dg^+(x) + 1) \cdot O(n)] = O(n) \cdot \sum_{x \in V(G)} (dg^+(x) + 1) = O(n) \cdot (m + n) = O(n \cdot m).$$

Přepokládáme přitom, že množiny $PRED(x)$ budeme určovat v rostoucím pořadí hodnot $p(x)$.

Množiny $NASL(x)$ určíme zcela analogicky, budeme je ovšem určovat vklesajícím pořadí hodnot $p(x)$.

Určení jednoho součtu $S(x, y)$ má složitost $O(n)$, určení všech součtů $S(x, y)$ má tedy složitost $O(n \cdot m)$.

Sumárně všechny operace v bodu 1 mají proto složitost $O(n \cdot m)$.

Složitost nalezení topologického uspořádání P je $\Theta(m)$, což neovlivní celkovou složitost bodu 1.

ad 2. Každá z množin $NASL(x)$ a $PRED(x)$ má nejvýše n prvků, nalezení jejich průniku má proto složitost $O(n)$.

Průnik spočteme pro každou hranu $(x, y) \in E(G)$, celkem tedy složitost bodu 2. bude

$$m \cdot O(n) = O(n \cdot m).$$

ad 3 a závěr. Výběr maxima hodnot $S(x, y)$ je úměrný m , oba body 1. a 2. mají složitost $O(n \cdot m)$, takže celé řešení proběhne v čase

$$O(n \cdot m) + O(n \cdot m) + \Theta(m) = O(n \cdot m).$$