Pokročilá algoritmizace

Cvičení 1

Asymptoticka složitost (notace)

Asymptotická složitost nám umožňuje porovnat (výpočetní a paměťovou) efektivitu dvou různých algoritmů, které řeší stejnou úlohu. Existuje několik druhů notací z nichž nejznámější (a možná nejpoužívanější) je tzv. velká O notace, ale v následující části se seznámíme dohromady s 5 notacemi.

1) Horní asymptotický odhad - „velká O notace“ („velký omikron“)

O dvojici nezáporných rostoucích funkcích $f(x)$ a $g(x)$ řekneme, že $f(x)$ je shora (asymptoticky) omezena $g(x)$, značíme $f(x) \in O(g(x))$[1], právě tehdy když:

$$(\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : f(x) \leq cg(x)$$

Definice tedy říká, že od určité hodnoty (n_0) je funkce $g(x)$ větší nebo rovna $f(x)$ až na multiplikativní konstantu (c).

Symbolicky můžeme vztah $f(x) \in O(g(x))$ vyjádřit jako $f(x) \leq g(x)$.

2) Horní asymptotický odhad - „malá O notace“ („malý omikron“)

O dvojici nezáporných rostoucích funkcích $f(x)$ a $g(x)$ řekneme, že $g(x)$ roste asymptoticky *mnohem* rychleji než $f(x)$, značíme $f(x) \in o(g(x))$, právě tehdy když:

$$(\forall c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : f(x) \leq cg(x)$$

Z definice uvedené výše je ihned patrný rozdíl mezi malým a velkým O. Zatímco u velkého O stačilo pro funkce nalézt jediné c, pro které by platila nerovnost, v případě malého O musí platit pro libovolné c. Z toho vyplývá následující

Pozorování[2]: $f(x) \in o(g(x)) \Rightarrow f(x) \in O(g(x))$.

Chceme-li ukázat, že $f(x) \in o(g(x))$ můžeme využít ekvivalentní definici (ověřte!) za pomocí limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Příklad: Nechť máme dvě funkce $f(x) = log(x)$ a $g(x) = x$, ukážeme, že $f(x) \in o(g(x))$, a to takto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x} \overset{l'Hopital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Symbolicky můžeme vztah $f(x) \in o(g(x))$ vyjádřit jako $f(x) < g(x)$. Pozor! Zatímco u velké O notace platí $(\forall x \in \mathbb{N}) : f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x) \in O(g(x))$, v tomto případě tomu tak není

[1] Někdy se v textu „nepřesně“ uvádí $f(x) = O(g(x))$. Operátor příslušnosti ($\in$) naopak zdůrazňuje, že $O(g(x))$ reprezentuje množinu funkcí.

[2] Řekněme tvrzení, které lze ověřit přímo z definice.

(nalezněte protipříklad). Toto je nutné mít na paměti při řešení úloh, k jejichž řešení použijete tuto symboliku.

3) Dolní asymptotický odhad - „velká Ω notace“ („velká omega“)

O dvojici nezáporných rostoucích funkcích $f(x)$ a $g(x)$ řekneme, že $f(x)$ je zdola (asymptoticky) omezena $g(x)$, značíme $f(x) \in \Omega(g(x))$, právě tehdy když:

$$(\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : cg(x) \leq f(x)$$

Definice říká, že od určité hodnoty (n_0) je funkce $g(x)$ menší nebo rovna $f(x)$ až na multiplikativní konstantu (c).

Pozorování: $f(x) \in O(g(x)) \Rightarrow g(x) \in \Omega(f(x))$.

Symbolicky můžeme vztah $f(x) \in \Omega(g(x))$ vyjádřit jako $f(x) \geq g(x)$.

4) Dolní asymptotický odhad - „malá ω notace“ („malá omega“)

O dvojici nezáporných rostoucích funkcích $f(x)$ a $g(x)$ řekneme, že $g(x)$ roste asymptoticky *mnohem* pomaleji než $f(x)$, značíme $f(x) \in \omega(g(x))$, právě tehdy když:

$$(\forall c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : cg(x) \leq f(x)$$

Pozorování: $f(x) \in \omega(g(x)) \Rightarrow f(x) \in \Omega(g(x))$.

Pozorování: $f(x) \in \omega(g(x)) \Rightarrow g(x) \in o(f(x))$.

Chceme-li ukázat, že $f(x) \in \omega(g(x))$ můžeme využít ekvivalentní definici (ověřte!) za pomocí limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Příklad: Nechť máme dvě funkce $f(x) = xlog(x)$ a $g(x) = x$, ukážeme, že $f(x) \in \omega(g(x))$, a to takto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{xlog(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} log(x) = \infty$$

Symbolicky můžeme vztah $f(x) \in \omega(g(x))$ vyjádřit jako $f(x) > g(x)$.

