

RB tree

Červenočerný strom má řadu vlastností, které je nutno si pamatovat, odvozují se špatně.

Citujme z přednášky:

1. Every node is either red or black
2. Every leaf (nil) is black
3. If a node is red, then both its children are black
4. Every simple path from a node to a descendant leaf contains the same number of black nodes
- (5. Root is black)

1.

Stromy nad danou množinou n klíčů:

- a) AVL strom je vždy ideálně vyvážený
- b) RB strom má stejnou hloubku všech listů, které obsahují klíče
- c) AVL strom n uzly se vyvažuje v nejhorším případě za použití $\log_2(n)$ rotací
- d) RB strom s pouze černými uzly je pravidelný

Řešení AVL strom se běžně vyvažuje rotacemi, takže zřejmě není pokaždé ideálně vyvážený, což znamená, že varianta a) neplatí. Příklady v přednášce (i jinde) ukazují RB stromy s různou hloubkou listů. Varianta b) tedy také neplatí. Vyvažování stromu se děje v čase úměrném konstantě, tudíž i varianta c) odpadá. Zbývá tak jen poslední varianta d). RB strom je vždy pravidelný, nezávisle na barvě uzlů.

2.

Červenočerný strom

- a) má maximální výšku rovnou $2/3$ své černé výšky
- b) má červené listy
- c) následníci červeného uzlu jsou vždy černí a jsou tři
- d) udržuje ve všech větvích stejnou černou výšku

Řešení Podmínka 3. říká, že v žádné cestě z kořene do listu nemůže být více červených uzlů než černých, výška stromu tedy nepřekročí dvojnásobek jeho černé výšky. Prostředíme-li ve vyváženém stromu červené a černé vrstvy, vidíme, že lze tohoto maxima téměř dosáhnout. Varianta a) neplatí. Varianta b) je vyloučena podmínkou 2., varianta c) nepravdivě sugeruje, že strom je ternární (Následník ve smyslu uspořádání zleva doprava může být jen jeden). Platí varianta d) totožná s podmínkou 4.

3.

Červenočerný strom

- a) má maximální výšku rovnou dvojnásobku své černé výšky
- b) má ve všech větvích stejný počet uzlů
- c) má tři typy uzlů: černé, červené a bílé
- d) následníci černého uzlu jsou vždy červení

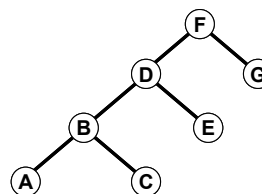
Řešení Variantu d) vyvrací strom se dvěma uzly. Jeden je kořenem, druhý je listem. Podle podmínek 2. a 5. Jsou oba černí. Varianta c) je zřejmý nesmysl, variantu b) vyvrací předchozí příklad se dvěma uzly. Zbývá jen správná varianta a).

4.

Abychom získali RB-strom s černou výškou 2, musíme obarvit uzly takto:

- a) A,C,G červené a ostatní černé
- b) B,D,G červené a ostatní černé
- c) A,C,D červené a ostatní černé
- d) B,F,D červené a ostatní černé

Řešení c).

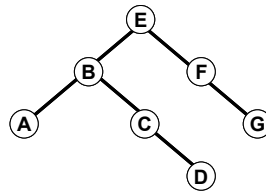


5.

Abychom získali RB-strom s černou výškou 2, musíme obarvit uzly takto:

:

