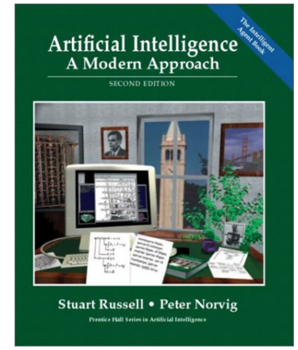
Hraní dvouhráčových her, adversariální prohledávání stavového prostoru

Michal Pěchouček

Department of Cybernetics
Czech Technical University in Prague

http://labe.felk.cvut.cz/~pechouc/kui/games.pdf

Použitá literatura pro umělou inteligenci



:: Artificial Intelligence: A Modern Approach (Second Edition) by Stuart Russell and Peter Norvig, 2002 Prentice Hall.

http://aima.cs.berkeley.edu/

Prohledávání při hraní dvouhráčových her

adversariální prohledávání (adversarial search) stavového prostoru (hraní her), implementuje inteligencí rozhodování v komutativním prostředí, kde dva nebo více agentů mají konfliktní cíle.

teorie her – komplikovaná vědní disciplína, součást ekonomiky která analyzuje chování jednotlivých hráčů a výhodnost jejich strategií (především s ohledem na stabilitu, maximalizaci společného zisku, atp.) ve vícehráčovém prostředí.

Prohledávání při hraní dvouhráčových her

adversariální prohledávání (adversarial search) stavového prostoru (hraní her), implementuje inteligencí rozhodování v komutativním prostředí, kde dva nebo více agentů mají konfliktní cíle.

teorie her – komplikovaná vědní disciplína, součást ekonomiky která analyzuje chování jednotlivých hráčů a výhodnost jejich strategií (především s ohledem na stabilitu, maximalizaci společného zisku, atp.) ve vícehráčovém prostředí.

V umělé inteligence budeme především pracovat s následujícím typem her:

	deterministické	s prvkem náhody
s úplnou informací	šachy, go, reversi	backgamon
s neúplnou informací	stratego, wargaming	bridge, poker, scrabble

Prohledávání při hraní dvouhráčových her

adversariální prohledávání (adversarial search) stavového prostoru (hraní her), implementuje inteligencí rozhodování v komutativním prostředí, kde dva nebo více agentů mají konfliktní cíle.

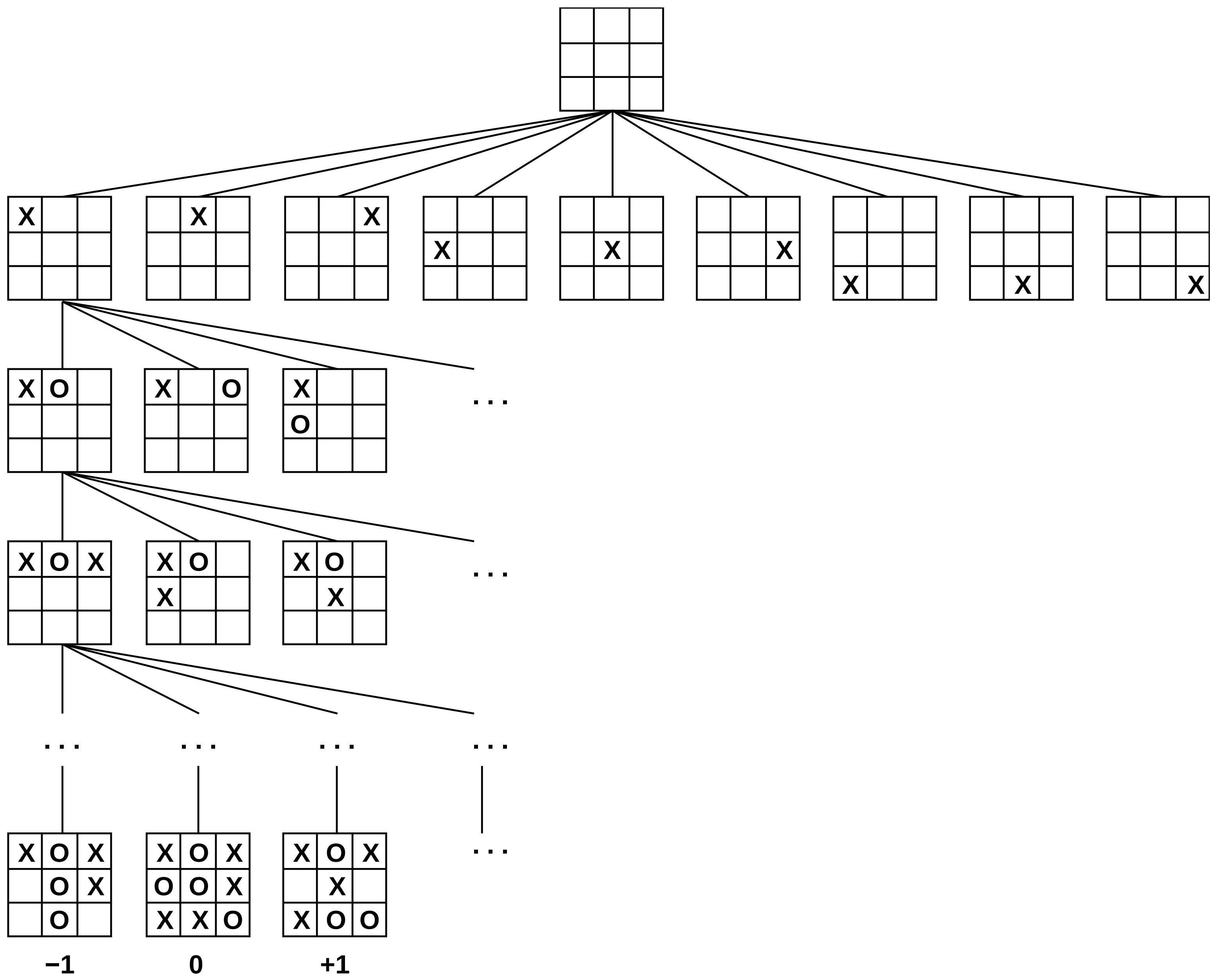
teorie her – komplikovaná vědní disciplína, součást ekonomiky která analyzuje chování jednotlivých hráčů a výhodnost jejich strategií (především s ohledem na stabilitu, maximalizaci společného zisku, atp.) ve vícehráčovém prostředí.

V umělé inteligence budeme především pracovat s následujícím typem her:

	deterministické	s prvkem náhody
s úplnou informací	šachy, go, reversi	backgamon
s neúplnou informací	stratego, wargaming	bridge, poker, scrabble

Stavový prostor hry (**herní strom**) je dán opět počátečním stavem, stavovým operátorem, testem na ukončení hry a užitkovou funkcí.

Cílem adversariálního prohledávání je nalézt nikoliv stav prostoru, nýbrž herní strategii. Strategie vybere nejvhodnější tah s ohledem na racionalitu protihráče. **Optimální herní strategie** je taková strategie (nepřesně), pro kterou neexistuje žádná lepší strategie, která by vedla k lepšímu výsledku při hře s bezchybným oponentem.



