Pokročilá algoritmizace

CVIČENÍ 1

1. Který fragment programu z následujících dvou proběhne rychleji?

```
int n = 100, s = 0   ;
for (int i = 0 ; i < n ; i++)
  for (int j = 0 ; j < i ; j++)
    s += i + j ;

int n = 75, s = 0   ;
for (int i = 0 ; i < n ; i++)
  for (int j = 0 ; j < n ; j++)
    s += i + j ;
```

Nejprve se musíme dohodnout jaké operace nás zajímají - co je funkční hodnotou v závislosti na `n`. V našem případě budeme uvažovat počet operací v řádku obsahující `s += i + j`, který si pro jednoduchost označíme A. Vyjádříme-li si kolikrát je tento řádek volán pro první program dostaneme následující výraz:

$$0 \cdot A + 1 \cdot A + 2 \cdot A + \ldots + (N-1) \cdot A = A \cdot (1 + 2 + \ldots + (N-3) + (N-2)) = A \cdot \frac{N \cdot (N-1)}{2}$$

což po dosazení za N dává $4950A$ operací. Zatímco pokud stejným postupem vyjádříme počet volání pro druhý program, dostaneme jednoduchý výraz $A \cdot N^2$, který po dosazení dává $5625A$.

Z výsledků je vidět, že první program proběhne mnohem rychleji, ale asymptoticky jsou na tom oba programy stejně, mají totiž složitost $\Theta(N^2)$.

2. Do následujícího kódu doplňte chybějící výraz v podmínce tak, aby byla procedura uvw() volána právě 49-krát.

```
for (int i = 0 ; i < 7 ; i++)
{
  int j = i ;
  while (j < ___)
  {
    uvw() ;
    j++ ;
  }
}
```

Úlohu řešíme tak, že si za chybějící výraz dosadíme proměnnou `N` a v závislosti na ní, vyjádříme počet volání dané metody `uvw()`. Tedy:

$$N + (N-1) + \ldots + (N-5) + (N-6) = 7N - (1 + 2 + \ldots + 5 + 6) = 7N - \frac{6 \cdot 7}{2} = 7N - 21$$

Aby byla metoda volána právě 49-krát, musí mít N hodnotu, kterou dostaneme vyřešením následující rovnice:

$$49 = 7N - 21$$

3. Ke zpracování k-tého prvku řádku matice velikosti $n \times n$ je zapotřebí kn operací. Kolik je celkem potřeba operací, ke zpracování celé matice?

Počet operací si můžeme vyjádřit jako součet, kde jednotlivé sčítance reprezentují počet operací potřebných ke zpracování příslušného prvku řádku, pro jeden řádek dostaneme:

$$\sum_{k=1}^{n} kn = n \sum_{k=1}^{n} k = n \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^3 + n^2}{2}$$

Matice má n řádků, tedy pro její zpracování je celkem potřeba $\frac{n^4+n^3}{2}$ operací.

4. Ke zpracování k-tého prvku matice velikosti $n \times n$ je zapotřebí kn operací. Kolik je celkem potřeba operací, ke zpracování celé matice, jsou-li prvky očíslovány od 1 do n^2?

Obdobně jako v předchozím případě si počet operací můžeme vyjádřit jako součet, kde jednotlivé sčítance reprezentují počet operací potřebných ke zpracování příslušného prvku, tedy:

$$\sum_{k=1}^{n^2} kn = n \sum_{k=1}^{n^2} k = n \cdot \frac{n^2 \cdot (n^2+1)}{2} = \frac{n^5 + n^3}{2}$$

5. Pro rostoucí spojité funkce $f(x)$, $g(x)$ platí $f(x) \in \Omega(g(x))$. Z toho plyne že:

a) $f(x) \in O(g(x))$ - NE! To, že víme pouze $f(x) \in \Omega(g(x))$, nestačí. Např. pokud by platilo $f(x) \in \Theta(g(x))$ bude odpověď kladná (z def.), naopak jistě zápornou odpověď dostaneme pro $f(x) \in \omega(g(x))$!

b) $f(x) \in \Theta(g(x))$ - NE! Vyplývá z předchozího případu, jehož odpoveď by musela být kladná, aby platilo i toto tvrzení.

c) $g(x) \in \Theta(f(x))$ - NE! Vyplývá z předchozího případu, jelikož je s ním ekvivalentní.

d) $g(x) \in \Omega(f(x))$ - NE! Vyplývá z případu a), jelikož je s ním ekvivalentní.

e) $g(x) \in O(f(x))$ - ANO! Je totiž ekvivalentní s předpokladem samotným.

6. Pokud funkce f roste asymptoticky rychleji než funkce g (tj. $f(x) \notin O(g(x))$, platí následující tvrzení:

a) Jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak $f(x) > g(x)$ - NE! Protipříkladem - $f(x) = x^2$ a $g(x) = x$.

b) Rozdíl $f(x) - g(x)$ je vždy kladný - NE! Ekvivalentní s předchozím bodem.

c) Rozdíl $f(x) - g(x)$ je kladný pro každé $x > y$, kde y je nějaké dostatečně velké číslo - ANO! Z definice k hodnotě $c = 1$ musí existovat $x_0 = y$, tak že $\forall x > x_0 : g(x) < f(x)$.

d) Obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty - NE! Nic takového definice nezakazuje.

e) Nic z předchozího - NE!