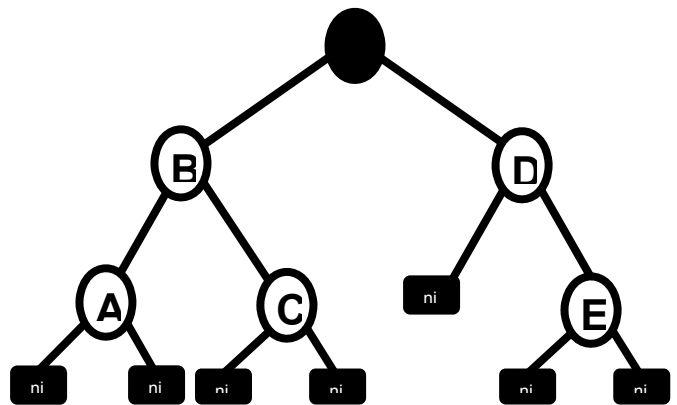
- a) A,C,D,G červené a ostatní černé
- b) B,D,G červené a ostatní černé
- c) B,F,D červené a ostatní černé
- d) A,C,G červené a ostatní černé



Řešení b).

6. Červenočerný strom je často používanou strukturou. Jaké barvy mají označené uzly, aby strom na obrázku opravdu byl červenočerným stromem?

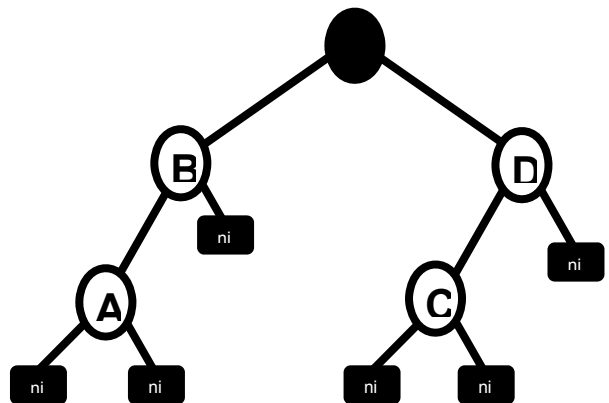
- a) A červený, B červený, C černý, D černý, E černý
- b) A černý, B červený, C černý, D černý, E černý
- c) A červený, B černý, C červený, D černý, E červený
- d) A černý, B červený, C černý, D červený, E černý



Řešení Jedna z vlastností červenočerného stromu je ta, že cesta z kořene do libovolného listu obsahuje stejný počet černých uzlů. Ve větvi DC nemohou být oba uzly červené, další vlastností červenočerného stromu je totiž to, že červený uzel není nikdy bezprostředním potomkem červeného uzlu. Na cestě z kořene do levého potomka uzlu D však musí být stejný počet černých uzlů jako na cestě z kořene do potomka uzlu E. To lze zajistit pouze tak, že uzel D bude černý a uzel E bude červený. Když si nyní prohlédneme nabízené varianty, vidíme, že tuto kombinaci obsahuje pouze varianta c). Ještě ji ověříme. Na cestě z kořene do libovolného listu tedy máme mít (podle rozboru větve DE) vždy jen jediný černý uzel (nepočítaje kořen a list). To lze v levém podstromu kořene zajistit buď tak, že uzly A a C budou černé a uzel B červený, nebo naopak tak, že B bude černý a A a C červené. Tato poslední možnost je vskutku obsažena i ve variantě c).

7. Červenočerný strom je často používanou strukturou. Jaké barvy mají mít označené uzly, aby strom na obrázku opravdu byl červenočerným stromem?

- a) A červený, B červený, C černý, D černý
- b) A červený, B černý, C červený, D černý
- c) A černý, B červený, C černý, D černý
- d) A černý, B červený, C černý, D červený



Řešení Jedna z vlastností červenočerného stromu je ta, že cesta z kořene do libovolného listu obsahuje stejný počet černých uzlů. Ve větvi DC nemohou být oba uzly červené, další vlastností červenočerného stromu je totiž to, že červený uzel není nikdy bezprostředním potomkem červeného uzlu. Na cestě z kořene do pravého potomka uzlu D však musí být stejný počet černých uzlů jako na cestě z kořene do potomka uzlu C. To lze zajistit pouze tak, že uzel D bude černý a uzel C bude červený. Když analogickou úvahu aplikujeme na větev BA, zjistíme, že uzel B musí být černý a uzel A červený. Celkem tak vychází právě odpověď ve variantě b).