−1
0
+1

Minimax Algoritmus

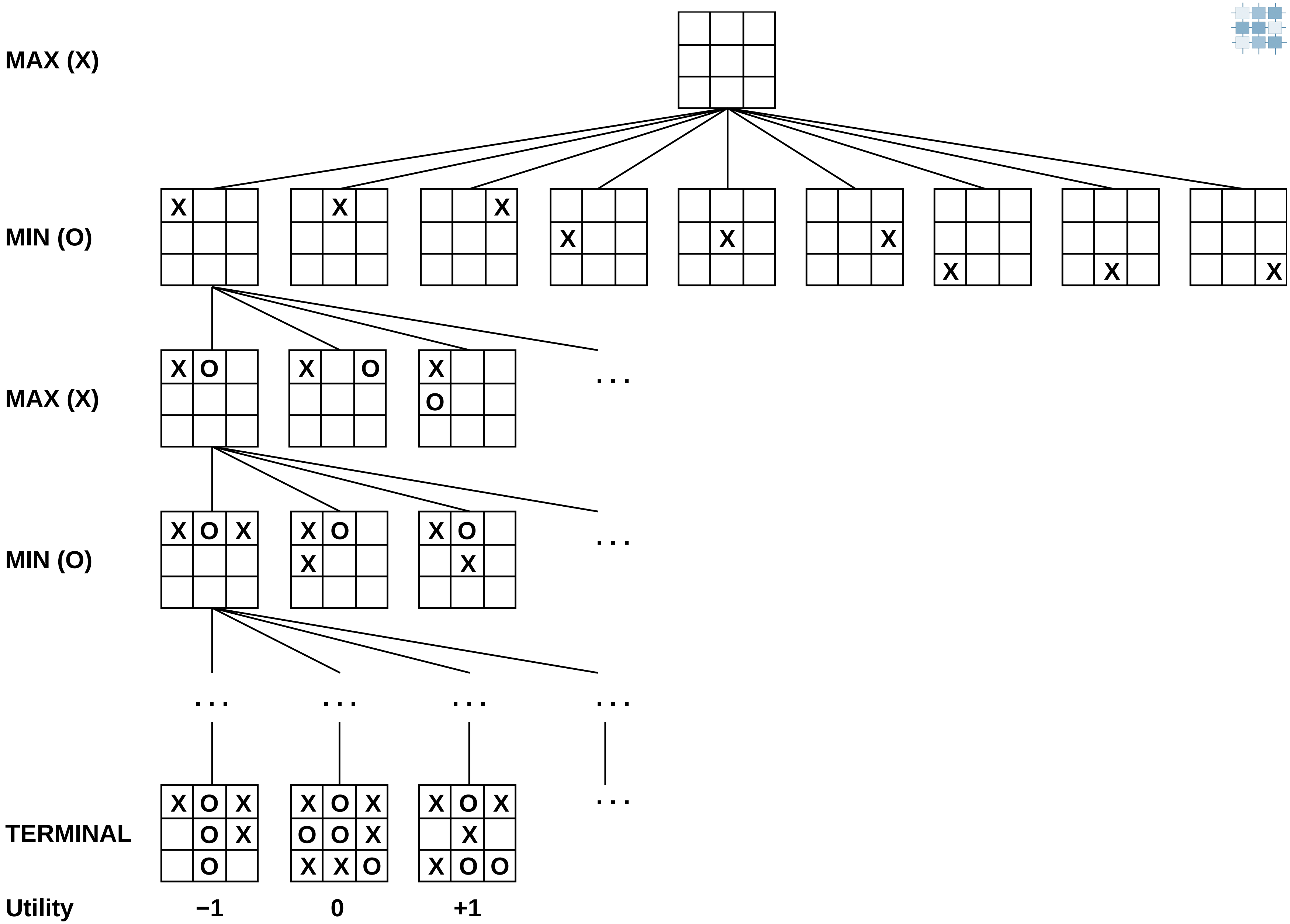
MINIMAX algoritmus dělí stavový prostor do MAX a MIN úrovní. Na každé MAX úrovni hráč A vybere tah s maximálním užitkem a na každé MIN úrovni vybere protihráč tah naopak minimalizující užitek hráče A.

http://ai-depot.com/LogicGames/MiniMax.html

Minimax Algoritmus

MINIMAX algoritmus dělí stavový prostor do MAX a MIN úrovní. Na každé MAX úrovni hráč A vybere tah s maximálním užitkem a na každé MIN úrovni vybere protihráč tah naopak minimalizující užitek hráče A.

http://ai-depot.com/LogicGames/MiniMax.html


MAX (X)
MIN (O)
MAX (X)
MIN (O)
TERMINAL
Utility
−1
0
+1

Minimax Algoritmus

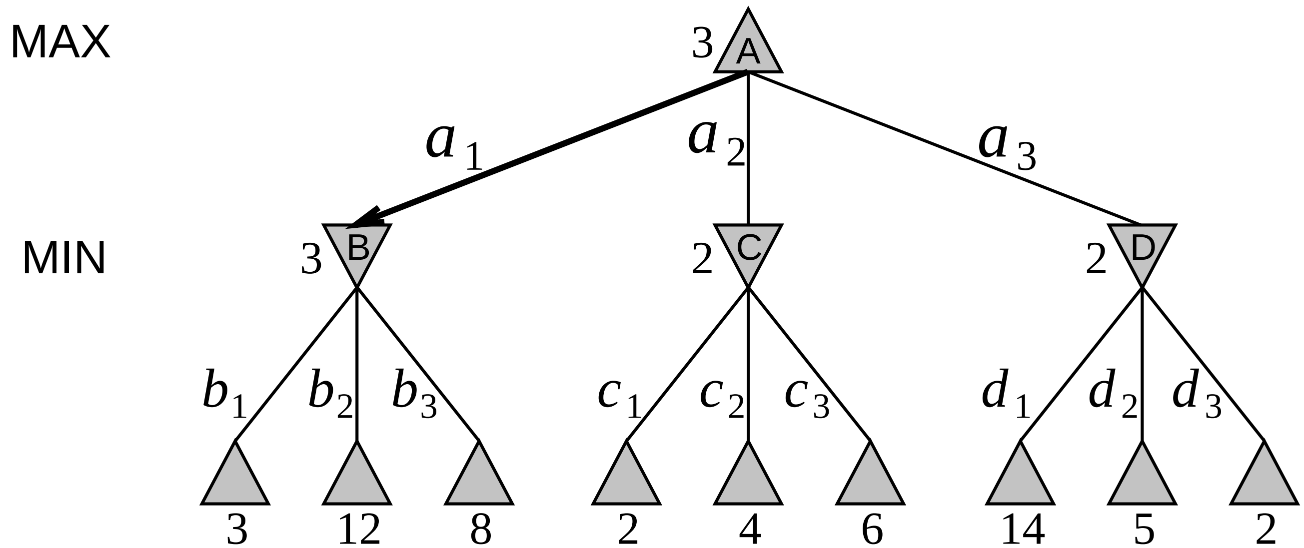
MINIMAX algoritmus dělí stavový prostor do MAX a MIN úrovní. Na každé MAX úrovni hráč A vybere tah s maximálním užitkem a na každé MIN úrovni vybere protihráč tah naopak minimalizující užitek hráče A.