5) Optimální asymptotický odhad - „velká Θ notace“ („velká théta“)

O dvojici nezáporných rostoucích funkcích $f(x)$ a $g(x)$ řekneme, že $f(x)$ roste asymptoticky stejně rychle jako $g(x)$, značíme $f(x) \in \Theta(g(x))$, právě tehdy když:

$$(\exists c_1, c_1 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$$

Pozorování: $f(x) \in \Theta(g(x)) \Leftrightarrow g(x) \in \Theta(f(x))$.

Pozorování: $f(x) \in \Theta(g(x)) \Leftrightarrow f(x) \in O(g(x)) \cap \Omega(g(x))$.

Chceme-li ukázat, že $f(x) \in \Theta(g(x))$ můžeme využít ekvivalentní definici (ověřte!) za pomocí limity:

$$0 < \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

tedy limita je kladné reálné číslo.

Symbolicky můžeme vztah $f(x) \in \Theta(g(x))$ vyjádřit jako $f(x) = g(x)$.

Úloha 1: Dokažte, či vyvraťte. Pro každé dvě nezáporné funkce $f(x)$ a $g(x)$ ve vztahu $f(x) \notin \Omega(g(x))$, platí $f(x) \in o(g(x))$.

Úloha 2: Dokažte, či vyvraťte. Pro každé dvě nezáporné funkce $f(x)$ a $g(x)$, takové, že $(\forall x \in \mathbb{N}) : f(x) < g(x)$, platí $f(x) \in o(g(x))$.

Vlastnosti asymptotických odhadů

1. $f(x) \in O(f(x)),\ f(x) \in \Omega(f(x)),\ f(x) \in \Theta(f(x))$
2. $c \cdot O(f(x)) = O(c \cdot f(x)) = O(f(x))$
3. $O(f(x)) + O(g(x)) = O(\max\{f(x), g(x)\})$
4. $O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x) \cdot O(g(x))$
5. $O(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = O(x^n)$

Třídy složitosti

V následujícím seznamu jsou uvedeny nejznámější třídy složitosti. Ověřte si, že mezi žádnými dvěma třídami daného seznamu nevystupuje rovnost.:

1. $O(1)$	6. $O(xlog^c(x)),\ c > 0$
2. $O(log(log(x)))$	7. $O(x^c),\ c > 1$
3. $O(log(x))$	8. $O(c^x),\ c > 1$
4. $O(x^c), 0 < c < 1$	9. $O(x!)$
5. $O(x)$	10. $O(x^x)$

Úloha 3: Dokažte, že $log^c(x) \in o(n^d)$, kde $c \in \mathbb{N}$ a $d \in (1, \infty)$.

Úloha 4: Dokažte, že $x! \in o(x^x)$. Využijte následující nerovnosti:

$$x^{\frac{x}{2}} \leq x! \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^x \qquad (\clubsuit)$$

Úloha 5: Uspořádejte uvedené funkce do neklesající posloupnosti dle jejich asymptotického růstu, tj. aby pro dvě po sobě jdoucí funkce $f(x)$ a $g(x)$ platilo $f(x) \in O(g(x))$. Symbolem log značíme logaritmus o základu 2:

$$2^{\log(\log(x))} \quad xlog(x) \quad x^2 \quad x! \quad \log(x)! \quad (\frac{3}{2})^x \quad \log(x!) \quad 4^{\log(x)} \quad \sqrt{\log(x)} \quad (\sqrt{2})^{\log(x)}$$

Logaritmy a asymptotická složitost

V níže uvedených příkladech používáme pouze rostoucí logaritmy, tedy základy všech logaritmů jsou reálná čísla větší než 1.

Následující rovnost ukazuje, že na základu logaritmu při určování asymptotické složitosti nezáleží:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_c(x)}{\log_d(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log_c(x)}{\frac{\log_c(x)}{\log_c(d)}} = log_c(d) \in (0,\infty) \Rightarrow \log_c(x) \in \Theta(log_d(x))$$

Rovnost ve jmenovateli vyplývá ze vztahu pro převod logaritmu z jednoho základu na jiný.

Další vlastnost logaritmu, která se hojně využívá, je, že na exponentu (v tomto příkladě $k \in \mathbb{R}$) v logaritmu nezáleží:

$$\log_c(x^k) = k\log_c(x) \Rightarrow \log_c(x^k) \in \Theta(\log_c(x))$$

Úloha 6: Dokažte, že $\log(x!) \in \Theta(x\log(x))$. (Hint: Využijte nerovnost ($\clubsuit$) uvedenou výše.)

Počítání s limitami

Předpokladem úspěšného určení asymptotických odhadů je v některých případech znalost limit a schopnost jejich výpočtu. Následující pravidla pro aritmetiku limit je dobré mít na paměti:

Nechť $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R} \cup \infty$ and $\lim_{x\to\infty} g(x) = B \in \mathbb{R} \cup \infty$, potom platí:

1. $\lim_{x\to\infty}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim_{x\to\infty}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
3. $\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{A}{B}$

pokud jsou pravé strany definovány.

l'Hopitalovo pravidlo: Nechť dvě rostoucí nezáporné funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají nevlastní limitu pro $x \to \infty$ a $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje, potom platí:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$