==

Základečky

==

Určete, o jaký druh grafu (orientovaný, neorientovaný, multigraf, prostý graf, konečný, nekonečný) se jedná v následujících případech:

a) Na číselné ose zvolíme všechna přirozená čísla coby uzly. Uzly *m*, *n* spojíme hranou, pokud *m* dělí *n* beze zbytku.

b) V dané vesnici zvolíme za uzly všechny rodiny, které vlastní alespoň jeden automobil. Dva různé uzly spojíme hranou právě tehdy, když obě příslušné rodiny vlastní stejnou značku vozu.

c) Jako uzly zvolíme cestovní kanceláře v jednom městě a navíc všechny státy na Zemi. Dva uzly spojíme hranou, pokud je jeden z nich kanceláří a druhý státem a navíc dotyčná kancelář zajišťuje zájezd do tohoto státu.

d) V libovolné neprázdné konečné množině *K* zvolíme nějakou podmnožinu *R* množiny všech dvouprvkových podmnožin původní množiny *K*. Je množina *R* graf? Jestliže ano, jaký?

V tabulce jsou uvedeny reálné situace, k jejichž popisu lze využít graf. Rozhodněte, který druh grafu, orientovaný či neorientovaný se lépe hodí k popisu skutečnosti:

Situace	Vrcholy	Vrcholy x a y jsou spojeny hranou, jestliže
A. Automapa	Osady a města	Mezi x a y vede přímá silnice
B. Silniční síť	Křižovatky	Mezi křižovatkami x a y vede přímá silnice
C. Silniční síť	Silnice	Silnice x a y mají společnou křižovatku
D. Molekula	Atomy	Atomy x a y jsou vázány chemickou vazbou
E. Elektrické zařízení	Vodiče (uzly)	Mezi vodiči x a y je zapojena součástka
F. Šachy	Postavení figurek na šachovnici	Z postavení x lze jedním tahem přejít do postavení y
G. Úřad	Úředníci	Úředník x je nadřízený y
H. Národní hospodářství	Produkty a služby	K výrobě či provedení x je zapotřebí y
I. Přidělování úkolů	Pracovníci a úkoly	Pracovník x je způsobilý vykonat úkol y
J. Složitá činnost, výrobní proces	Jednoduché činnosti, základní úkony	Činnost x musí být ukončena před zahájením činnosti y
K. Rodokmen	Osoby	Osoba x je potomkem osoby y
L. Mnohostěn	Vrcholy mnohostěnu	Vrcholy x a y leží na téže hraně mnohostěnu
M. Programovací jazyk	Lexikální elementy jazyka	Element x může následovat po elementu y
N. Počítačový program	Podprogramy	Podprogram x může být vyvolán podprogramem y
O. Učebnice	Kapitoly	pro studium kapitoly x je nezbytná znalost kapitoly y

==

Stupně uzlů

==

Musí být počet uzlů lichého stupně v grafu sudý nebo lichý? Proč?

Platí předchozí konstatování o součtu stupňů také obráceně, tj. může každé sudé číslo představovat součet stupňů všech uzlů nějakého grafu *G*? Nebo některá sudá čísla nemohou být uvedeným součtem? Která?

Může existovat graf, jenž má méně hran než uzlů a neobsahuje vrchol stupně 1?

Když se dva účastníci konference setkají poprvé, vymění si navštívenky. Je počet navštívenek, které takto změnily majitele během konference, sudý nebo lichý? Je sudý nebo lichý počet účastníků, kteří rozdali lichý počet navštívenek?

Turnaj hraje 8 družstev systémem každý s každým. Bylo odehráno celkem 9 zápasů. Je možné, že každé družstvo sehrálo zatím nejvýše 2 zápasy? Je možné že po odehrání celkem 17 zápasů sehrálo každé družstvo nejvýše 4 zápasy?
Mohou být všechny stupně uzlů v obyčejném grafu navzájem různá čísla?

Daný graf s n uzly má právě dva vrcholy stejného stupně. Může to být stupeň 0 nebo n-1?

Dokažte pomocí pokud možno co nejjednodušší konstrukce, že pro každé $n>2$ existuje graf s n uzly, který obsahuje rovnoběžné hrany (nikoli smyčky) a jehož všechny uzly mají různý stupeň.

Najděte graf se 7 uzly, v němž právě dva uzly mají stejný stupeň. Najděte ještě jiný takový graf. Jsou navzájem svými doplňky?

Otázka, zda ve společnosti mohou být zároveň dvě trojice, kde v jedné se všichni znají a v druhé všichni neznají, je triviální. Na pozitivní odpověď stačí pět osob. Nakreslete příslušný graf.

Může mít souvislý graf méně hran než uzlů?

Může mít nesouvislý graf více hran než uzlů?

Jaký minimální počet hran je nutno odebrat z K_n, aby vznikl nesouvislý graf?

Jaký maximální počet hran lze odebrat z *Kn*, aby zůstala zachována souvislost grafu?

Jaký minimální počet hran je nutno odebrat z K_n, aby vznikl graf s k komponentami?

==

Stromy

==

Jsou dány tři kusy papíru. Některý z nich rozstříhneme na tři kusy, některý ze všech kusů rozstříhneme opět na tři kusy, atd. Kolik kusů celkem vznikne, když bylo rozstřiženo celkem k kusů papíru (nezávisle na velikosti)? Řešte úlohu rovněž obecně pro m počátečních kusů a stříhání na n dílů. Interpretujte úlohu grafově.

Na stole vidíme ležet k uzavřených krabic. Kdykoli otevřeme jakoukoli krabici, bude buď prázdná nebo bude obsahovat opět k (nejspíše menších) uzavřených krabic. Kromě toho víme, že celkový počet neprázdných krabic je m. Když otevřeme všechny plné krabice, kolik uvidíme uzavřených krabic?