http://ai-depot.com/LogicGames/MiniMax.html

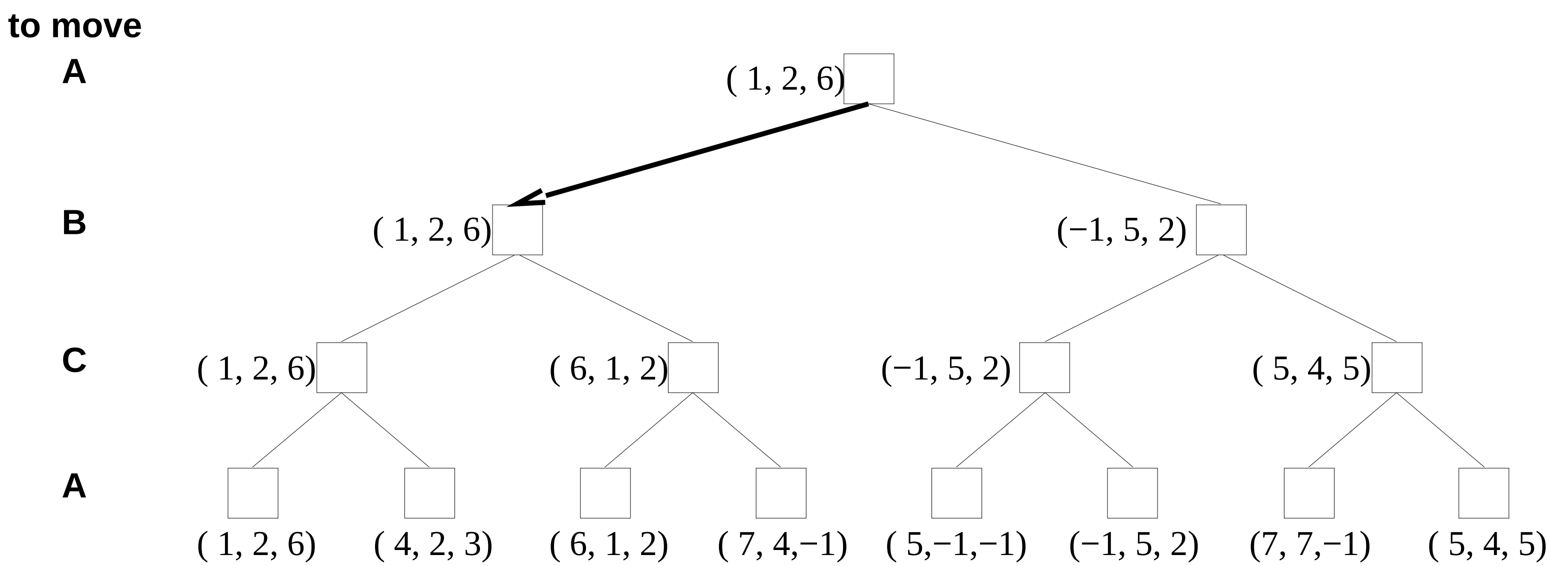
Každý uzel ohodnotíme tzv. MINIMAX hodnotou:

$$\texttt{minimax}(n) = \begin{cases} \texttt{utility}(n) & \text{pro } n \text{ terminalni uzel} \\ \max_{s \in successors(n)} \texttt{minimax}(n) & \text{pro } n \text{ je MAX uzel} \\ \min_{s \in successors(n)} \texttt{minimax}(n) & \text{pro } n \text{ je MIN uzel} \end{cases}$$

Minimax Algoritmus



Minimax Algoritmus



Minimax algoritmus

```
function MINIMAX-DECISION(state) returns an action
   inputs: state, current state in game

   return the a in ACTIONS(state) maximizing MIN-VALUE(RESULT(a, state))
```

```
function MAX-VALUE(state) returns a utility value
   if TERMINAL-TEST(state) then return UTILITY(state)
   v ← −∞
   for a, s in SUCCESSORS(state) do v ← MAX(v, MIN-VALUE(s))
   return v
```

```
function MIN-VALUE(state) returns a utility value
   if TERMINAL-TEST(state) then return UTILITY(state)
   v ← ∞
   for a, s in SUCCESSORS(state) do v ← MIN(v, MAX-VALUE(s))
   return v
```

Vlastnosti Algoritmu MinMax

- **úplné**:

Vlastnosti Algoritmu MinMax

- **úplné**: ANO (je-li prostor konečné)
- **čas**:

Vlastnosti Algoritmu MinMax

- **úplné**: ANO (je-li prostor konečné)
- **čas**: $O(b^d)$
- **paměť**:

Vlastnosti Algoritmu MinMax

- **úplné**: ANO (je-li prostor konečné)
- **čas**: $O(b^d)$
- **paměť**: $O(bd)$
- **optimální**:

Vlastnosti Algoritmu MinMax

- **úplné**: ANO (je-li prostor konečné)
- **čas**: $O(b^d)$
- **paměť**: $O(bd)$
- **optimální**: ano

Cut-off search

Problém minimaxu je, že počet stavů hry roste exponenciálně s počtem tahů. V reálných hrách je prostor hry ohromný a nelze ho celý prohledat v rozumném čase. Tento problém lze řešit pomocí:

- omezením hloubky d – `terminal_test` nahradíme `cut_off_test`
- odhadu místo přesné hodnoty užitku v případě, že $d < b$ – `utility` nahradíme `eval` .

příklad funkce `eval` může být:

- počet vyřazených figurek
- vážený součet počtu vyřazených figurek
- vážený součet vhodnosti strategickém umístěni každé figurky

Cut-off search

Problém minimaxu je, že počet stavů hry roste exponenciálně s počtem tahů. V reálných hrách je prostor hry ohromný a nelze ho celý prohledat v rozumném čase. Tento problém lze řešit pomocí:

- omezením hloubky d – `terminal_test` nahradíme `cut_off_test`
- odhadu místo přesné hodnoty užitku v případě, že $d < b$ – `utility` nahradíme `eval` .

příklad funkce `eval` může být:

- počet vyřazených figurek
- vážený součet počtu vyřazených figurek
- vážený součet vhodnosti strategickém umístěni každé figurky

$$\texttt{eval}(s) = w_1 f_1(s) + w_2 f_2(s) + \ldots + w_n f_n(s) = \sum_{n}^{i=1} w_i f_i(s)$$

např., pro $w_1 = 9$, $f_1(s) =$ `(number_of_white_queens) - (number_of_black_queens)`

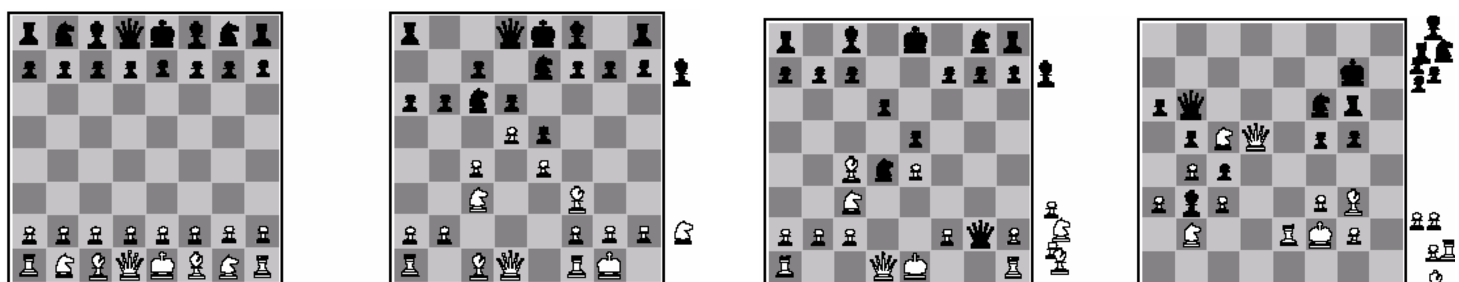
Cut-off search

Problém minimaxu je, že počet stavů hry roste exponenciálně s počtem tahů. V reálných hrách je prostor hry ohromný a nelze ho celý prohledat v rozumném čase. Tento problém lze řešit pomocí:

- omezením hloubky d – `terminal_test` nahradíme `cut_off_test`
- odhadu místo přesné hodnoty užitku v případě, že $d < b$ – `utility` nahradíme `eval` .

příklad funkce `eval` může být:

- počet vyřazených figurek
- vážený součet počtu vyřazených figurek
- vážený součet vhodnosti strategickém umístěni každé figurky



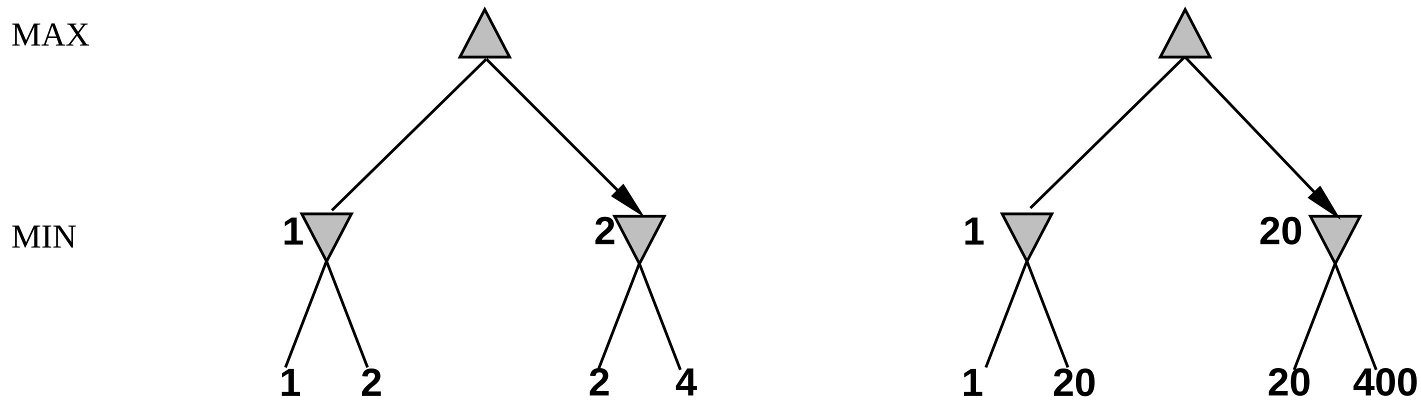
(a) White to move Fairly even (b) Black to move White slightly better (c) White to move Black winning (d) Black to move White about to lose

Cut-off search

degrese: přesné hodnoty `eval` nejsou důležité - korektní chování algoritmu je zachováno při libovolné monotónní transformaci

Cut-off search

degrese: přesné hodnoty `eval` nejsou důležité - korektní chování algoritmu je zachováno při libovolné <u>monotónní</u> transformaci



Cut-off search

degrese: přesné hodnoty `eval` nejsou důležité - korektní chování algoritmu je zachováno při libovolné monotónní transformaci

problémy, zlepšení:

Cut-off search

degrese: přesné hodnoty `eval` nejsou důležité - korektní chování algoritmu je zachováno při libovolné <u>monotónní</u> transformaci

<u>problémy, zlepšení:</u>

- je třeba ohodnocovat pomocí `eval` jen **klidné** (quiescent) stavy – stavy, které nezpůsobí následnou výraznou změnu v hodnotě

Cut-off search

degrese: přesné hodnoty `eval` nejsou důležité - korektní chování algoritmu je zachováno při libovolné <u>monotónní</u> transformaci

<u>**problémy, zlepšení:**</u>

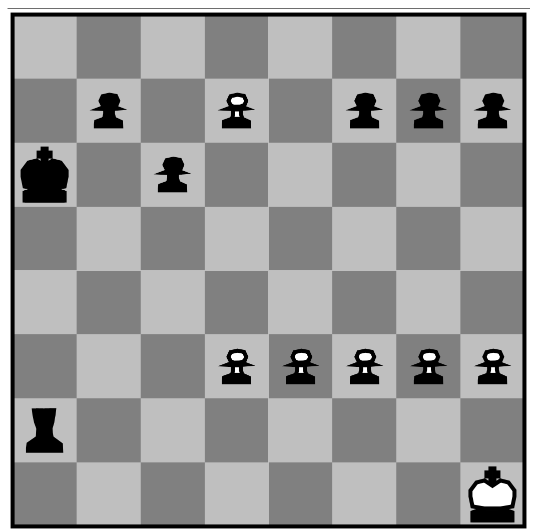
- je třeba ohodnocovat pomocí `eval` jen **klidné** (quiescent) stavy – stavy, které nezpůsobí následnou výraznou změnu v hodnotě
- je třeba zabránit **horizontálnímu efektu** – situaci, kdy program musí udělat tah, který způsobí velkou ztrátu

Cut-off search

degrese: přesné hodnoty `eval` nejsou důležité - korektní chování algoritmu je zachováno při libovolné monotónní transformaci

problémy, zlepšení:

- je třeba ohodnocovat pomocí `eval` jen **klidné** (quiescent) stavy – stavy, které nezpůsobí následnou výraznou změnu v hodnotě
- je třeba zabránit **horizontálnímu efektu** – situaci, kdy program musí udělat tah, který způsobí velkou ztrátu



Cut-off search

degrese: přesné hodnoty `eval` nejsou důležité - korektní chování algoritmu je zachováno při libovolné monotónní transformaci

problémy, zlepšení:

- je třeba ohodnocovat pomocí `eval` jen **klidné** (quiescent) stavy – stavy, které nezpůsobí následnou výraznou změnu v hodnotě
- je třeba zabránit **horizontálnímu efektu** – situaci, kdy program musí udělat tah, který způsobí velkou ztrátu
- lze použít **singulární extenzi** – tah, který jde za `cut-off`, ale jasně zlepšuje `eval` hodnotu (podobné jako quiescent prohledávání ale s $b = 1$)

Cut-off search

degrese: přesné hodnoty `eval` nejsou důležité - korektní chování algoritmu je zachováno při libovolné monotónní transformaci

problémy, zlepšení:

- je třeba ohodnocovat pomocí `eval` jen **klidné** (quiescent) stavy – stavy, které nezpůsobí následnou výraznou změnu v hodnotě
- je třeba zabránit **horizontálnímu efektu** – situaci, kdy program musí udělat tah, který způsobí velkou ztrátu
- lze použít **singulární extenzi** – tah, který jde za `cut-off`, ale jasně zlepšuje `eval` hodnotu (podobné jako quiescent prohledávání ale s $b = 1$)

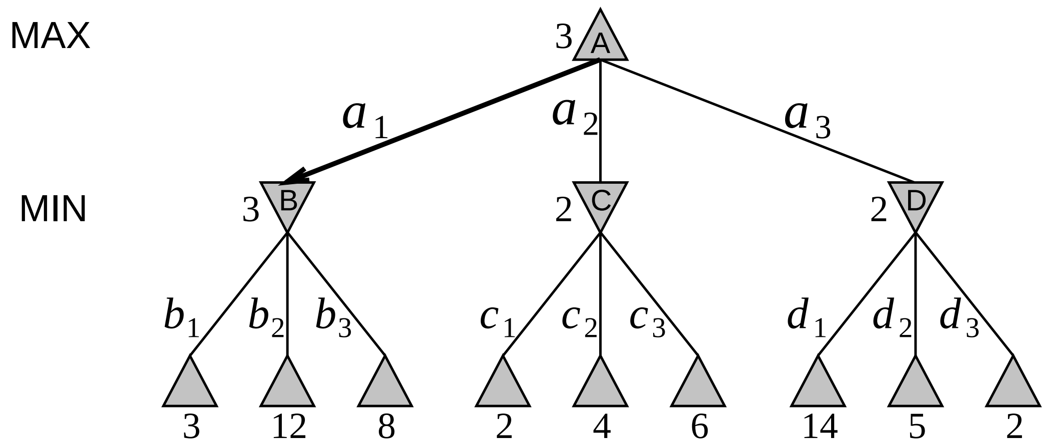
Mějme k dispozici 3 minuty s a uvažujme 10^6 operací za sekundu. Můžeme tedy prohledat $50 * 10^6$ uzlů na tah což je $\approx 35^5$. V šachách můžeme tedy pracovat s hloubkou 5.