7. Pokud funkce f roste asymptoticky stejně rychle jako funkce g (tj. $f(x) \in \Theta(g(x))$), platí tvrzení:

a) Jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak $f(x) = g(x)$ - NE! Definice nic takového nezaručuje. Jednalo-li by se o opačnou implikaci, tak ta triviálně platí.

b) Ani $\frac{f(x)}{g(x)}$ ani $\frac{g(x)}{f(x)}$ nekonverguje k nule s rostoucím x - ANO! Jelikož platí $f(x) \in O(g(x))$ musí být limita $\frac{f(x)}{g(x)}$ vlastní (konečné číslo) a stejně tak platí $f(x) \in \Omega(g(x))$, a tedy limita $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$. Z obou dvou limit vyplývá, že oba podíly musí být v intervalu $(0, \inf)$.

c) Rozdíl $f(x) - g(x)$ je kladný pro každé $x > y$, kde y je nějaké dostatečně velké číslo - NE! Pro $f(x) = x$ a $g(x) = 2x$ nic takového neplatí a přitom splňují předpoklad.

d) Obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty - NE! Nic takového definice nezakazuje.

e) Nic z předchozího - NE!

8. Pro dvě spojité funkce $f(x)$ a $g(x)$ rostoucí na celém $\mathbb{R}$ platí $f(x) < g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. To znamená, že:

a) $f(x) \notin \Omega(g(x))$ - NE! Protipříkladem jsou funkce splňující podmínky $f(x) = x$ a $g(x) = 2x$.

b) $f(x) \notin O(g(x))$ - NE! Z (negace) definice můžeme odvodit, že by muselo platit pro $c = 1$ a $x_0 = 0$, že existuje $x \geq x_0$ takové, že $|f(x)| > |g(x)|$, což je spor.

c) Je možné, že $f(x) \in \Omega(g(x))$ - ANO! Např. pro takové funkce jako $f(x) = x$ a $g(x) = 2x$.

d) $g(x) \notin \Theta(f(x))$ - NE! Pro stejný případ funkcí jako v předchozím bodě.

e) $f(x)$ roste asymptoticky pomaleji než $g(x)$ - NE! Pro stejný případ funkcí jako v před-předchozím bodě.

9. Pro dvě spojité funkce $f(x)$ a $g(x)$ rostoucí na celém $\mathbb{R}$ platí $f(x) \notin \Omega(g(x))$, $f(x) \notin \Theta(g(x))$. Tudíž:

a) $g(x) \in O(f(x))$ - NE! Ekvivalentní s tvrzením $f(x) \in \Omega(g(x))$, které je ve sporu s předpokladem.

b) $g(x) \in \Theta(f(x))$ - NE! Ekvivalentní s tvrzením $g(x) \in \Theta(f(x))$, které je ve sporu s předpokladem.

c) $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ - NE! Protipříkladem mohou být funkce splňující předpoklady $f(x) = 4x$ a $g(x) = x^2$, ale pro něž implikace neplatí.

d) $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ - NE! Viz. protipříklad z předchozího bodu.

e) Může existovat $y \in \mathbb{R}$ takové, že $f(y) > g(y)$ - ANO! Viz. stejný příklad funkcí uvedený v bodě c).

10. V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (...) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.

a) $(x^2 \cdot 2^x) \in ...(ln^2(x^2) + 2^x)$ - Pouze Ω, pomocí limity.

b) $(ln^2(x^2) + 2^x) \in ...(x^2 + ln(x^2))$ - Pouze Ω, evidentní/pomocí limity.

c) $(2^x \cdot ln^{-1}(x^2)) \notin ...(2^x \cdot ln^{-1}(x^2)$ - Nic, uvedené funkce mají stejnou asymptotickou složitost.

11. V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (...) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.

a) $(x^2 \cdot ln(x^2)) \in ...(x^2 + ln(x))$ - Pouze Ω, z definice nebo limitou.

b) $(x^3 + ln(x^2)) \in ...(x^3 + 2^x)$ - Pouze O, evidentní/limitou.

c) $(x^3 \cdot ln(x^2)) \notin ...(ln(x^3) + 2^x)$ - Dvojice Ω a Θ, evidentní/limitou.

12. Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$, pro které současně platí všechny tři následující vztahy:

$$f(x) \notin O(g(x)), g(x) \notin \Theta(h(x)), h(x) \notin \Omega(f(x))$$

Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, zdůvodněte.
Symbolicky můžeme vztahy zapsat tak, že $f(x) > g(x)$, $g(x) \neq h(x)$ a $h(x) < f(x)$. Spojíme-li tyto vztahy dohromady můžeme buď hledat funkce (asymptoticky!) splňující $f(x) > g(x) > h(x)$ či $f(x) > h(x) > g(x)$. Pro první případ můžeme vybrat $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ a $h(x) = x$, pro druhý $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ a $h(x) = x^2$

13. Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$, pro které současně platí všechny tři následující vztahy:

$$f(x) \notin O(g(x)), g(x) \notin \Omega(h(x)), h(x) \notin \Theta(f(x))$$

Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, zdůvodněte. Postup je stejný jako v předchozí úloze. Symbolicky si zapíšeme vztahy, tedy $f(x) > g(x)$, $g(x) < h(x)$ a $h(x) \neq f(x)$. Spojíme-li tyto vztahy dohromady můžeme buď hledat funkce (asymptoticky!) splňující $f(x) > h(x) > g(x)$ či $h(x) > f(x) > g(x)$. Pro první případ můžeme vybrat $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ a $h(x) = x^2$, pro druhý $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ a $h(x) = x^3$