Turnaje ve stolním tenisu, který se hraje vylučovacím způsobem, se zúčastnilo celkem 19 hráček a hráčů. Šest vylosovaných hráčů muselo sehrát o jedno utkání více. Nakreslete graf reprezentující průběh turnaje a určete počet jeho vnitřních uzlů tj. počet utkání, která byla během turnaje sehrána.
Kolik utkání by bylo nutno sehrát pro 147 hráček a hráčů?

Ve stromu s n uzly určíme každé hraně náhodnou orientaci. Jaká je pravděpodobnost, že vznikne kořenový strom?

==

Orientované grafy

==

Uveďte příklad silně souvislého grafu, jehož každá hrana patří do právě dvou cyklů.

Je možno uzly acyklického grafu s n uzly očíslovat čísly 1...n tak, že počáteční uzel každé hrany je očíslován menším číslem než její koncový uzel? Jinými slovy, může vést každá hrana od „menšího“ čísla k „většímu“?

Hrany K5 náhodně orientujeme. Jaká je pravděpodobnost, že vznikne acyklický graf? Jaká je pravděpodobnost téhož jevu pro Kn?
Návod: můžete si pomoci tím, že acyklické grafy jsou právě ty, které jsou topologicky uspořadatelné.

Lze najít orientovaný graf v němž se součet všech výstupních stupňů liší od součtu všech vstupních stupňů?

Existuje acyklický graf bez kořenů nebo listů?

Existuje orientovaný graf se stejným počtem kořenů a listů? Může mít graf více kořenů než listů? Nebo naopak?

Existuje orientovaný graf bez kořenů a listů? Jen s kořenem (kořeny) a bez listů? Jen s listy (listem) a bez kořenů?

Každou hranu neorientované kružnice libovolně orientujeme. Jaký je vztah mezi počtem kořenů a listů v takto vzniklém grafu?

Vstupní i výstupní stupeň všech vrcholů v grafu bez smyček je 1. Jak tento graf vypadá? Je souvislý?

Najděte graf, v němž je vstupní i výstupní stupeň každého uzlu nenulový a přitom graf obsahuje uzel, kterým neprochází žádný cyklus.

==

Algoritmy a implementace

==

K programu v určitém programovacím jazyce zkonstruujeme orientovaný graf tak, že za uzly grafu prohlásíme všechny funkce a procedury a vedeme hranu z uzlu x do y, právě když funkce či procedura odpovídající uzlu x volá funkci či proceduru odpovídající uzlu y. Co lze prohlásit o programu, v jehož příslušném grafu se vyskytují cykly nebo smyčky?

Předpokládejme navíc, že tělo každé funkce a procedury musí být deklarováno ještě předtím, než je funkce či procedura volána. Je pak nutně každý graf příslušející libovolnému programu acyklický?

Považte následující jednoduchý algoritmus:

```
Dokud graf obsahuje alespoň jeden uzel s výstupním stupněm 0 (list) dělej
      odstraň tento uzel a všechny s ním incidující hrany
      konec dokud
Když je výsledkem prázdný graf
     pak původní graf byl acyklický
     jinak původní graf nebyl acyklický
     konec když
```

Dává tento algoritmus vždy správné výsledky? Proč?

Acyklický graf má jeden kořen a jeden list. Přidáme hranu vedoucí z listu do kořene. Lze zaručit, že výsledek bude silně souvislý?

Je dána spojová reprezentace orientovaného grafu. Jak dlouho bude trvat, než zjistíme výstupní stupeň všech uzlů?

Úplný binární strom se sedmi uzly je vyvážený a uzly jsou očíslovány 1...7 jako v (binární) haldě. Napište matici sousednosti tohoto grafu. Předpokládejme, že náš strom obsahuje $2^n - 1$ uzlů ($n > 0$), tj. má hloubku $n-1$ (kořen má hloubku 0). Popište algoritmus, jímž matici sousednosti vygenerujete přímo, bez skutečného procházení tímto stromem.

Druhá mocnina grafu G je graf G^2, jehož množina uzlů se shoduje s množinou uzlů grafu G a jehož množina hran je určena takto: G2 obsahuje hranu (u,v) jen a jen tehdy, pokud G obsahuje zároveň hrany (u,w) a (w,v), kde w je libovolný uzel grafu G. Jinými slovy, G^2 vznikne z G tak, že do G přidáme hrany mezi všemi uzly spojenými cestou délky 2 a odstraníme původní hrany. Popište, jak vytvoříte G^2, když jsou grafy zadány (a) spojovou reprezentací (b) maticí sousednosti. Která varianta bude rychlejší?

Modifikujte algoritmus (nebo váš funkční program) DFS tak, aby vypsal každou hranu grafu (každou právě jednou).

Řešte předchozí úlohu pro BFS.

Napište funkční DFS kód rekurzivně i nerekurzivně.

Napište program, který provede kondenzaci orientovaného grafu.

Odstraňte z grafu maximální možný počet hran, při zachování té podmínky, že kondenzace modifikovaného grafu musí zůstat stejná jako kondenzace původního grafu. Napište algoritmus a program.

Popište, jak najdete a vypíšete všechny cesty délky 3 v acyklickém grafu.

Orientovaný graf se nazývá polosouvislý, pokud mezi každými dvěma uzly u, v existuje cesta alespoň jedním směrem, tj. buď u → v nebo v → u nebo (případně) obojí. Nakreslete několik polosouvislých grafů, které nejsou silně souvislé. Nakreslete acyklický graf, který není polosouvislý. Navrhněte algoritmus testující polosouvislost grafu. Jaká je jeho složitost?