Alfa-Beta Prořezávání

Velikost stavového prostoru hry lze rovněž efektivně zmenšit pomocí metody **alfa-beta prořezávání**. Tato metoda umožní identifikovat části stavového prostoru, které jsou nalezení optimálního řešení neelegantně. Při aplikaci na standardní stavový prostor vrátí stejnou strategii jako Minimax a prořeže nerelevantní části prostoru.

Alfa-Beta Prořezávání

Velikost stavového prostoru hry lze rovněž efektivně zmenšit pomocí metody **alfa-beta prořezávání**. Tato metoda umožní identifikovat části stavového prostoru, které jsou nalezení optimálního řešení neelegantně. Při aplikaci na standardní stavový prostor vrátí stejnou strategii jako Minimax a prořeže nerelevantní části prostoru.



$$\begin{aligned}\texttt{min-max}(A) &= \max(\min(3,12,8),\min(2,4,6),\min(14,5,2))\\ &= \max(3,\min(2,x,y),2)\\ &= \max(3,z,2), z \le 2\end{aligned}$$

Alfa-Beta Prořezávání

Velikost stavového prostoru hry lze rovněž efektivně zmenšit pomocí metody **alfa-beta prořezávání**. Tato metoda umožní identifikovat části stavového prostoru, které jsou nalezení optimálního řešení neelegantně. Při aplikaci na standardní stavový prostor vrátí stejnou strategii jako Minimax a prořeže nerelevantní části prostoru.

Klasický Minimax algoritmus rozšíříme následujícím způsobem:

- zavedeme hodnotu:
  - α nejlepší známá hodnota pro uzel MAX
  - β nejlepší známá hodnota pro uzel MIN
- na každé MAX úrovni před tím než ohodnotíme následníky, rovnáme `minmax` hodnotu s hodnotou β. je-li `minmax` $> \beta$ pak se tato část stromu se neprohledává
- na každé MIN úrovni před tím než ohodnotíme následníky, rovnáme `minmax` hodnotu s hodnotou α. je-li `minmax` $< \alpha$ pak se tato část stromu se neprohledává

Alfa-Beta Prořezávání

function ALPHA-BETA-DECISION($state$) **returns** an action
  return the a in ACTIONS($state$) maximizing MIN-VALUE(RESULT($a, state$))

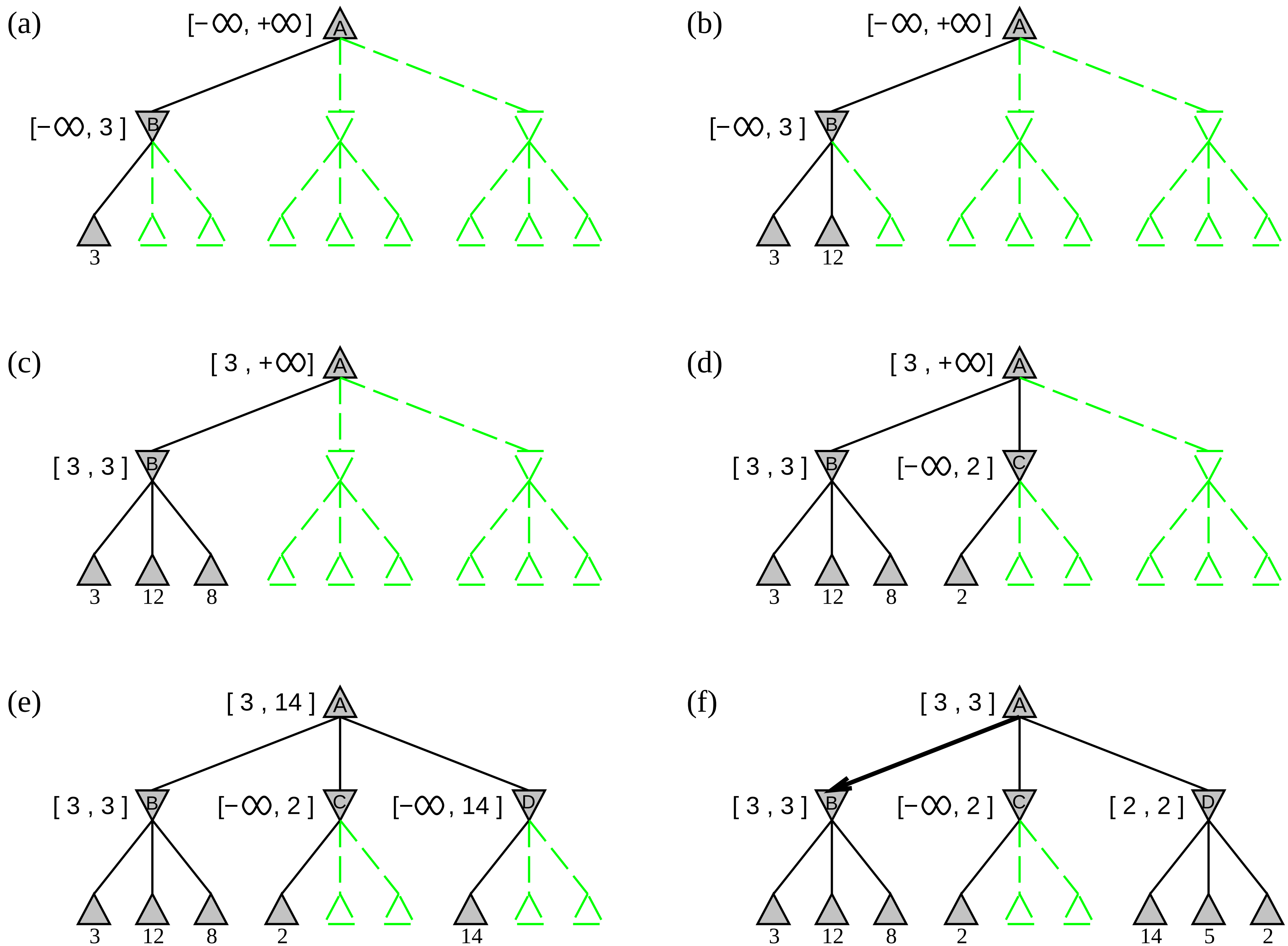
---

function MAX-VALUE($state, \alpha, \beta$) **returns** *a utility value*
  inputs: $state$, current state in game
    α, the value of the best alternative for MAX along the path to $state$
    β, the value of the best alternative for MIN along the path to $state$

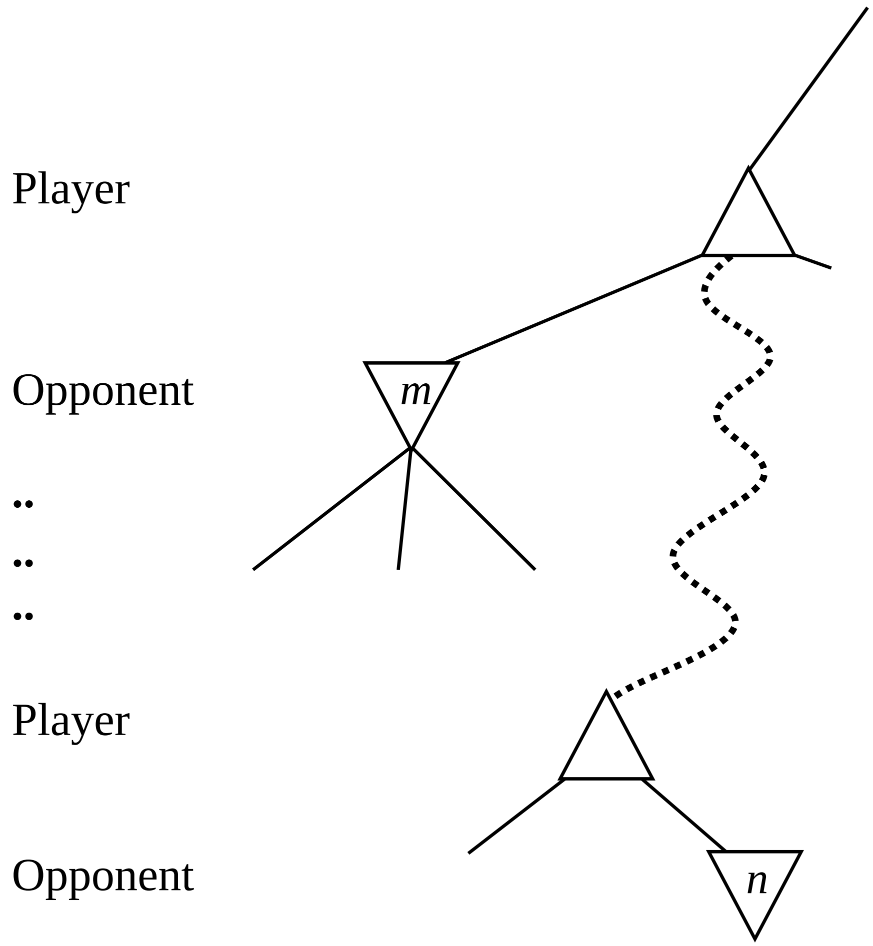
  if TERMINAL-TEST($state$) **then return** UTILITY($state$)
  $v \leftarrow -\infty$
  for $a,\ s$ in SUCCESSORS($state$) **do**
    $v \leftarrow$ MAX(v, MIN-VALUE(s, α, β))
    if $v \geq \beta$ **then return** v
    $\alpha \leftarrow$ MAX(α, v)
  return v

---

function MIN-VALUE($state, \alpha, \beta$) **returns** *a utility value*
  same as MAX-VALUE but with roles of α, β reversed



(a)
[−∞, +∞]
A
[−∞, 3]
B
3
(b)
[−∞, +∞]
A
[−∞, 3]
B
3
12
(c)
[3 , +∞]
A
[3 , 3]
B
3
12
8
(d)
[3 , +∞]
A
[3 , 3]
B
[−∞, 2]
C
3
12
8
2
(e)
[3 , 14]
A
[3 , 3]
B
[−∞, 2]
C
[−∞, 14]
D
3
12
8
2
14
(f)
[3 , 3]
A
[3 , 3]
B
[−∞, 2]
C
[2 , 2]
D
3
12
8
2
14
5
2


Player
Opponent
m
Player
Opponent
n

Vlastnosti Alpha-Beta Prořezávání

Vlastnosti Alpha-Beta Prořezávání

- prořezávání nemá vliv na výsledek

Vlastnosti Alpha-Beta Prořezávání

- prořezávání nemá vliv na výsledek
- lze dokázat, že časová náročnost klesne na $O(b^{d/2})$ v případě, že vždy vybere nejlepší expandand (to implikuje možnost zdvojnásobit hloubku prohledávání)

Vlastnosti Alpha-Beta Prořezávání

- prořezávání nemá vliv na výsledek
- lze dokázat, že časová náročnost klesne na $O(b^{d/2})$ v případě, že vždy vybere nejlepší expandand (to implikuje možnost zdvojnásobit hloubku prohledávání)
- při náhodném výběru časová náročnost klesne na $O(b^{3d/4})$

Vlastnosti Alpha-Beta Prořezávání

- prořezávání nemá vliv na výsledek
- lze dokázat, že časová náročnost klesne na $O(b^{d/2})$ v případě, že vždy vybere nejlepší expandand (to implikuje možnost zdvojnásobit hloubku prohledávání)
- při náhodném výběru časová náročnost klesne na $O(b^{3d/4})$
- **dopředné prořezávání** (forward punning): tvrdé prořezávání jasně nevýhodných tahů. nebezpečný přístup především v okolí kořene herního stromu

Vlastnosti Alpha-Beta Prořezávání

- prořezávání nemá vliv na výsledek
- lze dokázat, že časová náročnost klesne na $O(b^{d/2})$ v případě, že vždy vybere nejlepší expandand (to implikuje možnost zdvojnásobit hloubku prohledávání)
- při náhodném výběru časová náročnost klesne na $O(b^{3d/4})$
- **dopředné prořezávání** (forward punning): tvrdé prořezávání jasně nevýhodných tahů. nebezpečný přístup především v okolí kořene herního stromu

Při použití $200 * 10^6$ uzlů na tah (cca 3 minuty) $\approx 35^{\frac{10}{2}}$ metoda α/β bude pracovat s hloubkou 10, což není vůbec špatné

Negamax

Zjednodušená varianta Minimaxu, kterou je možno použít pro hry s nulovým (konstantním) součtem (zero-sum games). Zisk jednoho hráče se přesně rovná ztrátě druhého hráče.

```
function negamax(node, depth, alpha, beta)
     if node is a terminal node or depth = 0
             return the heuristic value of node
      else
          foreach child of node
             alpha := max(alpha, -negamax(child, depth-1, -beta, -alpha))
             if alpha >= beta
                 return beta
         return alpha
```

NegaScout (Principle Variation Search) - doplňková znalost

- Vylepšená varianta minimaxu s α/β prořezáváním. NegaScout dominuje (je lepší než) α/β prořezávání. Nikdy neprohledá uzel, který by byl prořezán α/β prořezáváním.
- NegaScout vychází ze správného uspořádání uzlů. V praktických aplikacích je správného uspořádání uzlů dosaženo předchozími mělkými prohledáváními. Prořezává prostor výrazně efektivněji.
- Předpokládá, že první uzel je ten nejlepší k prořezání. To kontroluje pomocí velmi rychlého prohledání s nulovým okénkem (null=window search, kde $\alpha = \beta$).
- Považován za jeden z nejlepších algoritmů používaný v nových šachových programech.

`http://en.wikipedia.org/wiki/Negascout`

NegaScout (Principle Variation Search) - doplňková znalost

```
function negascout(node, depth, alpha, beta)
        if node is a terminal node or depth = 0
            return the heuristic value of node
        b := beta
        foreach child of node
                v := -negascout (child, depth-1, -b, -alpha)
                if alpha < v < beta and not the first child
                    v := -negascout(child, depth-1, -beta, -v)
                alpha := max(alpha, v)
                if alpha>=beta
                        return alpha
                b := alpha+1
    return alpha
```

MTD-f (Memory-enhanced Test Driver Search) - doplňková znalost

- Velmi efektivní prohledávací algoritmus, používaný v nových šachových programech.
- Pracuje tak, že opakovaně spouští alfa-beta algoritmus, který
  - pracuje s nulovým oknem
  - pamatuje si všechny prošlé uzly

http://home.tiscali.nl/askeplaat/mtdf.html

MTD-f (Memory-enhanced Test Driver Search) - doplňková znalost

```
function MTDF(root, f, d)P
     g := f
     upperBound := +inf
     lowerBound := -inf
     while lowerBound < upperBound
         if g = lowerBound then
             beta := g+1
         else
             beta := g
         g := AlphaBetaWithMemory(root, beta-1, beta, d)
         if g < beta then
             upperBound := g
         else
             lowerBound := g
     return g
```

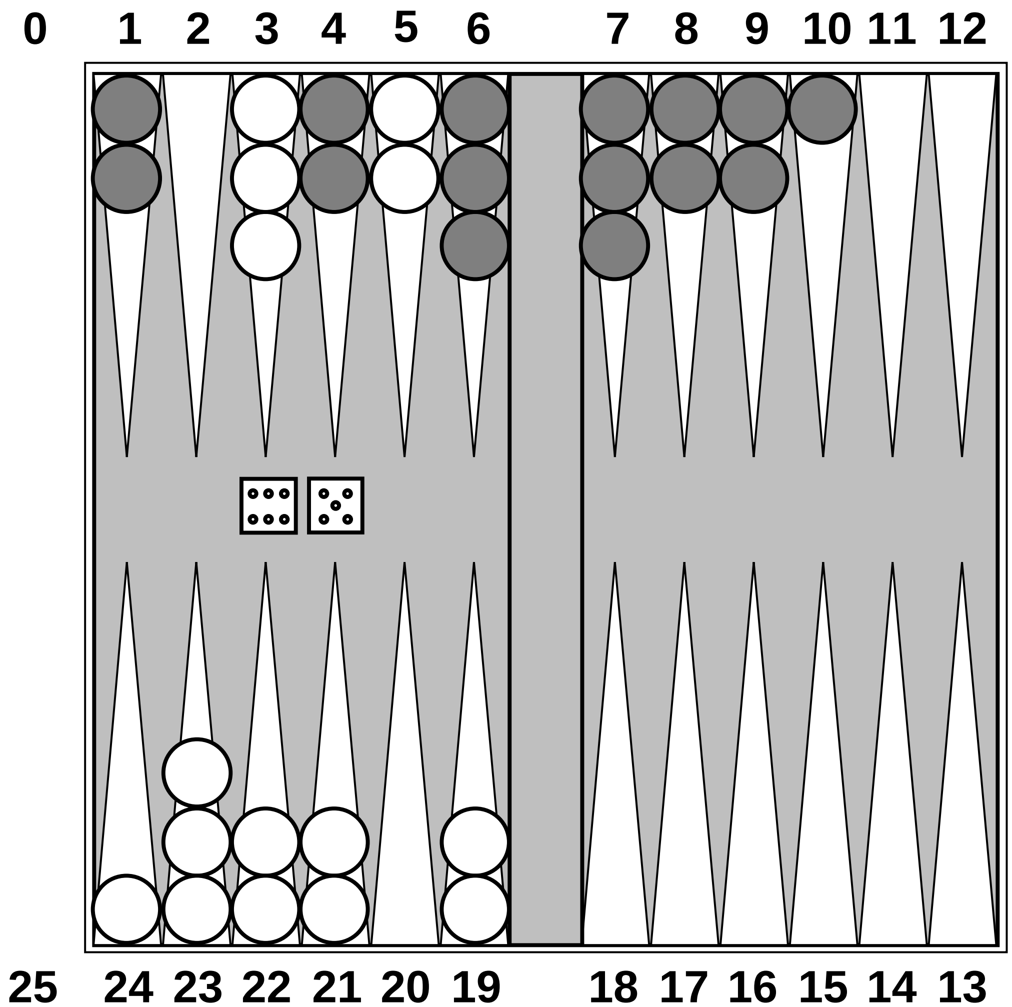
Úspěšné herní algoritmy

- **Dáma:** v roce 1994 porazil poprvé po 40 letech algoritmus chinook mistryni světa v dámě Marion Tinsley. Bylo použito databáze koncových tahů pro všechny pozice, které zahrnovali 8 a méně kamenů na šachovnici. Koncových tahů bylo celkem 443,748,401,247
- **Šachy:** v roce 1997 porazil Deep Blue Garyho Kasparova v šestikolovém zápasu. Deep Blue prohledal 200 million pozic za vteřinu a použil velmi sofistikované (a tajné) metody evaluace, které místy umožnily prohledávání do hloubky 40 tahů
- **Othello:** lidé odmítají hrát s počítačem ...
- **Go:** lidé odmítají hrát s počítačem ... (je přespříliš dobrý).
  V Go je $b > 300$. Většina algoritmu používá databáze tahů.

Hry s prvkem náhody

Aplikace klasické metody MINIMAXU, kdy MINIMAX hodnoty jsou nahrazeny očekávanými hodnotami – EMINMAX:

Hry s prvkem náhody



Hry s prvkem náhody

Aplikace klasické metody MINIMAXU, kdy MINIMAX hodnoty jsou nahrazeny očekávanými hodnotami – EMINMAX:

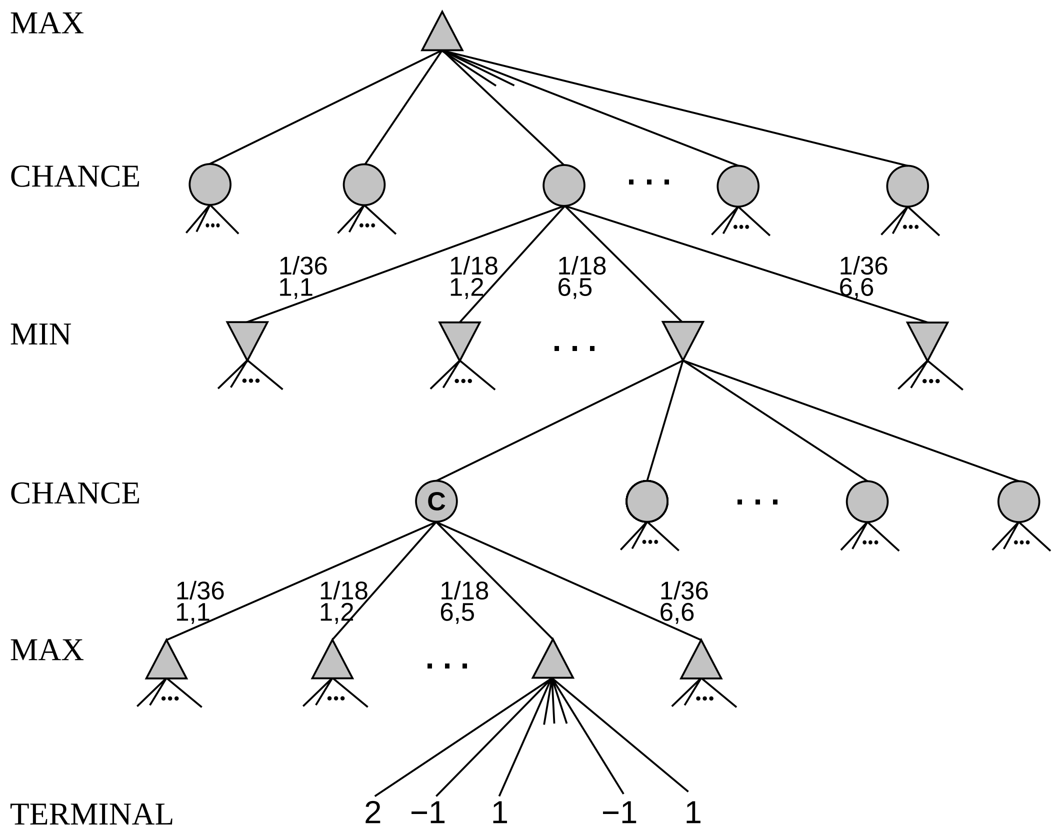
Hry s prvkem náhody

Aplikace klasické metody MINIMAXU, kdy MINIMAX hodnoty jsou nahrazeny očekávanými hodnotami – EMINMAX:

$$\texttt{eminimax}(n) = \begin{cases} \texttt{utility}(n) & \text{pro } n \text{ terminalni uzel} \\ \max_{s \in successors(n)} \texttt{eminimax} & \text{pro } n \text{ je MAX uzel} \\ \min_{s \in successors(n)} \texttt{eminimax} & \text{pro } n \text{ je MIN uzel} \\ \sum_{s \in successors(n)} P(s).\texttt{eminimax} & \text{pro } n \text{ je uzel nahody} \end{cases}$$

Hry s prvkem náhody

Aplikace klasické metody MINIMAXU, kdy MINIMAX hodnoty jsou nahrazeny očekávanými hodnotami – EMINMAX:



Hry s prvkem náhody

hod kostkou zvyšuje b – 21 možných hodů se 2 kostkami.
Backgammon má cca 20 legálních tahů.

$$\text{depth } 4 = 20 \times (21 \times 20)^3 \approx 1.2 \times 10^9$$

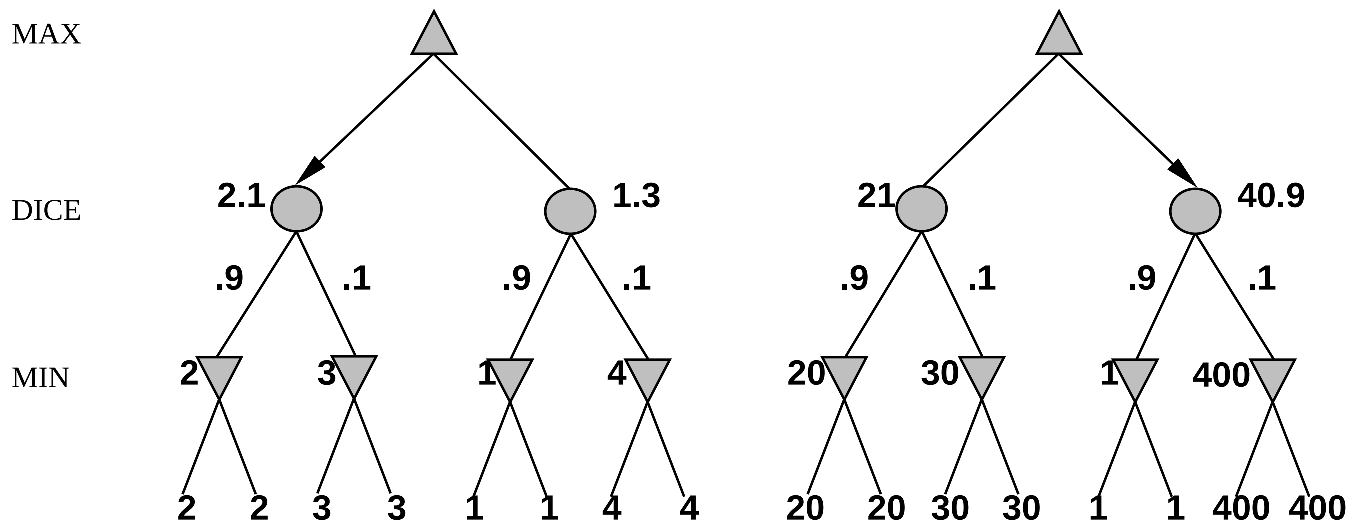
se vzrůstající hloubkou klesá pravěpodobnost dosažení daného uzlu $\Rightarrow$ význam predikce klesá

α/β prořezávání je velmi efektivní

TDGammon prohledává do hloubky 2 a používá velmi dobrou funkci `eval` $\approx$ mistrovská úroveň

Hry s prvkem náhody

degrese: přesné hodnoty `eval` jsou důležité - korektní chování algoritmu je zachováno při libovolné positivní lineární transformaci



Hry v reálném čase

Hry v reálném čase

- asynchronní šachy

Hry v reálném čase

- asynchronní šachy

Hry v reálném čase

- asynchronní šachy
- robotický fotbal

Hry v reálném čase

- asynchronní šachy
- robotický fotbal

Úvod do teorie her

Hraní dvou-a více-hráčových her je příkladem **distribuovaného (kolektivního) rozhodování** (DR). Dalším příkladem DR je například:

- hlasování
- formování koalic
- dělení zisku
- aukční řízení
- řízení týmové práce

Teorie her zkoumá vlastnosti distribuované rozhodování při použití různých strategií a stejně tak se zabývá nalézáním rozhodovacích strategií, které budou mít za následek specifické vlastnosti DR (například stabilitu).

Distribuované rozhodování lze měřit s ohledem na:

- individuální užitek
- pareto-optimalitu
- stabilitu
- kolektivní užitek (social welfare)
- individuální racionalitu hráče
- dominanci

Problém: jak zajistit stabilitu individuálně racionální akce v kompetitivním prostředí?

- **pareto-optimální** kolektivní rozhodnutí: neexistuje žádné jiné kolektivní rozhodnutí, kde by některý z hráčů dostal větší výplatu a žádný z hráčů by nedostal horší
  - pareto-optimalita neoptimalizuje kolektivní užitek, zajišťuje racionalitu chování hráčů při znalosti o akcích protihráčů
- **Nashovo equilibrium**: každý z hráčů hraje individuálně optimální strategie hráče za předpokladu, že všichni hráči použijí tutéž strategii
  - není racionální se vychylovat od Nashova equilibria
  - ne každá hra má Nashovo equilibrium
  - v některých hrách, které vyžadují sekvenci akcí je těžké Nashovo equilibrium udržet
  - **perfektní Nashovo equilibrium**: equilibrium i ve všech následných akcích

Úvod do teorie her

outcomes τ	payoffs $u(\tau,(A,B))$
$\left\{ \begin{matrix} (A_c, B_c) & (A_c, B_d) \\ (A_d, B_c) & (A_d, B_d) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} (1,1) & (5,0) \\ (0,5) & (3,3) \end{matrix} \right\}$

outcomes τ	payoffs $u(\tau, (A, B))$
$\left\{ \begin{matrix} (A_c, B_c) & (A_c, B_d) \\ (A_d, B_c) & (A_d, B_d) \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} (1, 1) & (5, 0) \\ (0, 5) & (3, 3) \end{matrix} \right\}$

strategie hráčů:

$$\xi_A = (A_d, B_c)^0 \preccurlyeq (A_c, B_c)^1 \preccurlyeq (A_d, B_d)^3 \preccurlyeq (A_c, B_d)^5$$

$$\xi_B = (A_c, B_d)^0 \preccurlyeq (A_c, B_c)^1 \preccurlyeq (A_d, B_d)^3 \preccurlyeq (A_d, B_c)^5$$